Геометрия

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

9

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ПУНКТАМИ УЧЕБНИКА И ЗАДАЧАМИ ТЕТРАДИ

Номера пунктов учебника	Тема	Номера задач тетради
86 87	Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам Координаты вектора	1—3 4—8
88 89	Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца Простейшие задачи в координатах	9—12 13—19
90 91 92	Уравнение линии на плоскости Уравнение окружности Уравнение прямой	20 21—24 25—29
93 94 95	Синус, косинус, тангенс Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения Формулы для вычисления координат точки	30—32 33—35 36, 37
96 97 98 99	Теорема о площади треугольника Теорема синусов Теорема косинусов Решение треугольников	38—40 41—43 44, 45 46—48
101 102 103, 104	Угол между векторами Скалярное произведение векторов Скалярное произведение в координатах. Свойства скалярного произведения векторов	49 50—54 55—60
105 106 107 108	Правильный многоугольник Окружность, описанная около правильного многоугольника Окружность, вписанная в правильный многоугольник Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности	61—64 65—68 69 70, 71
110 111 112	Длина окружности Площадь круга Площадь кругового сектора	72—77 78—82 83—85
113, 114	Отображение плоскости на себя. Понятие движения	86—88
116 117	Параллельный перенос Поворот	89 90—93

Геометрия

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

9 класс

Пособие
для учащихся
общеобразовательных
организаций

13-е издание

Москва
«Просвещение»
2013

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Г36

Авторы:
Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, И. И. Юдина

Рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Геометрия, 7—9» авторов Л. С. Атанасяна и др. и предназначена для организации решения задач учащимися на уроке после их ознакомления с новым учебным материалом. На этом этапе учащиеся делают первые шаги по осознанию нового материала, освоению основных действий с изучаемым материалом. Поэтому в тетрадь включены только базовые задачи, обеспечивающие необходимую репродуктивную деятельность в форме внешней речи. Наличие текстовых заготовок облегчает ученику выполнение действий в развернутой письменной форме, а учителю позволяет осуществить во время урока оперативный контроль и коррекцию деятельности учащихся. Использование данной тетради для организации других видов деятельности (самостоятельных работ, повторения, контроля и т. д.) малоэффективно.

Учебное издание

Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Федорович
Глазков Юрий Александрович
Юдина Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая тетрадь
9 класс
Пособие для учащихся общеобразовательных организаций

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова.* Редактор *Л. В. Кузнецова.* Младший редактор *Н. В. Ноговицина.* Художники *В. А. Андрианов, О. П. Богомолова, Г. В. Соловьев.* Художественный редактор *О. П. Богомолова.* Компьютерная верстка *Е. А. Стрижевской.* Корректор *А. В. Рудакова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 09.04.13. Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 2,15. Доп. тираж 55 000 экз. Заказ № 6964.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Тульская типография» ОАО «Издательство «Высшая школа». Россия, 300600, г. Тула, пр. Ленина, д. 109.

ISBN 978-5-09-030984-4

Глава X
Метод координат

§ 1 Координаты вектора

1

Найдите такое число q, чтобы выполнялось равенство $\vec{m} = q\vec{n}$, если: а) $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 5$ см, $|\vec{n}| = 2$ см; б) $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$, $|\vec{m}| = 0{,}7$ м, $|\vec{n}| = 2$ м.

Решение.

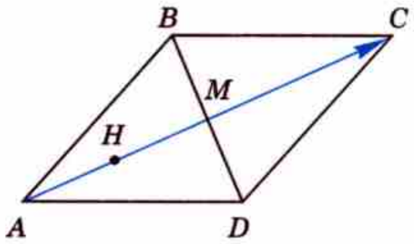
а) По условию $\vec{m} \uparrow\uparrow$ ____, т. е. q ____ 0, $|q| = \frac{|\vec{m}|}{\boxed{}} =$ ______, $q =$ ______

б) По условию $\vec{m}$ ____ $\vec{n}$, т. е. q ____ 0, $|q| =$ ____ $=$ ______, $q =$ ______

Ответ. а) ______; б) ______

2

Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, точка H — середина отрезка AM. Найдите, если это возможно, такое число k, чтобы выполнялось равенство: а) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{MH} = k\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{AC}$.



Решение.

а) $\overrightarrow{AM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$, поэтому искомое число k существует, $|k| = \frac{|\overrightarrow{AM}|}{\_\_\_}$ и k ____ 0. Так как диагонали параллелограмма точкой M делятся ________________________, то $|k| =$ ____. Итак, $k =$ ____

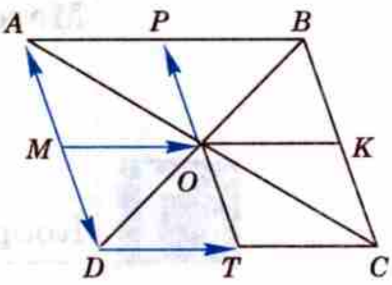
б) $\overrightarrow{MH}$ ____ $\overrightarrow{AC}$, поэтому искомое число k ________________________, $|k| = \frac{\boxed{}}{\_\_\_}$ и k ____ 0. По условию задачи точка H — ________________ отрезка AM, следовательно, $MH = \frac{1}{2}$ ________ $= \frac{1}{2}($ ____ $AC) =$ ____ AC, поэтому $|k| =$ _____. Итак, $k =$ _______

в) Векторы $\overrightarrow{DM}$ и ________ не коллинеарны, поэтому искомого значения k не ______________________________

Ответ. а) $k =$ ____; б) $k =$ _______; в) ______________________________

3

В параллелограмме $ABCD$, изображенном на рисунке, $MK \parallel DC$ и $PT \parallel DA$.



1) Разложите по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{DT}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{DA}$ векторы: а) $\overrightarrow{DO}$; б) $\overrightarrow{DB}$.

2) Разложите вектор $\overrightarrow{OB}$ по векторам: а) $\vec{m} = \overrightarrow{MO}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{OP}$; б) $\vec{m} = \overrightarrow{MO}$ и $\vec{n} = \overrightarrow{AD}$.

Решение.

1) По условию задачи $MK \parallel$ ______ , поэтому $\angle BOK$ ___ $\angle BDC$. В треугольниках BOK и BDC угол _____ общий, $\angle BOK = \angle$ ______ , следовательно, $\triangle BOK$ ___ $\triangle BDC$. Так как $BO =$ ___ BD, то $BK = \frac{1}{2}$ ___ , следовательно, точка K — середина стороны ___ параллелограмма. Аналогично точки M, P и T — __________ сторон данного параллелограмма.

а) По правилу параллелограмма получаем: $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DT}$ ___ $\overrightarrow{DM}$, но $\overrightarrow{DT}$ ___ $\vec{a}$, $\overrightarrow{DM} =$ ___ $\overrightarrow{DA} =$ ___ $\vec{b}$. Итак, $\overrightarrow{DO} = \vec{a} +$ ___ $\vec{b}$.

б) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} +$ ______ $=$ ___ $\overrightarrow{DT} +$ ______ $=$ ______ $+ \vec{b}$.

2) а) По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} +$ ______ $= \overrightarrow{MO} +$ ______ $=$ ______ $+ \vec{c}$.

б) $\overrightarrow{OB} =$ ______ $+ \overrightarrow{OP} =$ ______ $+ ($ ___ $) \overrightarrow{AD} =$ ____

Ответ.

1) а) $\overrightarrow{DO} =$ ______________ ; б) ________________

2) а) $\overrightarrow{OB} =$ ______________ ; б) ________________

4

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Найдите числа x и y такие, что: а) $2\vec{a} + x\vec{b} = y\vec{a} - \vec{b}$; б) $x\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{a} + 4y\vec{b} = \vec{0}$; в) $4x\vec{a} - \vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$.

Решение.

а) В левой и ______________ частях данного равенства записаны разложения некоторого вектора по двум неколлинеарным ________________ $\vec{a}$ и ___ . Поскольку такое разложение единственно, то коэффициенты перед вектором $\vec{a}$ равны, следовательно, $y =$ ___ . Аналогично $x =$ _____

б) Запишем данное равенство в виде $(x-3)$___ + (1+ _____)$\vec{b}$ = $= 0\vec{a} + 0\vec{b}$. Так как разложение вектора по двум _______________ _____________ векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единственно, то $x -$ ___ $= 0$ и ___ $+ 4y =$ ___ . Отсюда получаем: $x =$ ___ , $y =$ _____

в) В силу единственности разложения ____________________ по двум ___________________________ векторам получаем: $4x -$ ___ $= 0$ и $y =$ ___ . Следовательно, $x =$ ___ , y ___

Ответ.

а) $x =$ _____ , $y =$ ___ ; б) _________________ ; в) _________________

5

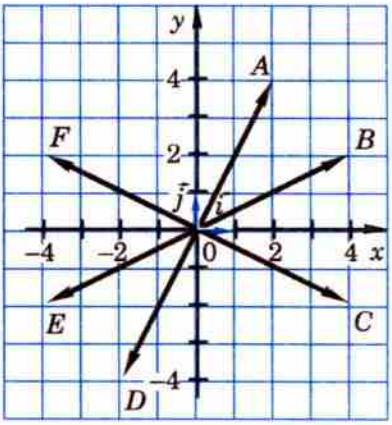
а) Какой из данных на рисунке векторов равен вектору $4\vec{i} - 2\vec{j}$?

б) Напишите разложение вектора $\overrightarrow{OE}$ по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$.

в) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{OA}$.

г) Напишите, какой вектор имеет координаты $\{-4; 2\}$.

д) Отложите от точки O вектор с координатами $\{2; -4\}$.



Ответ.

а) ________ ; б) $\overrightarrow{OE} =$ _______________ ;

в) $\overrightarrow{OA}$ {___ ; ___}; г) ________

6

Выпишите координаты вектора: а) $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$; б) $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$; в) $\vec{c} = -\vec{j}$.

Решение.

Координатами вектора называются ____________________ его разложения по координатным ____________________

а) По условию задачи $\vec{a} = 3\vec{i} -$ ___ $\vec{j}$. Следовательно, коэффициенты разложения вектора $\vec{a}$ по координатным ____________________ $\vec{i}$ и ___ равны 3 и _____ , т. е. $\vec{a}$ {___ ; _____}.

б) $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} = 1\vec{i} +$ ___ $\vec{j}$, следовательно, $\vec{b}$ {___ ; ___}.

в) $\vec{c} = -\vec{j} =$ ___$\vec{i}$ + (_____)$\vec{j}$, т. е. $\vec{c}$ {___ ; _____}.

7

Запишите разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектора: а) $\vec{m}\ \{-2;\ 3\}$; б) $\vec{n}\ \{0;\ -3\}$; в) $\vec{k}\ \{-1;\ 0\}$.

Решение.

Координаты вектора — это коэффициенты его ________________ ________ по координатным векторам. Поэтому: а) $\vec{m} = -2\vec{i} +$ ___ $\vec{j}$;
б) $\vec{n} =$ ___ $\vec{i}$ + (_____) $\vec{j}$ = ________ ; в) $\vec{k}$ = ____________ = ________

Ответ.

а) $\vec{m}$ = ______________

б) ____________________

в) ____________________

8

Даны векторы $\vec{a}\ \{2;\ -3\}$ и $\vec{b}\ \{-1;\ 5\}$.

Найдите координаты векторов: а) $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{n} = 4\vec{a}$; в) $\vec{k} = -\vec{b}$; г) $\vec{p} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.

Решение.

Используя утверждения о координатах суммы векторов и произведения вектора на число, получаем:

а) $\vec{m}$ {2+(−1); −3 + ___}, т. е. $\vec{m}$ {___ ; ___}.

б) $\vec{n}$ {4 · 2; 4 · (____)}, т. е. $\vec{n}$ {___ ; ______}.

в) $\vec{k}$ {−(−1); − ___}, т. е. $\vec{k}$ {______________}.

г) Обозначим через x_1 и y_1 абсциссу и ординату вектора $\vec{a}$, через x_2 и y_2 — абсциссу и _______________ вектора $\vec{b}$, буквами x и y — _______________ и ординату вектора $\vec{p}$.

Тогда $x = 4x_1 - 3$ ___ $= 4 \cdot$ ___ $- 3 \cdot (-1) =$ ___ , $y = 4$ ___ $- 3$ ___ $=$
$=$ __________________ $=$ ___

Следовательно, $\vec{p}$ {__________}.

Ответ.

а) $\vec{m}$ {________}

б) ____________________

в) ____________________

г) ____________________

§ 2 Простейшие задачи в координатах

9

Точка A лежит на положительной полуоси Ox, а точка B — на положительной полуоси Oy; $OA = 5$, $OB = 12$. Найдите координаты: а) вершин прямоугольника $OAMB$; б) радиус-векторов точек A, B и M; в) вектора $\overrightarrow{AB}$; г) векторов $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{BC}$, если C — точка пересечения диагоналей прямоугольника $OAMB$.

Решение.

а) O (___ ; ___), A (5; ___), M (___ ; ___), ___________

б) Радиус-вектором точки A называется вектор, начало которого совпадает с ___________ координат, а его конец — точка ___ . Координаты радиус-вектора точки A равны соответствующим ___________________ точки ___ . Поэтому $\overrightarrow{OA}$ {___ ; ___}, $\overrightarrow{OB}$ {___ ; ___}, $\overrightarrow{OM}$ ___________

в) Каждая координата вектора $\overrightarrow{AB}$ равна ___________ соответствующих координат его конца (точки ___) и ___________ (точки A). Так как A (___ ; ___), B (___ ; ___), то $\overrightarrow{AB}$ {___ ; ___}.

г) Точка пересечения диагоналей прямоугольника является ___________ диагонали OM, следовательно, $\overrightarrow{OC}$ = ___ $\overrightarrow{OM}$. Так как $\overrightarrow{OM}$ {___ ; ___}, то $\overrightarrow{OC}$ {___ ; ___}.

Каждая координата вектора $\overrightarrow{BC}$ равна ___________ соответствующих ___________ его конца (точки ___) и ___________ (точки ___). Координаты точки C равны соответствующим координатам ее радиус-вектора $\overrightarrow{OC}$, т. е. C (___ ; ___), координаты точки B равны (________), поэтому $\overrightarrow{BC}$ {___ ; ___}.

10

Заполните таблицу:

K	(5; −2)	(___ ; ___)	(−3; 0)
M	(3; 0)	(−2; 1)	
$\overrightarrow{KM}$	{___ ; ___}	{8; 0}	
$2\overrightarrow{KM}$			{6; 4}
$-0{,}5\overrightarrow{KM}$			

11

Найдите координаты вершины B параллелограмма $ABCD$, если A (0; 0), C (5; 7), D (3; 0).

Решение.

1) Четырехугольник $ABCD$ — ______________________________,
следовательно, $\overrightarrow{AB}$ ___ $\overrightarrow{DC}$. Так как C (5; ___), D (___ ; ___), то $\overrightarrow{DC}$ {___ ; ___}, поэтому $\overrightarrow{AB}$ {___ ; ___}.

2) Так как A (0; ___), $\overrightarrow{AB}$ {___ ; ___}, то B (___ ; ___).

Ответ. ______________

12

Даны точки: A (2; −1), B (5; −3), C (−2; 11), D (−5; 13). Докажите, что они являются вершинами параллелограмма.

Доказательство.

Воспользуемся признаком параллелограмма: если в четырехугольнике две стороны равны и ________________________, то этот ______________________ является ___________________________

В силу этого признака достаточно показать, что: а) $\overrightarrow{AB}$ ___ $\overrightarrow{DC}$; б) точки A, B и D не лежат на одной прямой.

а) Так как A (2; −1), B (________), то $\overrightarrow{AB}$ {___ ; ___}; так как C (−2; 11), D (_________), то $\overrightarrow{DC}$ {___ ; ___}. Итак, $\overrightarrow{AB}$ ___ $\overrightarrow{DC}$.

б) Точки A, B и D лежат на одной ______________, если координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ пропорциональны. Так как $\overrightarrow{AB}$ {___ ; ___} и $\overrightarrow{AD}$ {___ ; ___}, то координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ ______________ ______________________, поэтому эти векторы не коллинеарны и, следовательно, точки A, B и D ______________ на одной прямой. Итак, четырехугольник $ABCD$ — ____________________________, что и требовалось доказать.

13

Заполните таблицу, если точка K — середина отрезка BC.

B	(3; −1)	(0; 5)	
C	(7; 3)		(4; 0)
K		(−2; 1)	(6; −2)

14

Найдите координаты середины медианы AM треугольника ABC, если A $(-2; 4)$, B $(2; -1)$, C $(6; 1)$.

Решение.

1) Отрезок AM — медиана треугольника ______ , поэтому точка M — __________________ стороны BC. По условию задачи B $(2; -1)$, C (___ ; ___), следовательно, M (___ ; ___).

2) Пусть точка K — середина отрезка AM. Так как A (−2; ___), M (___ ; ___), то K (___ ; ___).

Ответ.

____

15

Найдите длины векторов: $\vec{a}\ \{-3; 4\}$, $\vec{b}\ \{5; 0\}$, $\vec{c}\ \{0; -2\}$.

Решение.

$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_$

$|\vec{b}| = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_$

$|\vec{c}| = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Ответ.

$|\vec{a}| = \_\_\_$; ____________ ; ____________

16

Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AM}$, если A $(5; -3)$, B $(2; 1)$, M $(5; 3)$.

Решение.

а) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2-5)^2 + \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_$

б) $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_$

Ответ.

$|\overrightarrow{AB}| = \_\_\_$; ____________

17

Найдите длины сторон AB и BC и длину медианы BK треугольника ABC, если $A(-2; 4)$, $B(10; -1)$, $C(6; -4)$.

Решение.

а) $AB = \sqrt{(10+2)^2 + \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_} = \_\_\_$

б) $BC = $ ______________________________

в) Так как отрезок BK — ______________ треугольника ABC, то точка K является ______________ стороны AC, следовательно, $K($___ ; ___$)$. Поэтому $BK = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_}$

Ответ. $AB = $ ___ ; $BC = $ ___ ; $BK = $ ______

18

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является ромбом, и найдите его площадь, если $A(-3; 4)$, $B(7; 9)$, $C(5; -2)$, $D(-5; -7)$.

Решение.

Четырехугольник является ромбом, если все его стороны ______________ . Действительно, если в четырехугольнике противоположные стороны попарно ______________ , то этот четырехугольник является ______________________________ . А параллелограмм, у которого _______ стороны ______________ , называется ромбом.

Сравним длины ______________ данного четырехугольника:

$AB^2 = (7+3)^2 + (\_\_\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_ + \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

$BC^2 = $ ______________________________

$CD^2 = $ ______________________________

$DA^2 = $ ______________________________

Следовательно, AB^2___BC^2___CD^2___DA^2, откуда $AB = BC = $ $= $ _____ $=$ _____

Итак, четырехугольник $ABCD$ является ______________ , поэтому его площадь равна половине ______________ его диагоналей.

$AC^2 = (-3-5)^2 + $ ______________ $=$ _____ , следовательно, $AC = $ _____ ;

$BD^2 = $ ______________________________ , следовательно, $BD = $ _____

$S_{ABCD} = 0{,}5AC \cdot $ _____ $=$ ______________ $=$ _____

Ответ. ______________

19

Даны точки $A\ (-2;\ -3)$, $B\ (-3;\ 4)$, $C\ (4;\ 5)$.

1) Докажите, что в треугольнике ABC углы A и C равны.

2) Найдите площадь треугольника ABC.

Решение.

1) В треугольнике ABC углы A и C равны, если BC ___ BA. Так как $BC^2 = (-3-4)^2 +$ ________ = ______ , $BA^2 =$ ______________________ , то BC ___ BA. Следовательно, $\angle A$ ___ $\angle C$.

2) В данном равнобедренном треугольнике ABC основанием служит сторона ______ , следовательно, медиана, проведенная из вершины ____ , является ____________________ треугольника. Найдем AC и медиану BM. $AC = \sqrt{(-2-4)^2 + \underline{\qquad\qquad}} = \sqrt{\underline{\quad}} = \underline{\quad}$

Так как точка M — середина стороны AC, то M (___ ; ___) и поэтому $BM = \sqrt{\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

Итак, $S_{ABC} = 0{,}5AC \cdot \underline{\qquad} = 0{,}5 \cdot \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\qquad}$

Ответ. ________________

§ 3 Уравнение окружности и прямой

20

Даны точки $A\ (-1;\ 2)$, $B\ (0;\ \sqrt{3})$, $C\ (1;\ -2)$, $D\ (2;\ -1)$. Какие из этих точек лежат на линии L, заданной уравнением $x^2-2x+y^2-3=0$?

Решение. Точка лежит на линии, заданной уравнением с двумя переменными x и y, если ее ______________________ удовлетворяют этому уравнению, и не лежит на линии, если ее координаты ______________________ уравнению линии. Подставим __________ __________ данных точек в уравнение $x^2 - 2x +$ ________________ :

$(-1)^2 - 2\,(-1) +$ ___________ $= 1 +$ ___________ $- 3 = 0$. Координаты точки A не удовлетворяют данному ________________ , следовательно, точка A ________________ на линии L: $A \notin$ ___

$0^2 - 2 \cdot 0 +$ ______________ = ________ = 0. Следовательно, B ___ L.

____ . Следовательно, C ___ L.

____

Ответ. __________

21

Какие из следующих уравнений задают окружность:

а) $x^2 + (y-1)^2 = 25$;

б) $4x^2 + 4y^2 = 9$;

в) $2x^2 + 2y^2 = 0$;

г) $x^2 + y^2 + 1 = 0$;

д) $(x+2)^2 + y^2 - 0{,}01 = 0$;

е) $x^2 - 2x + y^2 = 3$?

Решение.

а) Уравнение $x^2 + (y-1)^2 = 25$ имеет вид $(x-a)^2 + (\_\_\_ - b)^2 = r^2$, где $a = 0$, $b =$ ___ , $r =$ ___ $\neq 0$, следовательно, это уравнение ____________ окружность.

б) Разделив обе части уравнения $4x^2 +$ ________ $= 9$ на 4, получим уравнение $x^2 +$ ________ $= \frac{9}{4}$, которое имеет вид $(x-a)^2 +$ $+$ ________ $= r^2$, где $a =$ ___ , $b =$ ___ , $r =$ ___ $\neq 0$. Следовательно, это уравнение ____________ окружность.

в) Равенство $2x^2 +$ ________ $= 0$ выполняется только при $x =$ ___ , $y =$ ___ , т. е. данному уравнению удовлетворяют координаты только одной ________ (0; 0). Следовательно, это уравнение ____________ окружность.

г) Левая часть уравнения $x^2 + y^2 +$ ___ $= 0$ при любых значениях x и y ____________ нуля, а правая часть равна ________ . Поэтому точек, ____________ которых удовлетворяют данному ____________, не существует. Следовательно, уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ____________ окружность.

д) Перенеся слагаемое $-0{,}01$ в ____________ часть уравнения $(x+2)^2 + y^2$ ________ $\neq 0$, получим уравнение ____________ , которое имеет вид $(x-a)^2 +$ ____________ , где $a =$ ____ , $b =$ ___ , $r =$ ____ $\neq 0$. Следовательно, уравнение $(x+2)^2 +$ ____ $-$ $- 0{,}01 = 0$ ____________ окружность.

е) Прибавив к обеим частям уравнения $x^2 - 2x +$ ________ число 1, получим уравнение $x^2 - 2x +$ ________ $+ y^2 =$ ___ , которое можно записать в виде $(x-1)^2 + ($________$)^2 =$ ________, т. е. в виде $(x-a)^2 +$ ________ $= r^2$, где $a =$ ___ , $b =$ ___ , $r =$ ___ $\neq 0$. Следовательно, данное уравнение ____________ окружность.

Ответ.

Окружность задают уравнения а), ____________

22

Постройте окружность, заданную уравнением:

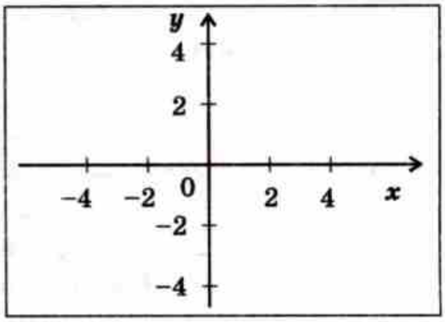
а) $x^2 + y^2 = 16$; б) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$; в) $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$.

Решение.

Для построения окружности надо знать ее радиус и координаты ______________ . Если уравнение окружности имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, то ее радиус равен ____ , а центром является точка с координатами (____ ; ____).

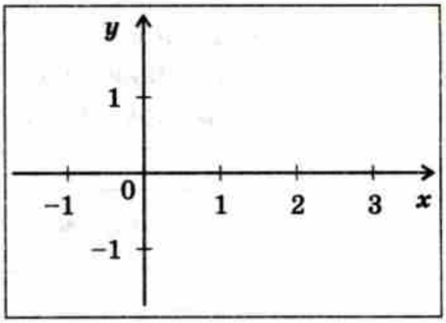
а) Уравнение $x^2 + y^2 = 16$ запишем в виде $(x - 0)^2 +$ (________)$^2 =$ ____ . Отсюда следует, что центр окружности — точка (____; ____), а радиус равен ____

Построим искомую окружность, заданную уравнением $x^2 + y^2 = 16$.



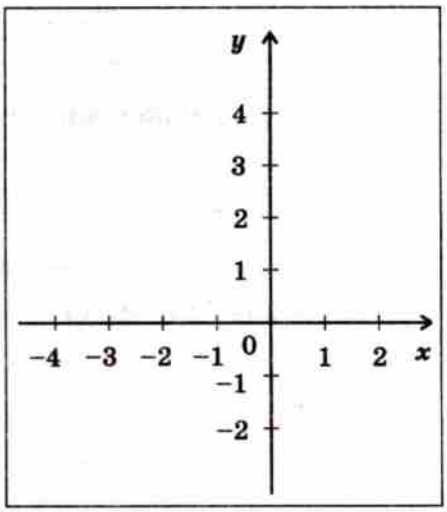
б) Уравнение $(x - 1)^2 +$ ______________ представим в виде $(x -$ ____$)^2 + (y - 0)^2 =$ $=$ ____ . Следовательно, центр окружности — точка (____; ____), а радиус равен ____

Построим искомую окружность, заданную уравнением $(x - 1)^2 + y^2 = 4$.



в) Чтобы выделить квадрат двучлена с переменной x и квадрат ____________________ с переменной y, прибавим к обеим частям уравнения $x^2 + 2x +$ ______________ слагаемые 1 и 4. Получим уравнение $(x^2 + 2x + 1) +$ $+ (y^2 -$ ______ $+ 4) = 4 +$ _____ $+$ _____ , которое запишем в виде $(x + 1)^2 +$ $+ (y -$ ____$)^2 =$ ____ . Значит, центр окружности — точка (________), а радиус равен ____

Построим искомую окружность, заданную уравнением $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 4$.



23

Окружность задана уравнением $(x+1)^2+(y-2)^2=25$. Не пользуясь чертежом, установите, какие из точек A (3; −2), B (−4; 6) и C (3; −1) лежат на окружности.

Решение.

Первый способ. Выясним, координаты каких точек удовлетворяют ________________ окружности.

$(3+1)^2 + (\_\_\_\_\_\_)^2 = 4^2 + \_\_\_\_ = \_\_\_\_ \neq 25$. Итак, координаты точки A ________________________ данному уравнению, следовательно, точка A __________________ на окружности.

$(-4+\_\_\_)^2 + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_$. Итак, __________ __________ точки B ____________________ данному уравнению, следовательно, точка ______________________________________

$(3+1)^2 + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$. Итак, точка C ________________ на окружности.

Второй способ. Центр данной окружности — точка с координатами (___ ; ___), а радиус окружности равен ___ . Найдем расстояния от центра данной ________________________ до каждой из данных точек и сравним их с __________________ окружности. Обозначим центр окружности буквой M, тогда:

$AM = \sqrt{(-1-)^2 + \_\_\_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_} \neq 5$, следовательно, точка A ______________ на окружности.

$BM =$ ___________________________________, следовательно, ____

$CM =$ ____ ____

Ответ. На данной окружности лежат точки ______________

24

Напишите уравнение окружности радиуса r с центром в точке C, если: а) $r=2$ и C (3; 0); б) $r=3$ и C (0; −2); в) $r=\sqrt{5}$ и C (−2; 3).

Ответ.

а) $(x-3)^2 + \_\_\_\_ = 4$;

б) ____________________________

в) ____________________________

25

Напишите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB, если $A\ (-3;\ 4)$, $B\ (1;\ -2)$.

Решение. Если точка $M\,(x;\ y)$ лежит на серединном ____________________ к отрезку AB, то AM ___ BM, и поэтому AM^2___BM^2. Запишем это равенство в координатах: $(x+3)^2 +$ $+$ __________ $=$ __________ $+ (y+2)^2$. Раскрыв скобки, получим: $x^2 + 6x +$ ____________________ $= x^2 - 2x +$ ____________________ . Перенесем все слагаемые из правой части в левую __________ равенства: $x^2 + 6x +$ ____________________________ $- 4y - 4 = 0$. Приведем подобные члены: $8x -$ _______________ $= 0$. Разделив обе части уравнения на 4, получим $2x -$ _______________ $= 0$.

Если точка $M\,(x;\ y)$ лежит на серединном _________________ к отрезку AB, то ее координаты удовлетворяют уравнению $2x -$ _____________ $= 0$. Если же точка $M\ (x;\ y)$ не лежит на ____ к отрезку AB, то $AM^2 \neq$ ___ , и поэтому ее __________________ не удовлетворяют полученному уравнению.

Итак, уравнение $2x -$ ____________ $= 0$ является уравнением серединного _________________________ к отрезку AB.

Ответ. __________________

26

Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A\ (-1;\ 2)$ и $B\ (2;\ -3)$.

Решение. Уравнение прямой имеет вид $ax +$ ___ $+ c = 0$. Точки A и ___ лежат на прямой, т. е. их координаты _______________ этому уравнению. Подставив координаты точек A и ___ в уравнение, получим: $a \cdot (-1) +$ _____ $+ c = 0$; _____ $+ b \cdot (-3) + c = 0$.

Выразим отсюда a и b через c: $a =$ ___ c и $b =$ ___ c. Подставив полученные значения a и ___ в уравнение $ax + by +$ ___ $=$ ___ , приходим к уравнению: $-5cx + ($___$)\ y +$ ___ $= 0$. При любом $c \neq 0$ это уравнение является _________________ прямой AB. Сократив на $-c$, получим искомое ______________________ прямой _____ в виде: _____ $+ 3y - 1 = 0$.

Ответ. ____________________

27

Даны координаты вершин треугольника: $A\ (-3;\ 0)$, $B\ (1;\ 4)$, $C\ (3;\ 0)$. Напишите уравнение прямой, содержащей среднюю линию треугольника, параллельную стороне AB.

Решение.

Обозначим середины сторон BC и AC буквами K и M соответственно. Тогда $K\ (2;$ ____), M (____ ; ____), а прямая KM— искомая. Запишем ее уравнение в виде $ax +$ ________________ $= 0$. Подставив координаты точек K и ______ в это уравнение, получим систему:

$$\begin{cases} 2a + \_\_\_\_\_\_\_ + c = 0 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует: $c =$ ____ и b ____ $- a$, и поэтому искомое уравнение принимает вид: ____ $- ay = 0$ или $x -$ ____ $= 0$.

Ответ. ______________

28

Прямые заданы уравнениями $x + y = 0$ и $2x - y + 3 = 0$.

а) Найдите координаты точки пересечения данных прямых.

б) Напишите уравнение прямой, проходящей через найденную точку и параллельной оси ординат.

Решение.

а) Искомая точка лежит на данных прямых, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих ________________ , т. е. являются решением ______________ уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - \_\_\_\_\_\_\_ = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим: $x =$ ____ и $y =$ ____

б) Уравнение прямой, проходящей через ____________ $M_0\ (x_0;\ y_0)$ параллельно ______________ ординат, имеет вид: $x =$ ____ . Учитывая, что $M_0(-1;$ ____), получаем искомое уравнение: $x =$ ____

Ответ.

а) (____ ; ____);

б) ____________

29

Окружность и прямая заданы уравнениями $x^2 + (y - 4)^2 = 25$ и $x - 7y + 3 = 0$. Найдите длину хорды, отсекаемой окружностью на прямой.

Решение.

Чтобы найти координаты ______________ пересечения окружности и ________________, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + (\_\_\_\_\_\_\_)^2 = 25 \\ x - \_\_\_\_\_\_\_ + 3 = 0. \end{cases}$$

Последовательно получаем:

$x = 7y - $ _____ ; $(7y - 3)^2 + (y - $ _____ $)^2 = 25;$

$49y^2 - 42y + $ ______________________ $= 25;$

$50y^2 - $ __________ $= 0;$ $y_1 = $ _____ , $y_2 = $ _____

Соответственно находим $x_1 = $ _____ и $x_2 = $ _____

Итак, данные окружность и прямая пересекаются в точках (_____ ; _____) и (_____ ; _____).

Искомая длина хорды равна:

$$\sqrt{(-3-4)^2 + (\_\_\_\_\_)^2} = \sqrt{\_\_\_\_\_ + \_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_} = \_\_\_\sqrt{2}.$$

Ответ. __________

Глава XI

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов

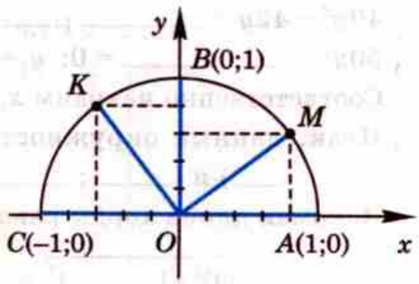
§ 1 Синус, косинус, тангенс угла

30

Найдите по рисунку синус, косинус и тангенс угла:

а) AOM; б) AOK; в) AOC; г) AOB.

Р е ш е н и е.



а) Угол AOM образован лучом OM и положительной ______________ абсцисс, точка M лежит на единичной ______________________. Значит, синус угла AOM равен __________ точки M, т. е. $\sin\angle AOM =$ _________ ; косинус угла AOM равен ______________ точки _____, т. е. $\cos\angle AOM =$ _____ ; тангенс угла AOM равен отношению $\frac{\sin\angle AOM}{\_\_\_\_\_}$, т. е. $\operatorname{tg}\angle AOM =$ _____ : _____ = _____

б) синус угла AOK равен _________________ точки _____ , т. е. $\sin\angle AOK =$ _____ ; косинус угла _____ равен ____________ точки ____ , т. е. $\cos\angle AOK =$ _____ ; тангенс угла AOK равен ____

в) $\sin\angle AOC =$ _____ ; $\cos\angle AOC =$ _____ ; ________________

г) ______________ ; $\cos\angle AOB =$ _____ ; тангенс угла AOB не ____________________ , так как $\cos\angle AOB =$ _____

О т в е т.

а) $\sin\angle AOM =$ _____ ; ______________________________

б) ____

в) ____

г) ____

31

Принадлежит ли единичной полуокружности точка:

а) $P\,(-0{,}6;\ 0{,}8)$; б) $T\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$; в) $H\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

Решение.

Точка с координатами $(x;\ y)$ принадлежит ______ полуокружности, если выполнены два условия: 1) ____ $\leqslant x \leqslant$ ____, ____ $\leqslant y \leqslant$ ____ и 2) $x^2 + y^2 =$ ____. Рассмотрим данные точки.

а) Точка P: $x =$ _____, $y =$ _____ удовлетворяют первому условию: ____ $\leqslant x \leqslant$ ____, ______________ ; $x^2 + y^2 = (0{,}6)^2 +$ _____ = = _________ $= 1$, следовательно, _________ второе условие. Поэтому точка P _____________ единичной полуокружности.

б) Точка T: $x =$ _____, $y =$ _____, следовательно, ____ $\leqslant x \leqslant$ ____, ________ y ________. Итак, первое условие _____________. $x^2 + y^2 =$ _____ + _____ = _____ $\neq 1$. Следовательно, второе условие _______________. Поэтому точка T _____________ единичной полуокружности.

в) Точка H: $x =$ _____, $y =$ _____, следовательно, _____________
____
____
_______________________________. Поэтому точка H
____

Ответ.

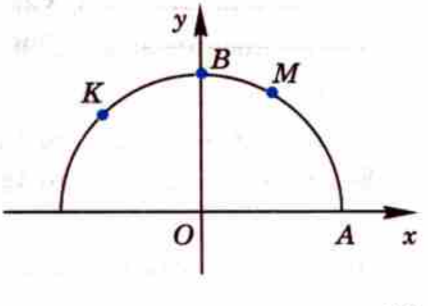
а) Принадлежит.

б) ___________________

в) ___________________

32

Выпишите значения синуса, косинуса и тангенса углов AOM, AOB и AOK, если $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\,(0;\ 1)$, $K\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



Решение. Синус угла AOM — это _______________ точки M, т. е. $\sin\angle AOM =$ _____

Косинус угла AOM — это ________________ точки M, т. е. ________________

$\operatorname{tg}\angle AOM = \frac{\_\_\_\_}{\cos\angle AOM}$, т. е. $\operatorname{tg}\angle AOM = \_\_\_\_ : \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

$\sin\angle AOB = \_\_\_\_$, $\cos\angle AOB = \_\_\_\_$, ________________

$\sin\angle AOK = \_\_\_\_$, ________________

Ответ.

$\sin\angle AOM = \_\_\_\_$, ________________

____

____

33

Найдите $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

1) Используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \_\_\_\_$, получаем: $\sin^2\alpha + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \_\_\_\_$, откуда $\sin^2\alpha = \_\_\_\_ - \_\_\_\_ = \_\_\_\_$. Так как $\_\_\_\_ \leqslant \sin\alpha \leqslant \_\_\_\_$, то $\sin\alpha = \_\_\_\_$

2) По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\_\_\_\_}$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = \_\_\_\_ : \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

Ответ. $\sin\alpha = \_\_\_\_$; ________________

34

Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

1) Используя основное тригонометрическое ________________ $\sin\alpha^2 + \_\_\_\_ = 1$, получаем: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \_\_\_\_ = 1$, откуда $\cos^2\alpha = \_\_\_\_ - \_\_\_\_ = \_\_\_\_$. Так как $\_\_\_\_ \leqslant \cos\alpha \leqslant \_\_\_\_$, то находим два значения косинуса: $\_\_\_\_$ и $\_\_\_\_$

2) По ________________ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\_\_\_\_}{\cos\alpha}$.

Если $\cos\alpha = \_\_\_\_$, то $\operatorname{tg}\alpha = \_\_\_\_ : \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

Если $\cos\alpha = \_\_\_\_$, то $\operatorname{tg}\alpha = \_\_\_\_ : \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

Ответ.

$\cos\alpha = \_\_\_\_$, $\operatorname{tg}\alpha = \_\_\_\_$ или $\cos\alpha = \_\_\_\_$, $\operatorname{tg}\alpha = \_\_\_\_$

35

Вычислите $\cos 120°$, $\sin 150°$, $\mathrm{tg}\,135°$.

Решение. Используя формулу приведения $\cos(180° - \alpha) =$ = ________ , получаем: $\cos 120° = \cos(180° -$ _____ $) =$ _____ $60° =$ ____

Используя формулу ________________ $\sin(180° - \alpha) =$ ______ , получаем: $\sin 150° = \sin($_____ $-$ _____$) =$ ________$30° =$ _____

Используя формулы приведения $\sin(180° - \alpha) =$ _________ и $\cos(180° -$ _____$) =$ __________, получаем:

$$\mathrm{tg}\,135° = \frac{\sin 135°}{\_\_\_\_\_} = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_}{\cos(180° - \_\_\_\_\_)} = \frac{\sin 45°}{\_\_\_\_\_} = -\mathrm{tg}\ \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$$

Ответ. ________________ ; ________________ ; ________________

36

Найдите координаты точки A, если: а) $\alpha = 60°$, $OA = 4$; б) $\alpha = 150°$, $OA = 6$ (α — угол между лучом OA и положительной полуосью Ox).

Решение. Координаты x и y точки A можно вычислить по формулам: ____ $= OA\cos\alpha$, $y =$ __________ , где OA — __________ отрезка OA, α — _____ между лучом _____ и положительной __________ Ox.

а) $x = 4\cos 60° =$ _____ $=$ _____ ; $y = 4$ ________ $=$ _____ $=$ _____

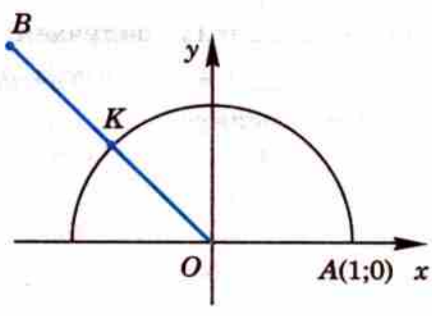
б) $x =$ ________________________ ; $y =$ ________________________

Ответ. а) A (_____ ; _____); б) A (_____ ; _____).

37

Луч OB пересекает единичную полуокружность в точке K. Найдите координаты точки B, если $OB = 2$, $K\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение. Так как точка K лежит на ______________ полуокружности, то абсцисса точки K является косинусом угла ______ , ордината — _______ угла AOK, т. е. $\cos\angle AOK =$ = _______ , $\sin\angle AOK =$ _______ . Координаты x и y точки B найдем по формулам $x =$ _____ $\cos\angle AOK$, $y = OB \times$ $\times$ __________ , т. е. $x = 2$ __________ , $y =$ ______________



Ответ. B (_____; _____).

§ 2 Соотношения между сторонами и углами треугольника

38

Вычислите площадь треугольника ABC, если $AB = 3$ м, $BC = 8$ м и $\angle B = 30°$.

Решение.

Пусть S — площадь данного ________ ABC, тогда

$S = \frac{1}{2}$ ________ $\sin B =$ ____ $\cdot 3 \cdot$ ____ $\cdot$ ____ $=$ ____ (м²).

Ответ. ________

39

Площадь треугольника BCE равна $18\sqrt{2}$ см², $CE = 2BE$, $\angle E = 45°$. Найдите сторону CE.

Решение.

Так как $S_{BCE} = \frac{1}{2} BE \cdot$ ________ и $CE = 2$____, то

$S_{BCE} = \frac{1}{2}\ BE \cdot 2BE \cdot$ ________ $= BE^2 \cdot$ ________

Отсюда получаем $BE^2 = S_{BCE} :$ ________ $= 18\sqrt{2} :$ ____ $=$ ____ (см²), $BE =$ ____ см, $CE =$ ______ см.

Ответ.

$CE =$ ______ см.

40

Стороны параллелограмма равны 4 м и 6 м, а один из его углов в два раза меньше другого. Найдите площадь параллелограмма.

Решение.

Пусть дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = 4$ м, $AD = 6$ м, $\angle B = 2\angle A$. Тогда $\angle C = \angle A$, $\angle D = \angle$____ $= 2\angle$____, откуда $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 6\angle$____ $= 360°$, откуда $\angle A =$ ______

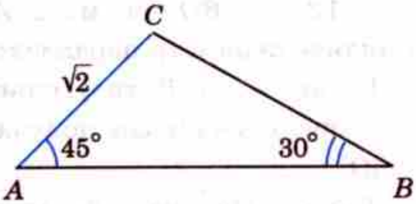
Следовательно, $S = AB \cdot$ ____ $\cdot \sin A = 4 \cdot$ ______ $=$ ______ (м²).

Ответ. ________________

41

Дано: $\triangle ABC$, где $AC = \sqrt{2}$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 30°$.

Найти: BC.



Решение.

По теореме синусов $\frac{\_\_\_\_}{\sin A} = \frac{AC}{\_\_\_\_}$,

откуда получаем: $BC = \frac{\_\_\_\_}{\sin B} \sin A =$

$= (\sqrt{2} : \_\_\_\_) \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (см).

Ответ. ______

42

Дано: $\triangle MPT$, где $\angle T = 150°$, $TM = 2$ м, $MP = 6$ м.

Найти: $\sin P$.

Решение.

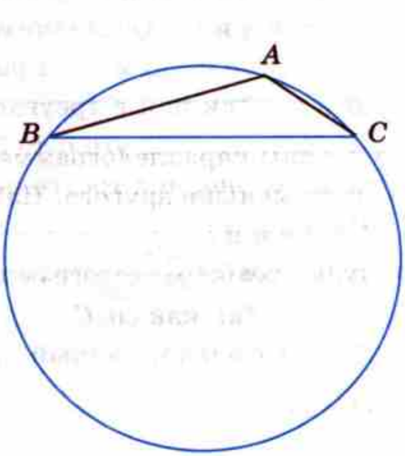
По теореме ____________ $\frac{MP}{\sin T} = \_\_\_\_$. Отсюда получаем:

$\sin P = \frac{TM}{MP} \cdot \_\_\_\_\_\_ = \frac{2}{6} \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

Ответ. ______

43

Точки A, B и C лежат на окружности диаметра 12, хорда BC равна 6. Найдите градусную меру угла BAC.



Решение.

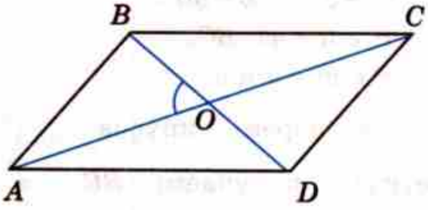
Из равенства $\frac{a}{\sin A} = 2 \cdot \_\_\_\_$ получаем: $\sin A = \frac{a}{\_\_\_\_}$, т. е. $\sin A = \frac{6}{\_\_\_\_} =$

$= \_\_\_\_$. Так как угол A тупой, то $\angle A = \_\_\_\_$

Ответ. ______

44

В параллелограмме $ABCD$ диагонали $AC = 12$ м, $BD = 6$ м, $\angle AOB = 60°$. Найдите периметр параллелограмма.



Р е ш е н и е. В треугольнике AOB по теореме косинусов получаем: $AB^2 = AO^2 +$ _____ $- 2$ ________________

Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения ______________ пополам, то $AO =$ ____ м, $BO =$ ____ м. Поэтому $AB^2 = 6^2 +$ ______________ $=$ $=$ ______, $AB =$ ______ м.

Аналогично в треугольнике BOC получаем: $BC^2 = OB^2 +$ _____ $-$ $-$ __________ $\cdot \cos\angle BOC$. Так как $\angle BOC = 180° - \angle$ ______, то $\cos\angle BOC = \cos(180° - \angle$______$) = -\cos\angle AOB =$ ______ . Следовательно, $BC^2 = 6^2 +$ ________________ $=$ ______, $BC =$ ______ м.

Итак, периметр параллелограмма равен: ____ $(AB +$ _____$) =$ $=$ ____ (______ $+ 3\sqrt{7}) = 6$ (______ $+$ ______) (м).

О т в е т.

____

45

Определите вид треугольника (остроугольный, прямоугольный или тупоугольный), стороны которого равны 5 м, 7 м и 9 м.

Р е ш е н и е. Обозначим стороны треугольника так: $a = 5$ м, $b = 7$ м и $c =$ ___ м, а противолежащие им вершины буквами A, B и C. Так как в треугольнике против большей стороны лежит ________________ угол, то $\angle$ ____ — больший угол треугольника, а следовательно, вид треугольника определяется углом ____

По теореме __________________ $c^2 = a^2 +$ __________________,

откуда $\cos C = \dfrac{a^2 + \text{\_\_\_\_\_}}{2ab}$, т. е. $\cos C = (5^2 +$ ________$)$: __________ $=$ $=$ ______ . Так как $\cos C$ ____ 0, то угол C — ______________

Следовательно, данный треугольник — ____________________

О т в е т.

____

46

Дано: $\triangle ABC$, где $a = 2\sqrt{3}$, $b = 1$, $\angle C = 30°$. **Найти:** c, $\angle A$, $\angle B$.

Решение.

1) По теореме косинусов $c^2 = a^2 +$ ________________, т. е. $c^2 =$ $= (2\sqrt{3})^2 +$ ________________ $=$ ____, откуда $c = \sqrt{\_\_\_} \approx$ ________

2) По теореме ________________ $a^2 = b^2 +$ ________________, откуда $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - \_\_\_\_}{\_\_\_\_}$, т. е. $\cos A = (1^2 +$ __________$)$: ______ $\approx$ $\approx$ _________. Следовательно, $\angle A \approx$ ______

3) $\angle B = 180° - (\angle A +$ ______$)$, $\angle B \approx$ ______

Ответ. $c \approx$ ________, $\angle A \approx$ ______, $\angle B \approx$ ______

47

Дано: $\triangle ABC$, где $a = 5$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 80°$. **Найти:** b, c, $\angle A$.

Решение.

1) $\angle A = 180° - ($_________$) =$ ______

2) По теореме синусов $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\_\_\_\_}$, откуда $b = a\dfrac{\sin\_\_\_}{\_\_\_\_}$, т. е. $b \approx 5 \cdot$ _________ $=$ ______

3) По теореме ________________________ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{\_\_\_\_}{\sin C}$, откуда $c = a \cdot$ ________, т. е. $c \approx$ ____ $\cdot$ ________ $=$ ______

Ответ. $\angle A =$ ______, $b \approx$ ______, $c \approx$ ______

48

Дано: $\triangle ABC$, где $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$. **Найти:** $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Решение.

1) По теореме косинусов $a^2 = b^2 +$ ________________, откуда $\cos A = \dfrac{b^2 + \_\_\_\_}{2bc} = \dfrac{2^2 + \_\_\_\_}{\_\_\_\_} =$ _____, значит, $\angle A \approx 104°30'$.

2) Аналогично получаем $\cos B = \dfrac{a^2 + \_\_\_\_}{\_\_\_\_}$, т. е. $\cos B =$ _____, откуда $\angle B \approx$ ________

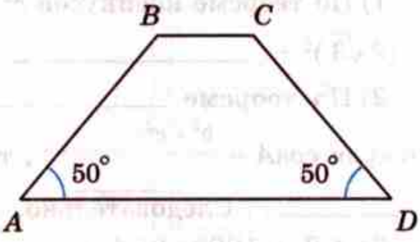
3) $\angle C = 180° - (\angle A + \angle$_____$)$, т. е. $\angle C \approx$ ________

Ответ. $\angle A \approx$ ________, ___________, ____________

§ 3 Скалярное произведение векторов

49

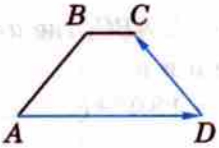
В трапеции $ABCD$ углы A и D равны $50°$. Найдите углы между векторами:
а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; г) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$; д) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$; е) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.



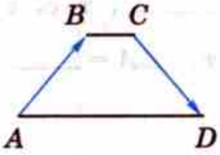
Р е ш е н и е.

а) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ отложены от одной точки (точки ____), поэтому угол между ______________ $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равен градусной ____________ угла ______ Следовательно, $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD}} = 50°$.

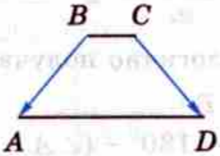
б) Отложим от начала вектора $\overrightarrow{DC}$ (точки ____) вектор $\overrightarrow{DK}$, равный вектору ____ (выполните построение на рисунке). Угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DC}$ равен градусной ________ угла ________ . Следовательно, $\widehat{\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{DC}} =$ $= 180° -$ ______ $=$ ______

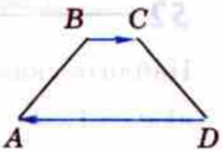


в) Отложим от начала __________ $\overrightarrow{AB}$ вектор $\overrightarrow{AH}$, ____________ вектору $\overrightarrow{CD}$ (выполните построение на рисунке). Угол между ______________ $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен ____________ мере угла ____ . Так как $AH \parallel$ ____ , то накрест лежащие углы HAD и _____ равны. Следовательно, $\angle HAD =$ _____ . Отсюда получаем: $\angle BAH = 50° +$ _____ $=$ $=$ ______ , т. е. $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD}} =$ ______



г) Отложим от начала вектора $\overrightarrow{BA}$ вектор $\overrightarrow{BO}$, равный вектору _____ (постройте на рисунке). Угол __________ векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен ____________ ____ угла _____ , т. е. $\widehat{\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{CD}} =$ _____



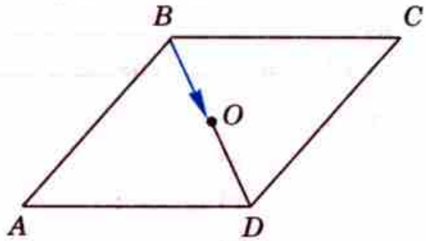


д) Отложим от ____________ вектора $\overrightarrow{BC}$ вектор $\overrightarrow{BM}$, ____________ вектору $\overrightarrow{DA}$ (выполните построение на рисунке). Угол между векторами ______ и $\overrightarrow{DA}$ равен ____________________ угла _____ . Следовательно, $\widehat{\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{DA}}$ = _____

е) Так как векторы $\overrightarrow{AD}$ и ______ сонаправлены, то угол между ними считается равным ______, т. е. $\widehat{\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{BC}}$ = ______

О т в е т.
а) 50°; б) _____ ; ____

50

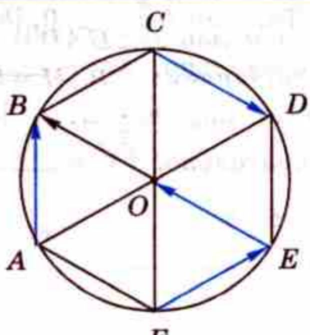


Точка O — середина диагонали BD ромба $ABCD$. Какие векторы с началом и концом в точках A, B, C, D и O перпендикулярны вектору $\overrightarrow{BO}$?

Р е ш е н и е. Диагонали ромба пересекаются и ______________ пересечения делятся ____________________, следовательно, точка O __________ на диагонали AC. Диагонали ромба взаимно __________________________, поэтому $\overrightarrow{BO} \perp$ ______, $\overrightarrow{BO} \perp$ ______, $\overrightarrow{BO} \perp$ ______, $\overrightarrow{BO} \perp$ ______, $\overrightarrow{BO} \perp$ ______, $\overrightarrow{BO} \perp$ ______

О т в е т. $\overrightarrow{AC}$, ______________________

51



Точка O — центр окружности. Центральные углы AOB, BOC, COD, DOE, EOF и FOA равны.

Найдите углы между вектором OB и вектором:

а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{EO}$; г) $\overrightarrow{FE}$.

О т в е т.

____

57

Векторы $\vec{m}\ \{6;\ 3\}$ и $\vec{n}\ \{-0{,}5;\ y\}$ перпендикулярны. Найдите y.

Решение.

По условию задачи $\vec{m} \perp$ ____ , следовательно, $\vec{m}\vec{n} =$ ____ . Но $\vec{m}\vec{n} = 6 \cdot$ ____________ . Поэтому $-3 + 3y = 0$, откуда $y =$ ____

Ответ. __________

58

Вычислите угол между векторами $\vec{p}\ \{2;\ 1\}$ и $\vec{q}\ \{1;\ 3\}$.

Решение.

Используя для ненулевых векторов $\vec{p}\ \{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{q}\ \{x_2;\ y_2\}$ формулу

$$\cos(\widehat{\vec{p}\,\vec{q}}) = \frac{x_1x_2 + \_\_\_\_}{\sqrt{x_1^2 + \_\_\_\_} \cdot \sqrt{\_\_\_\_ + y_2^2}},$$

получаем:

$$\cos(\widehat{\vec{p}\,\vec{q}}) = \frac{2 \cdot 1 + \_\_\_\_}{\sqrt{2^2 + \_\_\_\_} \cdot \sqrt{\_\_\_\_}} = \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_,$$

следовательно, $\widehat{\vec{p}\,\vec{q}} =$ _____

Ответ. _____

59

Верно ли, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняется равенство $(\vec{a}\,\vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,(\vec{b}\,\vec{c})$?

Решение.

Скалярное ________________ двух векторов является числом. Пусть $\vec{a}\,\vec{b} = x$, $\vec{b}\,\vec{c} = y$. Согласно определению, произведение данного вектора на число является ____________ , коллинеарным данному вектору, поэтому $x\vec{c} \parallel \vec{c}$ и $y\vec{a} \parallel$ ____ . Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не коллинеарны и $x \neq 0$, $y \neq 0$, то векторы $x\vec{c}$ и $y\vec{a}$ ________________________ , а следовательно, не могут быть ____________ .

Итак, равенство $(\vec{a}\,\vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\,(\vec{b}\,\vec{c})$ для произвольных трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ______________

Ответ. ______________

Упростите выражение $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}+\vec{c}(\vec{b}-\vec{a})$ и найдите его значение, если $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, $\widehat{\vec{b}\,\vec{c}}=120°$. Укажите, какие свойства скалярного произведения при этом использовались.

Решение.	Обоснование.
Так как $\vec{c}(\vec{b}-\vec{a})=(\vec{b}-\vec{a})$____ , то $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}+\vec{c}(\vec{b}-\vec{a})=$ $=(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}+($______________$)\vec{c}=$ $=((\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}-$____ $))$ ____	______________________________ закон скалярного умножения векторов ______________________________ закон

Используя переместительный и ______________________ законы сложения ______________, получаем: $(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}-\vec{a})=2$____

Следовательно, $((\vec{a}+\vec{b})+($________________$))\vec{c}=$ $=(2$___$)\vec{c}=2($______$)$.	______________________________ закон скалярного ______________ векторов

Но $\vec{b}\,\vec{c}=|$___$|\cdot|$___$|\cdot$_______________ $=$ ______________ $=$ ______

Итак, $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}+\vec{c}(\vec{b}-\vec{a})=$ ___$\vec{b}\,\vec{c}=$ ______

Ответ. ______

Глава XII

Длина окружности и площадь круга

§ 1 Правильные многоугольники

61

Верно ли утверждение:

а) выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны, является правильным;

б) любой четырехугольник с равными углами правильный?

Ответ обоснуйте.

О т в е т.

а) Неверно. Например, ______________________________
____
____

б) ____
____
____

62

Найдите углы правильного n-угольника, если:

а) $n = 9$; б) $n = 12$; в) $n = 36$.

Р е ш е н и е.

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$, а так как по условию n-угольник правильный, то каждый его угол равен $((n - \_\_\_) \cdot \_\_\_\_\_) : n$. Пусть α_n — угол правильного n-угольника, тогда:

а) $\alpha_9 = (9-2) \cdot 180° : 9 =$ __________ = ________

б) $\alpha_{12} =$ ____________ · ____________ = _____ · _____ = ________

в) $\alpha_{36} =$ ____________ · ____________ = ________

О т в е т. а) _______; б) _______; _______

63

Чему равна сумма внешних углов правильного n-угольника, если при каждой вершине взято по одному внешнему углу? (Задача 1082 учебника.)

Решение.

Так как каждый угол правильного n-угольника вычисляется по формуле $\alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{\_\_\_}$, то внешний угол при каждой вершине равен $180° - \alpha_n = 180° -$ __________ = __________________ = = ______ . Поэтому искомая сумма равна _________ $\cdot\, n =$ ______

Ответ. ______

64

Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый его угол равен: а) 120°, б) 175°?

Решение.

Пусть n — число сторон правильного многоугольника. Так как каждый его угол вычисляется по формуле $\alpha_n = \frac{\_\_\_\_\_\_}{n}$, то:

а) $120° = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$, откуда $120°n =$ __________________ ,

______ = ______ , $n =$ ___

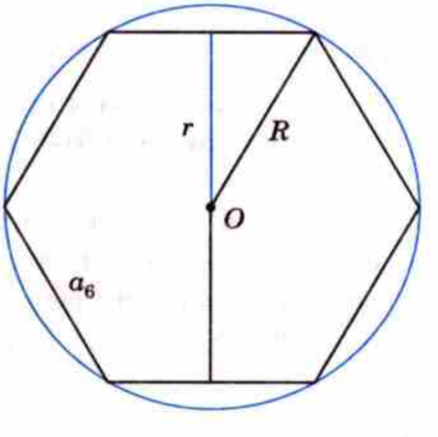
б) 175° = ________________ , ______ = ______________ ,

______ = ______ , $n =$ ____

Ответ. а) ___ ; б) ____

65

На рисунке изображен правильный шестиугольник, вписанный в окружность радиуса R.



Пусть a_6 — сторона правильного шестиугольника, r — радиус вписанной окружности, P — периметр правильного шестиугольника, S — его площадь.

Найдите значения a_6, R, P и S, если $r = 4\sqrt{3}$ см.

Решение. По условию $r = 4\sqrt{3}$ см, поэтому

$R = r : \cos\frac{180^\circ}{\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (см);

$a_6 = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (см); $P = 6 \cdot \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$ (см);

$S = \frac{1}{2}P \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ (см^2).

Ответ. $a_6 = \_\_\_\_$ см; $R = \_\_\_\_$ см; $P = \_\_\_\_$ см; $S = \_\_\_\_\_$ см^2.

66

Периметр квадрата, вписанного в окружность, равен $28\sqrt{2}$ см. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в данную окружность.

Решение. Так как периметр P квадрата равен $28\sqrt{2}$ см, то его сторона $a_4 = \_\_\_\_\_\_$ см и радиус описанной окружности $R = a_4 : \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (см). Следовательно, сторона правильного вписанного треугольника $a_3 = 2R \cdot \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ см.

Ответ. ______ см.

67

Хорда окружности, равная $12\sqrt{2}$ см, стягивает дугу в 90°. Найдите радиус окружности.

Решение.

Пусть a — хорда окружности, стягивающая дугу в 90°, тогда a — сторона ____________, вписанного в эту окружность, и поэтому $a = R \cdot \_\_\_\_$. Отсюда $R = a : \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_ : \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$ (см).

Ответ. _____ см.

68

В окружность вписаны квадрат и правильный треугольник. Площадь квадрата равна Q. Найдите сторону и площадь треугольника.

Решение.

По условию площадь квадрата равна Q, поэтому сторона квадрата $a_4 = \_\_\_\_$ и радиус описанной окружности $R = \sqrt{Q} : \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$

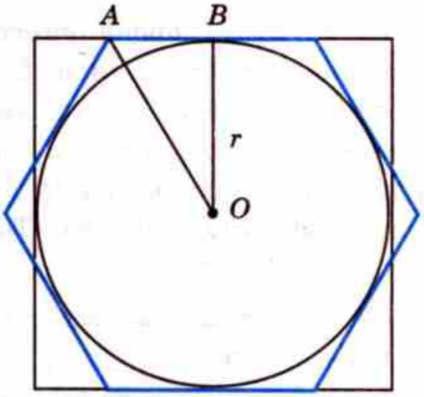
Сторона вписанного треугольника $a_3 = R \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$, а площадь треугольника $S = a_3^2 \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

Ответ. $a_3 = \_\_\_\_\_$; $S = \_\_\_\_\_\_$

69

Около окружности описаны квадрат и правильный шестиугольник. Найдите периметр квадрата, если периметр шестиугольника равен 48 см. (Задача 1092 учебника.)

Р е ш е н и е.



Пусть r — радиус вписанной окружности. Тогда периметр P квадрата равен ______

Из условия задачи следует, что сторона шестиугольника равна ______ см, поэтому в прямоугольном треугольнике AOB, изображенном на рисунке, $OB = r$, $AB =$ ______ см, $OA =$ ______ см, значит, $r = \sqrt{OA^2 - \_\_\_\_\_\_} =$ ______ (см) и $P =$ ______ см.

О т в е т. ______ см.

70

Найдите площадь S правильного n-угольника, если:

а) $n = 4$, $R = 3\sqrt{2}$ см; **б) $n = 3$, $P = 24$ см;**

в) $n = 6$, $r = 9$ см; **г) $n = 8$, $r = 5\sqrt{3}$ см.**

(Задача 1094 учебника.)

Р е ш е н и е.

По формулам п. 108 учебника находим:

а) $n = 4$, $a_4 = R \cdot$ ______ $=$ ______ $\cdot$ ______ $=$ ______ (см), $r = R \cdot \cos$ ______ $=$ $=$ ______ $\cdot$ ______ $=$ ______ (см), $S = \frac{1}{2}P \cdot$ ______ $=$ ______ $=$ ______ (см²);

б) $n = 3$, $a_3 =$ ______ см, $R = a_3 : 2\sin$ ______ $=$ ______ $=$ ______ (см), $r = R \cdot \cos$ ______ $=$ ______ (см), $S = \frac{1}{2}P \cdot$ ______ $=$ ______ $=$ ______ (см²);

в) $n = 6$, $r = R \cdot \cos$ ______ $=$ ______ $\cdot$ ______, поэтому $R =$ ______ см, $a_6 =$ ______ $=$ ______ см, $S = \frac{1}{2} \cdot$ ______ $\cdot$ ______ $=$ ______ (см²);

г) $n = 8$, $r = R \cdot \cos$ ______, $a = 2R \cdot \sin$ ______ $= 2r \cdot$ ______ $=$ $=$ ______ (см), $S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot$ ______ $=$ ______ $\approx$ ______ (см²).

О т в е т.

а) ______ см²; б) ______ см²; в) ______ см²; г) $\approx$ ______ см².

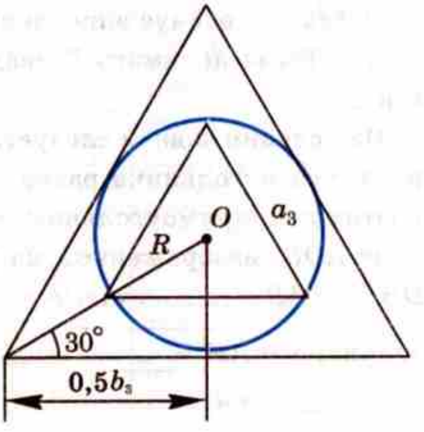
71

В окружность вписан правильный треугольник и около окружности описан правильный треугольник. Найдите отношение площадей этих треугольников.

Решение.

Пусть a_3 — сторона вписанного в окружность треугольника, R — радиус этой окружности, b_3 — сторона описанного треугольника, S — площадь вписанного треугольника, Q — площадь описанного треугольника. Тогда $a_3 = R \cdot$ ____, а $S = a_3^2 \cdot$ ____ $=$ ____ $\cdot R^2$; $0{,}5\ b_3 = R : \text{tg}$____, откуда $b_3 =$ ____ R.

Поэтому $Q = b_3^2 \cdot$ ____ $=$ ______ $=$ ____ R^2. Отсюда получаем $S : Q =$ ________ : ______ $=$ ____



Ответ. ____

§ 2 Длина окружности и площадь круга

72

Найдите длину окружности, описанной около:

а) правильного треугольника со стороной $12\sqrt{3}$ см;

б) прямоугольника, меньшая сторона которого равна 8 см, а угол между диагоналями равен α;

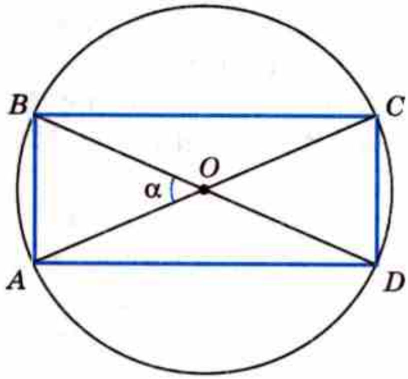
в) правильного треугольника, площадь которого равна $48\sqrt{3}$ см².

Решение.

Пусть R — радиус окружности, описанной около данного многоугольника, C — длина этой окружности, a — сторона данного правильного треугольника.

а) Так как $R = a :$ ____, а $C = 2\pi \cdot$ ____, то $C = 2\pi \cdot$ ____ $=$
$=$ ____ $\cdot$ _____ $=$ _____ (см).

б) На рисунке $ABCD$ — данный прямоугольник, у которого $AB = 8$ см, а $\angle AOB = \alpha$. В прямоугольном треугольнике ABD $\angle A = 90°$, $\angle ADB =$ $=$ ______ (угол ADB — вписанный и опирается на дугу AB, центральный угол которой равен α), гипотенуза $BD =$ $=$ _____ , поэтому $2R =$ ____________ см и $C =$ ________ $=$ ______________ (см).



в) Так как площадь правильного треугольника со стороной a можно вычислить по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, то из уравнения ______ $=$ ________ находим $a =$ ________ $=$ ________ (см). Следовательно, $R = a :$ ____ $=$ $=$ ____ (см) и $C =$ ________ (см).

Ответ.

а) ________ см; б) ________ см; в) ________ см.

73

Найдите длину окружности, вписанной:

а) в равносторонний треугольник со стороной a;

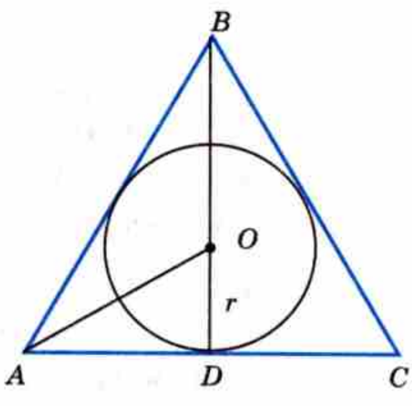
б) в равнобедренный треугольник с углом 2α при вершине и боковой стороной a;

в) в прямоугольный треугольник с острым углом α и противолежащим катетом a.

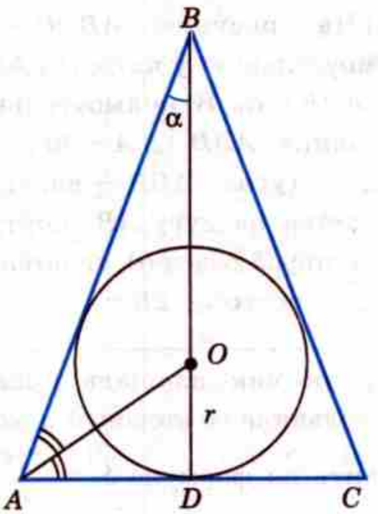
Решение.

а) На рисунке окружность с центром O и радиусом r вписана в равносторонний треугольник ABC со стороной $AB = a$.

В прямоугольном треугольнике ADO катет $OD = r$, катет $AD = \frac{1}{2}$ ______ , а $\angle OAD =$ _____ , и следовательно, $r = AD \cdot$ ________ $=$ __________ $=$ ______ и $C =$ ______ $=$ ________ $=$ ______



б) На рисунке окружность с центром O и радиусом r вписана в равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = a$ и $\angle B = 2\alpha$.

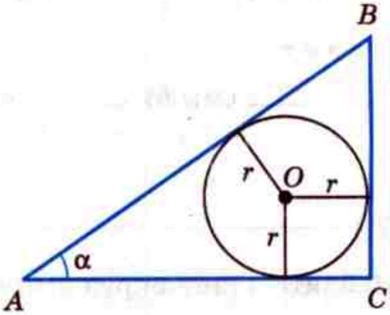


1) В ________________ треугольнике ABD с $\angle D = 90°$ $AB = a$, а $\angle ABD = \alpha$, поэтому $AD =$ ________

2) В ________________ треугольнике AOD с прямым углом D $\angle OAD = \frac{1}{2}\angle$ _____ $= \frac{1}{2}(90° -$ ___$)$, поэтому $r = AD \cdot$ __________ = ______________

Отсюда $C =$ _____ = ________________

в) На рисунке окружность с центром O и радиусом r вписана в треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $BC = a$. Поэтому $AC = a :$ ____ , $AB = a :$ _______ . $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC =$ = ____________ = ________



С другой стороны, $S_{ABC} = \frac{1}{2}P \cdot r = \frac{1}{2}$ ____________________________ $\cdot r =$ $= \frac{a(\qquad\qquad)}{2\sin\alpha} \cdot r.$

Таким образом, $\frac{a^2\cos\alpha}{2\sin\alpha} =$ ______________________ $\cdot r$, откуда $r =$ ______________ и $C =$ ________ = ______________

Ответ. а) _____ ; б) ______________________ ; в) ____________

74

Найдите длину дуги окружности радиуса 6 см, если ее градусная мера равна: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°. (Задача 1109 учебника.)

Решение. Воспользуемся формулой п. 110 учебника для вычисления дуги окружности: $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$.

а) $l = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 30}{180} = \pi$ (см); б) $l =$ ____________ = _______ (см);
в) $l =$ ___________ = _____ (см); г) $l =$ ___________ = _____ (см).

Ответ. а) π см; б) ______ см; в) _____ см; г) _____ см.

75

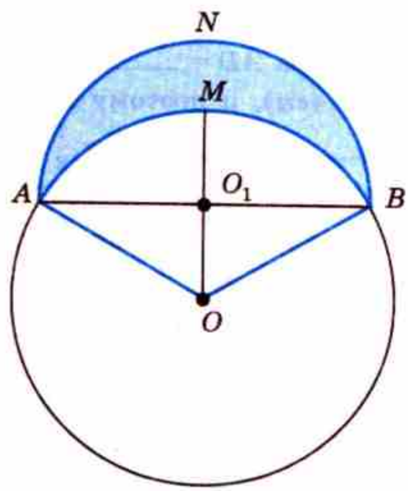
Длина окружности, описанной около правильного треугольника, равна 18π см. Найдите периметр этого треугольника.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой для вычисления длины окружности $C =$ _____ и найдем радиус R этой окружности. Так как по условию $C = 18\pi$ см, то $R = 18\pi :$ _____ $=$ ____ (см), $a_3 = R$ _____ $=$ $=$ _______ (см), и $P =$ _______ $=$ _______ (см).

О т в е т. _______ см.

76

Найдите периметр закрашенной на рисунке лунки, если радиус окружности с центром в точке O равен R, радиус окружности с центром в точке O_1 равен $\frac{1}{2}AB$, а $\smile AMB = 120°$.



Р е ш е н и е. Так как $\smile AMB = 120°$, то длина дуги $l = \frac{\pi R}{180} \cdot$ _____ $=$ _____ Хорда AB стягивает дугу AMB окружности с центром O в $120°$, поэтому $AB = a_3 =$ _____ , а радиус r окружности с центром O_1 равен $\frac{1}{2} \cdot$ _____ $=$ $=$ _____ , и длина m дуги ANB равна половине длины этой окружности, т. е. $m = \frac{1}{2} \cdot$ _____ $=$ ____ $=$ _______

Теперь найдем периметр C лунки: $C = l + m =$ _____ $+$ _____ $= \frac{\pi R}{6} \cdot$ _______

О т в е т. ___________________________

77

Длина окружности радиуса 15 см равна длине дуги, центральный угол которой равен $150°$. Найдите радиус дуги.

Р е ш е н и е. Длина данной окружности равна ______ $\cdot\ 15 =$ $=$ ______ (см). По условию длина этой окружности равна длине l дуги искомого радиуса R, центральный угол α которой равен $150°$. Используя формулу $l = \frac{\pi R \alpha}{180}$, получаем $R = l \cdot$ ________ $=$ $=$ ____________________ $=$ _____ (см).

О т в е т. _____ см.

2) Прямоугольные треугольники ABO и ACO равны по гипотенузе и катету (AO — общая ______________, OB = ______ = R), поэтому $\angle BOA = \angle$ ______ = $\frac{1}{2}$______ = ______, $\angle BAO = \angle$ ______ = ______

Катет, лежащий против угла в $30°$, равен половине ______________,
значит, $AO = 2 \cdot$ ______ = ______, и аналогично, $AO_1 = 2 \cdot$ ______ = ______

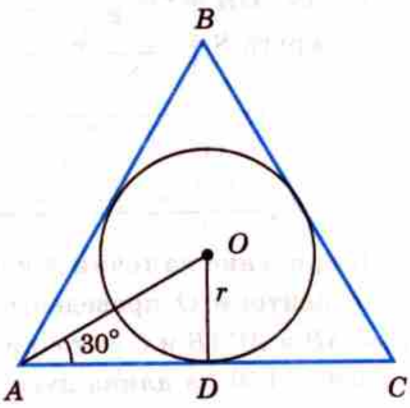
3) $AO = AO_1 + O_1M +$ ______, т. е. $2R$ = ___ + ___ + ___, ___r = ___, r = ___ = ___ (см), а длина окружности равна $2\pi \cdot$ ___ = ____ (см).

Ответ. ______ см.

81

Площадь правильного треугольника больше площади вписанного в него круга на $15\sqrt{3} - 5\pi$. Найдите радиус круга.

Решение. Пусть окружность радиуса r вписана в треугольник ABC. Тогда $AC = 2AD = 2r$: ______ = ______,
полупериметр треугольника p = ____r,
$S_{ABC} = p \cdot$ ___ = ________, $S_{\text{круга}} = \pi \cdot$ ___
По условию $S_{ABC} - S_{\text{круга}} = 15\sqrt{3} - 5\pi$,
поэтому ____________ $= 15\sqrt{3} - 5\pi$, т. е.
$r^2 \cdot$ ____________ $= 5\ (3\sqrt{3} - \pi)$, откуда
r^2 = ____, а r = _____

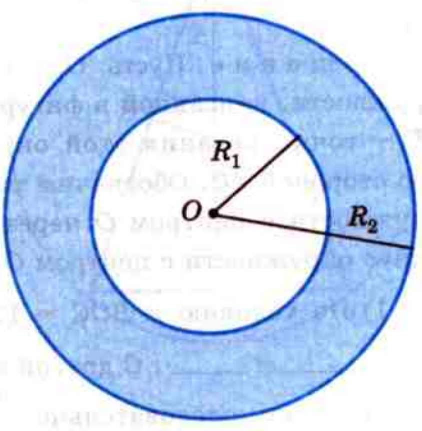


Ответ. ____

82

Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром и радиусами R_1 и R_2, $R_1 < R_2$. Вычислите площадь, если $R_1 = 1{,}5$ см, $R_2 = 2{,}5$ см. (Задача 1120 учебника.)

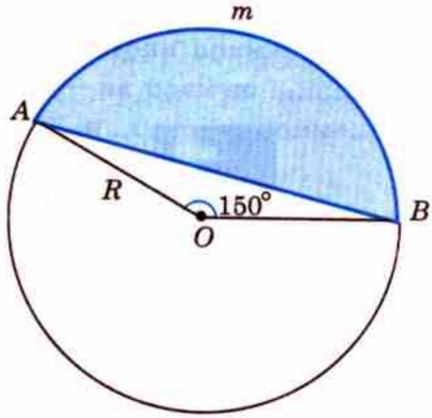
Решение. Искомая площадь кольца S = ____________ – ____________ =
$= \pi$ ______________. Если $R_1 = 1{,}5$ см, $R_2 = 2{,}5$ см, то S = ______________ см² =
= _____ см².



Ответ. _____ см².

83

На рисунке дуга AmB равна $150°$, а радиус R равен 2 см. Найдите площадь закрашенного сегмента.



Р е ш е н и е. Пусть S — площадь сегмента AmB, S_1 — площадь сектора $OAmB$, S_2 — площадь треугольника AOB, тогда $S =$ ______ − ______

1) $S_1 = \frac{\pi R^2}{360} \cdot$ ____ = ____ $\cdot R^2 =$ ____ (см²).

2) $S_2 = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot$ ________ = ____ $R^2 =$ = ____ (см²).

3) $S =$ ____ − ____ = ____________ см².

О т в е т. ____________ см².

84

Площадь сектора с центральным углом $72°$ равна S. Найдите радиус сектора. (Задача 1127 учебника.)

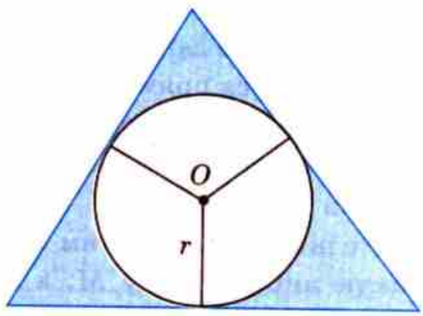
Р е ш е н и е. Пусть R — радиус окружности. Тогда $S =$ = ________ · ____ , откуда $R^2 =$ _________ = ____ и $R =$ _______

О т в е т. _______

85

В треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см вписана окружность. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Р е ш е н и е. Площадь S треугольника можно найти по формуле Герона $S = \sqrt{p \cdot \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}} =$ = ____________ = _____ (см²).



С другой стороны, $S = p \cdot$ _____ , где полупериметр $p =$ _____ см, поэтому $r =$ = ___ см, а площадь круга $S_1 =$ ______ = = ______ (см²). Теперь можно найти площадь закрашенной фигуры $S_Ф =$ $= S - S_1 =$ _____ − ________ (см²).

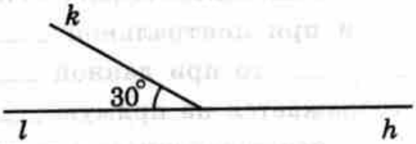
О т в е т. ___________ см².

90

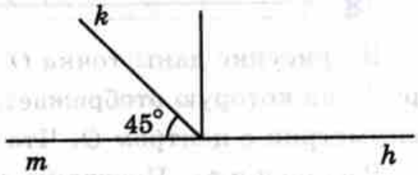
Даны отрезок MN и точка O. Постройте отрезок M_1N_1, который получается из данного отрезка MN поворотом вокруг данного центра O:

а) на угол 150° по часовой стрелке;

б) на угол 135° против часовой стрелки.



а)



б)

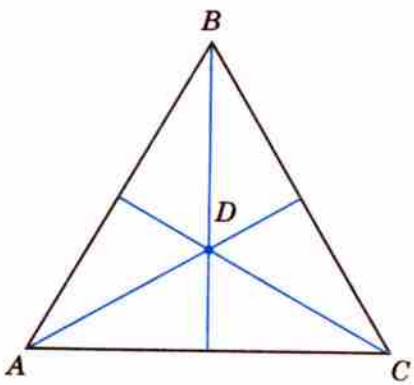
Р е ш е н и е.

а) Построим сначала угол hk, равный 150°. Таким углом является, например, угол, смежный с ________. Затем от луча OM отложим угол MOK, равный построенному ______ hk, так, чтобы поворот от луча OM к лучу OK на 150° осуществлялся по часовой ____________, и отметим на луче OK ________ M_1 так, что $OM_1 = OM$. Аналогично построим угол NON_1, причем $ON_1 =$ _____. Так как поворот является движением, то отрезок отображается на ______________________________. Следовательно, отрезок __________ — искомый.

б) Построим сначала угол hk, равный 135°. Таким углом является, например, угол, смежный с ______________. Затем от луча OM отложим _______ MOM_1, равный построенному углу _____, так, чтобы _______________ от луча OM к лучу OM_1 на 135° осуществлялся ______________________________ стрелки, причем $OM_1 = OM$. Аналогично построим угол _________, где _____ = _____. Так как при движении, в частности при повороте, отрезок отображается на ______________________ ________________, то отрезок ________ — искомый.

91

На рисунке точка D является точкой пересечения биссектрис равностороннего треугольника ABC. Докажите, что при повороте вокруг точки D на угол 120° треугольник ABC отображается на себя. (Задача 1168 учебника.)

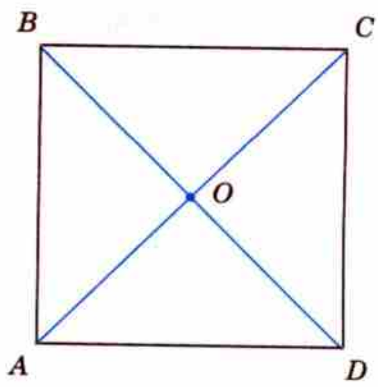


Р е ш е н и е.

Рассмотрим, например, поворот по часовой стрелке. Каждый из углов A и B треугольника ABD равен $\frac{1}{2} \cdot$ ____ = ____ . Следовательно, DA = ____ и $\angle ADB$ = ____ . Поэтому при повороте вокруг точки D на угол 120° по часовой стрелке вершина A отображается в вершину ___ . По аналогичной причине вершина B отображается в вершину ___ , а вершина C — в вершину ___ . Следовательно, треугольник ABC отображается на ________________ ABC, т. е. на себя.

92

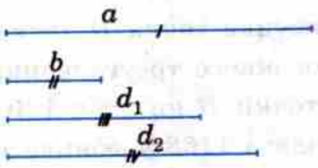
Докажите, что при повороте квадрата вокруг точки пересечения его диагоналей на угол 90° квадрат отображается на себя. (Задача 1169 учебника.)



Р е ш е н и е.

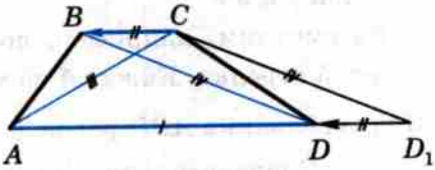
Диагонали квадрата равны, взаимно ______________________ и делятся точкой пересечения ________________ Следовательно, при повороте вокруг точки O пересечения диагоналей на ______ 90° каждая из вершин квадрата $ABCD$ отображается в соседнюю __________ этого квадрата, а значит, квадрат отображается на ________

93



Используя параллельный перенос, постройте трапецию по ее основаниям и диагоналям. (Задача 1182 учебника.)

Р е ш е н и е.



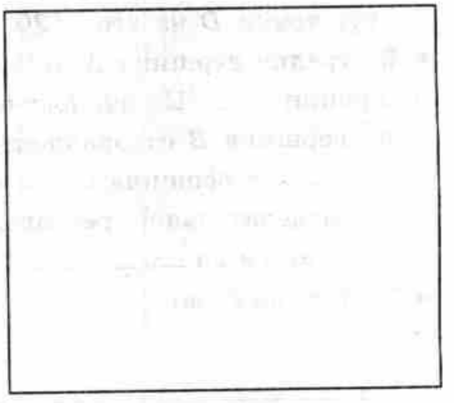
Пусть требуется построить трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, равными данным отрезкам a и b, и диагоналями AC и ____, равными данным ____________ d_1 и d_2.

1) Построим сначала отрезок AD, равный отрезку a.

2) На луче AD от точки D отложим отрезок DD_1, равный ____________ b.

3) Построим треугольник ACD_1, стороны AC и CD_1 которого равны данным отрезкам d_1 и d_2.

4) Построим точку B, в которую отображается точка C при параллельном ____________ на вектор $\overrightarrow{D_1D}$.



Выполните указанные построения самостоятельно.

Четырехугольник $ABCD$ — искомая трапеция.

В самом деле, стороны AD и BC этого четырехугольника параллельны и ____________ данным отрезкам ____ и ____ , диагональ AC равна отрезку ____ , а диагональ BD получается из отрезка CD_1 параллельным ____________ на вектор ____ . Поэтому $BD =$ ____ , т. е. диагональ BD равна данному отрезку ____

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебно-методический комплект по геометрии для 7 – 9 классов:

В. Ф. Бутузов
РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
к учебнику Л. С. Атанасяна и др.

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина
УЧЕБНИК

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, И. И. Юдина
РАБОЧИЕ ТЕТРАДИ

Б. Г. Зив, В. М. Мейлер
ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

М. А. Иченская
САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Т. М. Мищенко, А. Д. Блинков
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, В. Б. Некрасов, И. И. Юдина
ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ
в 7 – 9 классах

Б. Г. Зив, В. М. Мейлер, А. Г. Баханский
ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ
для 7 – 11 классов

ISBN 978-5-09-030984-4
9 785090 309844

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО