Алгебра

Рабочая тетрадь

9

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Алгебра

Рабочая тетрадь

9 класс

Пособие для учащихся общеобразовательных учреждений

6-е издание, доработанное

Москва
«Просвещение»
2012

Предисловие

Данная рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Алгебра, 9» авторов Ш. А. Алимова и др. Содержание тетради организовано в соответствии с главами и параграфами этого учебника.

Тетрадь предназначена в основном для работы учащихся в классе. Следует иметь в виду, что рабочая тетрадь **не заменяет** ни живого слова учителя, ни текста учебника. Она дополняет и то и другое, расширяя арсенал учебных средств учащихся и возможности работы учителя. Структурно материал каждого параграфа тетради расположен по **трём** разделам. После I раздела, который предназначен для подготовки школьников к изучению нового материала соответствующего параграфа книги, проведена черта. Эта черта означает, что после выполнения заданий I раздела учитель приступает к объяснению нового материала так, как он считает нужным. Проведя объяснение, учитель работает с учащимися над упражнениями учебника; при этом ученики записывают решение традиционно в обычной тетради.

Раздел II — это основной раздел в рабочей тетради, он содержит упражнения, дополнительные к упражнениям учебника. Некоторые из упражнений тетради являются подготовительными к выполнению упражнений учебника, некоторые помогают слабым учащимся в усвоении определённых алгоритмов благодаря увеличению от задания к заданию доли самостоятельной работы школьников. Наиболее трудные упражнения раздела отмечены знаком *.

В разделе III приведены тексты упражнений, позволяющих проверить уровень усвоения материала рассматриваемого параграфа. Учитель может выборочно использовать их для проверки качества домашней работы учащихся.

ГЛАВА I

Алгебраические уравнения. Системы нелинейных уравнений

§ 1. Деление многочленов

I

1 Выполнить деление чисел уголком, результат проверить умножением:

1) $462 : 14 =$ ....

$$\begin{array}{r|l} -\,462 & 14 \\ \underline{42} & \overline{3\ldots} \\ \ldots & \end{array}$$

2) $1776 : 37 =$ ....

2 Записать в виде неправильной дроби число:

1) $14\frac{5}{6} = 14 + \frac{5}{6} = \frac{84 + \ldots}{6} =$ ....

2) $15\frac{3}{8} =$ ....

3 Выполнив деление уголком, записать число в виде суммы целого числа и правильной дроби, результат проверить сложением:

1) $\frac{223}{9} =$ ....

$$\begin{array}{r|l} -\,223 & 9 \\ \underline{18} & \overline{24} \\ -\,43 & \\ \underline{36} & \\ 7 & \end{array}$$

.... | $24 + \frac{7}{9} = \frac{216 + \ldots}{9} =$ ....

....

2) $\frac{337}{8}=$ ....

4 Сократить дробь:

1) $\frac{3x^4-5x^2+x}{3x^3-5x+1}=$ ....

2) $\frac{x^2-2x+1}{x-1}=$ ....

3) $\frac{2x^2+5x-3}{x+3}=$ ....

5 Выполнить деление многочлена на одночлен:

1) $(4x^6-8x^4+10x^2):2x^2=$ ....

2) $(5x^5+3x^4-x^3+2x^2):\frac{1}{2}x^2=$ ....

(II)

6 Выполнить деление многочленов уголком, результат проверить умножением:

1)
$$\begin{array}{r|l} -\,3x^3-5x^2-6x+8 & 3x^2+x-4 \\ \cline{2-2} \underline{3x^3+x^2-4x} & x-2 \\ -6x^2-2x+8 & \\ -6x^2\ldots\ldots & \end{array}$$

$(3x^2+x-4)(x-2)=$ ....

2)
$$\begin{array}{r|l} 2x^4-x^3-7x^2+2x+6 & x^2-2 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

7 Найти частное и остаток при делении многочленов, результат проверить по формуле деления:

1) $$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^3+2x^2-3 \\ x^3+3x^2 \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^2+3x} \\ x\ldots\ldots \end{array} \end{array}$$

2) $$4x^4-6x^3+3x^2+8x \mid \underline{2x^3+4}$$

8 Выяснить, при каком значении a выполняется деление многочленов нацело:

1) $$6x^3+3x^2+a \mid \underline{2x+1}$$

Ответ. $a=$ ....

2) $$4x^4-4x^2+a-3 \mid \underline{x^2-1}$$

Ответ. $a=$ ....

9 Найти такой многочлен $Q(x)$, чтобы при делении многочлена x^3-2x^2+4x на $Q(x)$ частное было равно $x-2$ и остаток был равен $x+6$.

По формуле деления $x^3-2x^2+4x=$ ....,

откуда ....

Ответ. $Q(x)=$ ....

III

10 Написать формулу деления многочленов:

1) $x^3 - 3x^2 - 5x + 15 \;\big|\; x^2 - 5$

Ответ. $x^3 - 3x^2 - 5x + 15 =$ ...

2) $2x^4 + x^2 - 6 \;\big|\; 2x^2 - 3$

Ответ. $2x^4 + x^2 - 6 =$ ...

3) $3x^4 + 2x^2 - 1 \;\big|\; x^2 + 2$

Ответ. $3x^4 + 2x^2 - 1 =$ ...

4) $2x^5 - x^3 - x + 3 \;\big|\; 2x^3 - 3x$

Ответ. $2x^5 - x^3 - x + 3 =$ ...

§ 2. Решение алгебраических уравнений

I

1 Решить уравнение:

1) $3x^2+5x-2=0$,

2) $x^4-8x^2-9=0$,

2 Разложить на множители многочлен:

1) $2x^3-5x^2-3x$

2) x^4+3x^2-4

3 Выполнить деление многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$, если:

1) $P(x)=x^4-5x^2+3x-2$,
$Q(x)=x-2$.

2) $P(x)=x^4-3x^3+6x^2-3x+5$,
$Q(x)=x^2-3x+5$.

II

4 Найти целые корни многочлена $P(x)$, если:

$$P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2.$$

Делителями числа -2 являются числа $1, -1, 2, -2$, проверяем: $P(1) = 0$, $P(-1) = -4 \neq 0$, $P(2) = 20 \neq 0$, $P(-2) = 0$.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

1) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$. ....

....

2) $P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$. ....

....

Ответ. ....

5 Используя результат упражнения 4, разложить на множители многочлен $P(x)$.

Многочлен $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ делится нацело на многочлен $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$, так как его целыми корнями являются числа 1 и -2 (см. упражнение 4).
Разделим многочлен $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ на многочлен $x^2 + x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2} -\underline{x^4 + x^3 - 2x^2} \qquad\qquad & x^2 + 1 \\ x^2 + x - 2 & \\ -\underline{x^2 + x - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

Ответ. $P(x) = (x-1)(x+2)(x^2+1)$.

1) Разделим $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ на многочлен ....

$x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ | ....

....

....

....

Ответ. $P(x) =$ ....

2) Разделим $P(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ на многочлен ....

$x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ | ....

....

....

....

Находим корни уравнения ....

Ответ. $P(x) =$ ....

6 Решить уравнение $P(x) = 0$, если:

1) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$. Находим целый корень: $P(1) =$ $=$ .... $\neq 0$, $P(-1) = 0$, откуда $x_1 = -1$.

Разделим $P(x)$ на $x - x_1$:

$x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ | ....

.... | ....

....

....

....

....

Решая квадратное уравнение ....,

получим $x_{2,3} =$ ...., $x_2 =$ ...., $x_3 =$ ....

Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 =$ ...., $x_3 =$ ....

2) $P(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 24$. Находим два целых корня:

$P(1) =$ .... $\neq 0$. $P(-1) =$ ...., $P(2) =$ ...., $P(-2) =$ ....,

откуда $x_1 =$ ...., $x_2 =$ ....

Сведём решение уравнения $P(x) = 0$ к решению квадратного уравнения делением $P(x)$ на многочлен $(x - x_1)(x - x_2) =$ $=$ ....:

$x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 24$ | ....

.... | ....

....

....

....

....

Решая квадратное уравнение ....,

....

получим $x_{3,4} =$ ...., $x_3 = x_1 =$ ...., $x_4 =$ ....

Ответ. $x_1 =$ ...., $x_2 =$ ...., $x_3 =$ ....

7 Найти действительные корни уравнения $P(x)=0$, если:

$P(x)=x^3-x^2-x-2$. Находим целый корень ....

$P(-1)=$ ...., $P(2)=$ ...., откуда $x_1=$ ....

Выполняем деление $P(x)$ на $x-$

x^3-x^2-x-2 | ....

.... | ....

....

....

....

....

Уравнение .... действительных корней не имеет.

Ответ. $x=$ ....

8 Сократить дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, если: $P(x)=x^3-x+6$, $Q(x)=x^3-3x^2+$ $+5x-3$.

Находим целый корень числителя: $P(1)=$ ...., $P(-1)=$ ....,

$P(2)=$ ...., $P(-2)=$ ...., $x_1=$ ....

Выполняем деление $P(x)$ на $x-x_1$:

x^3-x+6 | ....

.... | ....

....

....

$P(x)=$ ....

Находим целый корень знаменателя: $Q(1)=$ ...., $x_1=$ ....

Выполняем деление $Q(x)$ на $x-x_1$:

x^3-3x^2+5x-3 | ....

.... | ....

....

....

....

$Q(x)=$ ....

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}=$ ....

9 Разложить на множители многочлен $P(x)$ и найти его действительные корни, если $P(x)=x^3-2x-4$. Находим целый корень: $P(1)=$..........., $P(-1)=$.........., $P(2)=$.........., $x_1=$..........;

разделим $P(x)$ на $x-x_1=$.........:

x^3-2x-4 | ....

.... | ....

....

....

....

....

Уравнение .... не имеет действительных корней.

Ответ. $P(x)=$.., $x=$..........

10 Решить уравнение $P(x)=0$, если:

1) $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$. Находим целый корень: $P(1)=$ = ..., $x_1=$..........; разделим $P(x)$ на $x-x_1=$...........:

$x^3-6x^2+11x-6$ | ....

.... | ....

....

....

....

....

Решая уравнение ....,

....

получим $x_2=$........, $x_3=$........ .

Ответ. $x_1=$.........., $x_2=$.........., $x_3=$.......... .

2) $P(x)=x^4+x^3-7x^2-13x-6$. Находим два целых корня: $P(1)=$.........., $P(-1)=$.........., $P(2)=$.........., $P(-2)=$..........,

$x_1=$.........., $x_2=$..........; разделим $P(x)$ на многочлен $(x-x_1)(x-x_2)=$..............................:

$x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6$ | ....

.... | ....

....

....

....

....

....

....

Решая уравнение .... ,

....

находим $x =$ .... или $x =$ ....

Ответ. $x_1 =$ ...., $x_2 =$ ...., $x_3 =$ ....

§ 3. Уравнения, сводящиеся к алгебраическим

I

1 Свести к квадратному и решить уравнение:

1) $x(2x + 7) = 2(x + 1) - x^2$,

....

....

....

....

Ответ. ....

2) $x(3x - 7) + 1 = 2(x^2 - 3) + x$,

....

....

....

....

Ответ. ....

2 Решить уравнение:

1) $\frac{4}{x+3} - \frac{3}{x-2} = 3$. Умножив уравнение на общий знаменатель дробей, равный $(x + 3)(x - 2)$, получим ....

....

....

При найденных значениях x знаменатели исходного уравнения не обращаются в нуль.

Ответ. $x_1 =$ ...., $x_2 =$ ....

2) $\frac{1}{x(x-1)} + \frac{3}{x} = \frac{2-x}{x-1}$. Умножим уравнение на общий знаменатель дробей ...., получим ....

....

....

При $x_1 =$ .... знаменатели двух дробей исходного уравнения равны нулю, при $x_2 =$ .... знаменатели дробей не равны нулю.

Ответ. $x =$ ....

II

3 Свести к алгебраическому и найти корни уравнения:

1) $(x-1)(x^2-2) = 5 - x(2x-1)$. ....

....

Разложим левую часть полученного уравнения на множители способом группировки: ....

....

2) $x^2(x^2+3) = 6 + x(1-3x^2)$. ....

.... Находим целые корни полученного уравнения, обозначив $P(x)$ его левую часть, и проверяем: $P(1) =$ ...., $P(-1) =$ ...., $P(2) =$ ...., $P(-2) =$ ...., $x_1 =$ ...., $x_2 =$ ....

Разделим $P(x)$ на многочлен $(x-x_1)(x-x_2) =$ ....:

$x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6$ | ....

.... | ....

....

....

....

....

Уравнение .... не имеет действительных корней.

Ответ. $x_1 =$ ...., $x_2 =$ ....

4 Найти действительные корни возвратного уравнения

$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$. Нуль не является корнем уравнения, поэтому уравнение можно разделить на x^2, получив $x^2 - 3x + 2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$. Сделаем замену $x + \dfrac{1}{x} = t$, тогда $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$, $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 2 = 0$, $t^2 - 2 - 3t + 2 = 0$, $t^2 - 3t = 0$; $x + \dfrac{1}{x} = 0$ или $x + \dfrac{1}{x} = 3$. Уравнение $x + \dfrac{1}{x} = 0$ не имеет действительных корней, уравнение $x + \dfrac{1}{x} = 3$, $x^2 - 3x + 1 = 0$ имеет корни $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$.

Ответ. $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

1) $x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$. Нуль не является корнем уравнения, поэтому уравнение можно разделить на x^2, ...
....

Сделаем замену $x - \dfrac{1}{x} = t$, тогда ....
....
....

Ответ. $x_{1,2} =$ ...., $x_{3,4} =$ ....

5 Решить уравнение:

1) $\dfrac{x^2}{2x-3} + \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{2(x+1)}{(x-2)(2x-3)}$. Умножим уравнение на общий знаменатель $(x-2)(2x-3)$ дробей, получим ....
....

Находим целый корень полученного уравнения, в правой части которого записан 0, обозначив $P(x)$ его левую часть: $P(1) =$ ...., $P(-1) =$ ...., $P(2) =$ ...., $P(-2) =$ ...., $x_1 =$ .... Разделим $P(x)$ на $x - x_1$:

x^3-5x-2 | ....
.... | ....
....

....

....

....

Решая уравнение $x^2-2x-1=0$, находим $x_{2,3}=$ .... При найденных значениях x знаменатели исходного уравнения не равны нулю.

Ответ. $x_1=$ ...., $x_{2,3}=$ ....

2) $\frac{x^3}{x-3}+\frac{x^2}{x-1}=\frac{x^2-3}{(x-3)(x-1)}$. Умножим уравнение на общий знаменатель .... дробей: ....

....

Решим полученное уравнение: ....

....

....

....

При $x=$ .... знаменатели двух дробей исходного уравнения равны нулю, т. е. $x=$ .... — посторонний корень.

Ответ. $x_1=$ ...., $x_{2,3}=$ ....

III

6 Решить уравнение:

$x^2(x+2)+2=2x(x+1)+3x$, ...

....

....

....

Преобразовав уравнение ...., находим целый корень, обозначив $P(x)$ его левую часть (правая часть равна 0): $P(1)=$ ...., $P(-1)=$ ...., $P(2)=$ ...., $x_1=$ .... Разделим $P(x)$ на $x-x_1$:

$x^3 - 5x + 2$ | ....

....

....

....

....

....

Находим корни квадратного уравнения .... ;

$x_{2,\,3} =$ ....

Ответ. $x_1 =$ ...., $x_{2,\,3} =$ ....

7 Решить рациональное уравнение:

1) $\dfrac{x^2}{1-x} + \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{11}{(1-x)(x+2)}$. Умножим уравнение на общий знаменатель дробей, получим ....

Находим целый корень полученного уравнения, обозначив $P(x)$ его левую часть: $P(1) =$ ...., $P(-1) =$ ...., $x_1 =$ ....

Разделим $P(x)$ на $x - x_1$:

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ | ....

.... | ....

....

....

....

Решим уравнение ...., получим ....

.... При найденных значениях x знаменатели дробей исходного уравнения не равны нулю.

Ответ. $x_1 =$ ...., $x_2 =$ ...., $x_3 =$ ....

2) $\dfrac{x^3}{x+3} - \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x^2-3}{(x+3)(x+1)}$. Умножим уравнение на общий знаменатель дробей, получим ....

....

Решим полученное уравнение, ...

....

.... При $x=$........ знаменатели двух дробей исходного уравнения равны нулю, т. е. $x=$........ — посторонний корень.

Ответ. $x_1=$......., $x_{2,3}=$......... .

§ 4. Системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными

I

1 Выразить y через x из равенства:

1) $2x+3y=4$, 2) $6x^2-xy-y^2=0$,

....

....

2 Решить систему уравнений $\begin{cases} x+7y+19=0, \\ -4x+3y+17=0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x+7y+19=0, \\ -4x+3y+17=0. \end{cases} \Bigg| \cdot 4$$

$$+\begin{cases} \text{.........................} \\ \text{.........................} \end{cases}$$

...., откуда $y=$............ .

Подставляя это значение в первое уравнение исходной системы, получим $x+7\cdot($........$)+19=0$, откуда $x=$.................... .

Ответ. $x=$..........., $y=$........... .

II

3 Решить способом подстановки систему уравнений:

$\begin{cases} xy=8, \\ x-y=2. \end{cases}$ Из второго уравнения системы, выразив y через x, получим $y=x-2$. Далее $x(x-2)=8$; $x^2-2x-8=0$, $x_1=4$, $y_1=2$, $x_2=-2$, $y_2=-4$.

Ответ. (4; 2), (−2; −4).

1) $\begin{cases} x + y = 0, \\ 2x^2 - 3xy + y^2 = 54. \end{cases}$ Из первого уравнения, выразив y через x, получим $y =$ .... Подставив выражение для y во второе уравнение, получим ....

....

$x^2 =$ ...., $x_1 =$ ...., $y_1 =$ ...., $x_2 =$ ...., $y_2 =$ ....

Ответ. ....

2) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 2, \\ x + y = 7. \end{cases}$ $y =$ ...., $2x^2 -$ .... $= 2$, ...

..............., $x_1 =$ ...., $y_1 =$ ...., $x_2 =$ ...., $y_2 =$ ....

Ответ. ....

4 Способом сложения решить систему уравнений:

$\begin{cases} x + y - 3xy = 7, \\ 2x - y + 3xy = -1. \end{cases}$ Складывая уравнения системы, находим $3x = 6$, откуда $x = 2$. При этом значении x из первого уравнения находим y: $2 + y - 6y = 7$, $5y = -5$, $y = -1$.
Ответ. $(2; -1)$.

1) $\begin{cases} x + 2y - 4xy = 5, \\ 2x + y - 4xy = 8. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, получим ...., откуда $y =$ .... Подставляя это выражение для y в первое уравнение системы, получим ....

....

Ответ. ....

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -2. \end{cases}$ Прибавляя к первому уравнению второе, умноженное на 2, получим $(x + y)^2 =$ ...., откуда $y =$ .... или $y =$ .... Подставляя эти выражения для y во второе уравнение системы, находим ....

....

$x_1 =$ ...., $y_1 =$ ...., $x_2 =$ ...., $y_2 =$ ...., $x_3 =$ ...., $y_3 =$ ...., $x_4 =$ ...., $y_4 =$ ....

Ответ. ....

(III)

5 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} xy = -2, \\ 2x + y = 0, \end{cases}$ ....

...., $x_1 =$ ....,

$y_1 =$ ...., $x_2 =$ ...., $y_2 =$ ....

2) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ x - 2y = 7, \end{cases}$ ....

....

....

Ответ. ....

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, умноженное на 2, получим ....

Если $y =$ ...., то из второго уравнения системы ...., $x_1 =$ ...., $y_1 =$ ....,

$x_2 =$ ...., $y_2 =$ ....; если $y =$ ...., то ....

....

Ответ. ....

§ 5. Различные способы решения систем уравнений

(I)

1 Выяснить, какая из пар чисел (3; 2), (3; –2), (–3; –2) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 - 2y^2 = 19, \\ 2x^2 - y^3 + 3xy = 8. \end{cases}$$

....

....

Ответ. ....

2 Разделить уравнение $8x^3 - y^3 = 6$ на уравнение $2x - y = 3$.

....

Ответ. ....

3 При $x \neq 2y$ выразить x через y из уравнения $\frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = \frac{2y - x}{3}$.

....

....

4 Решить относительно y уравнение $2y^2 + 7ay - 4a^2 = 0$.

....

Ответ. .... или ....

II

5 Решить систему уравнений:

$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -8. \end{cases}$ По теореме, обратной теореме Виета, искомые числа являются корнями уравнения $z^2 - 2z - 8 = 0$, $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 8}$, $z_1 = 4$, $z_2 = -2$.

Ответ. $(4; -2)$, $(-2; 4)$.

1) $\begin{cases} x + y = 6, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}. \end{cases}$ Так как $x \neq 0$, $y \neq 0$, то из второго уравнения, используя первое, получаем .... По теореме, обратной теореме Виета: ....

Ответ. ....

2) $\begin{cases} 2x^2 + 5xy + y^2 = 4, \\ x^2 + 5xy + y^2 = 4. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе, находим $x =$ ...., при этом значении x из первого уравнения находим $y =$ ....

Ответ. ....

3) $\begin{cases} y^3 + 2xy - 4x + 4 = 0, \\ x - y = 1. \end{cases}$ Из второго уравнения находим $x =$ ...., подставляя которое в первое уравнение, получаем

....

....,

откуда $y_1 =$ ...., $y_{2,3} =$ ...., $x_1 =$ ...., $x_{2,3} =$ ....

Ответ. ....

6 Найти действительные решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 3, \\ x^2 + 3xy - y^2 = 3. \end{cases}$ Вычитая из первого уравнения второе,

получаем $y = \pm$ .... При $y =$ .... из первого уравнения системы находим $x_{1,2} =$ ...., $y_{1,2} =$ .... Если $y =$ ....,
то первое уравнение системы не имеет действительных корней.

Ответ. ....

2) $\begin{cases} 2x - y = 2, \\ \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$ При $x \neq 0$, $y \neq 0$ из второго уравнения системы

получаем ....

....

....

Ответ. Действительных решений ....

3) $\begin{cases} x^3 - 4y^2 + 6xy + 5 = 0, \\ x - y = 1. \end{cases}$ Выразим из второго уравнения y через x, получим .... и подставим в первое уравнение

....

....

....

Обозначив $P(x)$ левую часть полученного уравнения, найдём его целые корни: $P(1) =$ ...., $P(-1) =$ ...., $x_1 =$ ....
Разделим $P(x)$ на $x - x_1$:

....

....

....

....

Уравнение .... не имеет действительных корней.

Ответ. ....

7 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ 2x + 2\sqrt{xy} + y = 34. \end{cases}$ Вычтем из второго уравнения первое, возведённое в квадрат (учитывая, что $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$): …

…

…

$x =$ …, $y =$ … .

Ответ. …

2) $\begin{cases} x - 2y = 2, \\ \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$ Из второго уравнения следует, что $\dfrac{x}{y} > 0$.

Обозначим $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = t$, тогда …, $t_1 =$ …,

$t_2 =$ … . Если $t_1 =$ …, то $x =$ …, и из первого уравнения системы находим …

$y_1 =$ …, $x_1 =$ …; если $t_2 =$ …, то …

…, $y_2 =$ …, $x_2 =$ … .

Ответ. …

8 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ \dfrac{1}{2y} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$ …

…

…

…

Ответ. …

2) $\begin{cases} \dfrac{2x + y}{2x - y} = 3, \\ xy = 1. \end{cases}$ …

…

Ответ. …

III

9 Найти действительные решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - 4y = 3, \\ x^2y = 1. \end{cases}$ ....

....

....

Ответ. ....

2) $\begin{cases} x^2y - x^3y = 6, \\ y - xy = 6. \end{cases}$ ....

....

....

....

Ответ. ....

§ 6. Решение задач с помощью систем уравнений

I

1 Записать формулой предложение:

1) удвоенное произведение чисел a и b больше их суммы на единицу ....;

2) сумма кубов чисел x и y в три раза больше их суммы ....

....

2 Составить систему уравнений по условиям задачи:

1) Разность произведения чисел xy и числа x равна нулю, сумма этого произведения и числа y равна 4:

$\begin{cases} \text{..............................} \\ \text{..............................} \end{cases}$

2) Сумма натуральных чисел x и y равна 4, а сумма обратных к ним чисел равна $\frac{4}{3}$:

$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$

(II)

3 Решить систему уравнений, полученную в задании 2.

1) ……………………………………………………………………

$x_1 =$ …………, $y_1 =$ …………, $x_2 =$ …………, $y_2 =$ …………

2) ……………………………………………………………………

$x_1 =$ …………, $y_1 =$ …………, $x_2 =$ …………, $y_2 =$ ………….

4 Бассейн может наполняться водой из двух кранов. Если первый кран будет открыт в течение 10 мин, а второй — в течение 20 мин, то бассейн будет наполнен целиком. Если первый кран будет открыт в течение 5 мин, а второй — в течение 15 мин, то заполнится $\frac{3}{5}$ бассейна. Сколько времени нужно для наполнения бассейна каждым краном в отдельности?

Решение. Введём обозначения: V — объём ……………………, x — часть V, заполняемая первым краном за 1 мин, y — ……………………………………, тогда $\frac{V}{x} =$ ……………………,

$\frac{V}{y} =$ ………………. По условию задачи $\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

Ответ. ………… мин.

5 Расстояние между пристанями A и B равно 60 км. Катер на один рейс от A до B и обратно тратит 5 ч. На путь от A до B по течению реки катер тратит на 1 ч меньше, чем от B до A. Найти собственную скорость катера и скорость течения реки.

Решение. Пусть x км/ч — собственная ....,

y км/ч — ...., тогда время движения катера по течению ...., а против течения ....

По условию задачи составим систему $\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

....

....

....,

находим $x =$ ...., $y =$ ....

Ответ. .... км/ч, ... км/ч.

(III)

6 Сумма двух чисел равна 5, а произведение этих чисел больше их разности на 5. Найти эти числа.

Решение. Пусть x, y — .... По условию задачи составим систему $\begin{cases} x + y = 5, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ решим её способом подстановки: ....

....

Ответ. ....

7 Один катет прямоугольного треугольника на 2 см больше другого, гипотенуза треугольника равна 10 см. Найти катеты.

Решение. Пусть x, y — катеты, $x > y$. По условию задачи и теореме Пифагора составим систему $\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$

....

.... Так как $y > 0$, то $y =$ ...., $x =$ ....

Ответ. ....

Степень с рациональным показателем

§ 7. Степень с целым показателем

I

1 Вычислить:

1) $3^3 =$ ....; 2) $(-7)^3 =$ ....;

3) $10^6 =$ ....; 4) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 =$ ....;

5) $\left(-\frac{3}{5}\right)^4 =$ ....; 6) $\left(1\frac{2}{3}\right)^5 =$ ....;

7) $\left(-2\frac{1}{3}\right)^4 =$ ....; 8) $(0{,}1)^6 =$ ....;

9) $1^{101} =$ ....; 10) $0^{10} =$ ....

2 Заполнить пропуски:

1) если $x = 7$, то $x^4 =$ ...., $(-x)^4 =$ ...., $-x^4 =$ ....;

2) если $x = 5$, то $x^3 =$ ...., $(-x)^3 =$ ...., $-x^3 =$ ....;

3) если $x = -3$, то $x^4 =$ ...., $(-x)^4 =$ ...., $-x^4 =$ ....;

4) если $x = -3$, то $x^3 =$ ...., $(-x)^3 =$ ...., $-x^3 =$ ....

3 Сравнить с нулём:

1) $(0{,}01)^{43}$ ☐ 0; 2) $(-0{,}1)^{43}$ ☐ 0.

4 Сравнить с единицей:

1) $(3{,}07)^{101}$ ☐ 1; 2) $(0{,}307)^{101}$ ☐ 1.

5 Заполнить пустые клетки так, чтобы равенство было верным:

1) $2^{☐} = 8$; 2) $3^{☐} = 81$; 3) $(-4)^{☐} = 256$; 4) $(-5)^{☐} = -125$.

6 Сравнить числа, заполнив пустые клетки знаком > или <.

1) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ ☐ $\left(\frac{3}{4}\right)^3$; 2) $\left(-\frac{2}{5}\right)^5$ ☐ $\left(-\frac{2}{5}\right)^6$;

3) $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ ☐ $\left(\frac{4}{3}\right)^2$; 4) $(-0{,}2)^3$ ☐ $(-0{,}1)^2$.

7 Записать в стандартном виде числа:

1) $3451{,}2 = 3{,}4512 \cdot 10^{\square}$; 2) $423{,}7 =$ ………………………;

3) $0{,}021 = 2{,}1 \cdot 10^{\square}$; 4) $0{,}0055 =$ ……………………….

8 Заполнить пустые клетки так, чтобы равенства были верными:

1) $x^5 \cdot x^{\square} = x^{18}$; 2) $x^{17} : x^{\square} = x^4$;

3) $(x^5)^{\square} = x^{35}$; 4) $x^{\square} \cdot y^{\square} = (xy)^5$.

9 Вписать в скобки делители так, чтобы выполнялось равенство

$$x^{15} : (\text{…………}) \cdot x^2 : (\text{…………}) = x^{12}.$$

10 В клетки вписать знаки арифметических действий, которые приведут к данному результату:

$$a^2 \ \square \ a^6 \ \square \ a^3 \ \square \ a^4 = a^9.$$

11 Вписать пропущенный одночлен стандартного вида:

1) ………………………$\cdot (2x^2y^3) = 8x^4y^5$;

2) $\left(\dfrac{1}{3}a^5m^2n\right) \cdot$ ………………………$= -a^6m^2n^3$.

12 Записать в виде степени с натуральным показателем:

1) $\dfrac{7^8 \cdot 7^3}{7^{13}} = \square^2$; 2)* $\dfrac{3^4 \cdot 2^{\square}}{2 \cdot 6^6} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^{\square}$.

II

13 Записать в пустую клетку показатель степени так, чтобы равенство было верным:

1) $\dfrac{1}{2^4} = 2^{\square}$; 2) $\dfrac{1}{3^{\square}} = 3^{-5}$; 3) $\dfrac{1}{8} = 2^{\square}$; 4) $\dfrac{1}{9^2} = 3^{\square}$.

14 Даны числа

16^{-1}; $0{,}1^{-2}$; $0{,}001^{-3}$; $1{,}3^{-2}$; $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}$; 2^{-7}; $1{,}0001^{-1}$; 75^0.

Подчеркнуть те из них, которые меньше 1.

15 Заполнить пустые клетки так, чтобы равенство было верным:

1) $\dfrac{3}{x^{\square}y} = 3x^{-3}y^{\square}$; 2) $(a+b)^{\square} = \dfrac{1}{\square^2}$;

3) $\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^{\square}}=\square^{-3}+y^{-2}$; 4) $\dfrac{a^3}{b^{\square}\square^{2}}=a^{\square}\square^{-3}c^{\square}$.

16 Заполнить пропуски в формулировке и доказательстве свойства степени:

Для любого a $\square$ и любых .... n и m справедливо равенство

$$a^n : a^m = a^{\square}.$$

Пусть n и m — целые отрицательные числа. Тогда $n=\square\, l$, $m=\square\, k$, где l и k .... числа. По определению степени .... верно.

$$a^n : a^m = a^{\square} : a^{\square} = \left(\square\right)^l : \left(\square\right)^k.$$

Применяя свойство степени с натуральным показателем для l и k, получаем $\left(\dfrac{1}{a}\right)^l : \left(\dfrac{1}{a}\right)^k = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{\square}$, что по определению степени с .... равно $\square^{k-l} = a^{-m+k}$, так как $m=-k$, $n=\square$. Следовательно, верно равенство $a^n : a^m = a^{n-m}$.

17 Записать в виде степени результат выполнения действий, заполняя пропуски:

$$5^9 : 5^2 \cdot 5^{-4} = 5^{9-2+(-4)} = 5^3.$$

1) $7^{-2}\cdot 7^3 : 7^{-8} = 7^{-2+\square} = 7^{\square}$;

2) $2^{12} : 2^{-5}\cdot 2^{-7} = 2^{\square} = 2^{\square}$;

3) $(4^3)^{-2}\cdot 4^3 = 4^{\square}\cdot 4^3 = 4^{\square} = 4^{\square}$;

4) $(7^{-6})^{-3} : 7^{-7} = 7^{(-6)\cdot\square} = 7^{\square}$.

18 Заполняя пропуски, выполнить действия и записать результат в стандартном виде:

1) $4{,}32\cdot 10^4\cdot 2{,}1\cdot 10^{-3}=$ .... $\cdot\, 10$;

2) $7{,}32\cdot 10^4\cdot 3{,}1\cdot 10^{-8}=$ .... $\cdot\, 10^{\square}=$ ....;

3) $12{,}3\cdot 10^{-7} : 3\cdot 10^{-3}=$ .... $\cdot\, 10^{\square}$;

4) $1{,}05\cdot 10^{-3} : 3\cdot 10^{-7}=$ .... $\cdot\, 10^{\square}=$ ....

19 Заполняя пропуски, выполнить действия:

1) $(3a^{-2})^3\cdot\left(\dfrac{a^{-1}}{3^{-2}}\right)^{-2} = 3^3\cdot a^{\square}\cdot\dfrac{a^{\square}}{3^{\square}} = 3^{3-\square}\cdot a^{\square+\square} = 3^{\square}a^{\square} = \dfrac{1}{\square}$;

2) $\left(\dfrac{a^{-3}}{b^5}\right)^{-2} : (a^3b^{-2})^{-3} = \dfrac{a^{\square}}{\square^{-10}} : (a^{-9} \cdot b^{\square}) = a^{\square} b^{\square} : (a^{-9} \cdot b^{\square}) =$

$= a^{\square} b^{\square} = a^{\square} b^{\square}$;

20 Вычислить:

$$5^{-3} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \cdot 625 = 5^{-3} : 5^2 \cdot 5^4 = 5^{-3-2+4} = 5^{-1} = \frac{1}{5}.$$

1) $((-18)^5)^{-5} : ((-18)^{-4})^6 - 3^{-2} = (-18)^{\square} : (-18)^{\square} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\square} =$

$= (-18)^{\square} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\square} = (-18)^{\square} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\square} = -\square - \square =$ ....;

2) $(8^3)^{-4} \cdot \left(\left(\dfrac{1}{8}\right)^3\right)^{-3} : (64)^{-1} = 8^{\square} \cdot 8^{\square} : \square^{-2} = 8^{\square} = 8^{\square} =$ ....

21 Упростить выражение:

1) $(2x + 3x^{-1})(3x - 2x^{-1}) + 6x^{-2} =$ ....

.... Ответ. ....

2) $(x^2 - y^2)(x^{-1} + y^{-1})^{-1}$. $\quad (x^{-1} + y^{-1})^{-1} = ($............$)^{-1} = ($............$)^{-1} =$

$=$..............., $(x^2 - y^2) \cdot ($.....................$) =$.........................

Ответ. ....

3) $\dfrac{(y^{-2} - x^{-2})^{-1} \cdot (xy)^{-2}}{(x - y)^{-2}}$. $\quad (y^{-2} - x^{-2})^{-1} = ($..............$)^{-1} =$ ....,

$(xy)^{-2} =$ ...., $(x - y)^{-2} =$ ....

.... Ответ. ....

III

22 Вычислить:

1) $10^{-2} =$ ....;

2) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3} =$ ....;

3) $(8^2)^{-6} \cdot (8^3)^4 + \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3} =$ ....;

4) $2{,}75 \cdot 10^{-7} \cdot 6 \cdot 10^{-3} : (1{,}5 \cdot 10^{-4}) =$ ....

....

23 Сравнить с единицей:

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-5} =$ ....;

2) $2{,}745 \cdot 10^{-4}$............ .

24 Выполнить действия:

1) $\left(\frac{-2{,}5a^{-2}}{b^3c^{-4}}\right)^{-1} \cdot \frac{10}{bc} =$ ....;

2) $(x^2y^{-2} - 4y^{-2}) \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{-2} =$ ....

§ 8. Арифметический корень натуральной степени.
§ 9. Свойства арифметического корня

I

1 Найти длину стороны квадрата a, если дана его площадь S:

1) $S = 36$ см^2, $a =$ .... см; 2) $S = 121$ см^2, $a =$ .... см;

3) $S = 0{,}04$ дм^2, $a =$ .... дм; 4) $S = 17$ м^2, $a =$ .... м.

2 Заполнить пропуски в определении арифметического квадратного корня из числа a.

Определение. Арифметическим квадратным корнем из числа a называется .... число, ..., которого равен ....

Краткая запись определения:

$$\sqrt{a}\ ....,\ (\sqrt{a})^2 = ...\ .$$

3 Проверить, верно ли равенство:

1) $\sqrt{81} = 9$. 9................, $9^2 =$................., ...;

2) $\sqrt{144} = -12$. -12 ……………, $(-12)^2 =$……………, ……………;

3) $\sqrt{0{,}9} = 0{,}3$. $0{,}3$ ……………, $(0{,}3)^2 =$……………, ……………

4 Вычислить:

1) $\sqrt{16} =$……………; 2) $\sqrt{100} =$……………;

3) $\sqrt{1{,}21} =$……………; 4) $\sqrt{0{,}0004} =$…………….

5 Выяснить, при каких значениях a имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{3a}$ имеет смысл, если $3a$ ……………, т. е. при ……………;

2) $\sqrt{a-2}$ имеет смысл, если ……………$\geqslant 0$, т. е. при ……………;

3) $\sqrt{-a}$ ……………, если ……………, т. е. при …………….

6 Проверить справедливость неравенств:

1) $5 < \sqrt{31} < 6$. $5 = \sqrt{\ldots}$, $6 = \sqrt{\ldots}$, $\sqrt{\ldots} < \sqrt{31} < \sqrt{\ldots}$;

2) $7 < \sqrt{61} < 8$. …………………………………………………………

7 Вычислить:

1) $(\sqrt{3}+1)(1-\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)(\ldots\ldots) - 2\sqrt{3} =$ ……………

……………………………………………………………………………………;

2) $(18 - 3\sqrt{2})^2 + 108\sqrt{2} =$ ……………………………………………;

3) $\sqrt{5^4} - 2\sqrt{5^3} + (5+\sqrt{5})^2 =$ ……………………………………………

…………………………………………………………………………………….

8 Упростить выражение ($a > 0$, $b > 0$):

1) $\sqrt{8a^3b^2} : \sqrt{2ab^2} =$ ……………………………………………

……………………………………………………………………………………;

2) $\sqrt{50a^3} - \sqrt{2a^3} =$ ……………………………………………………

…………………………………….

9 Сравнить числа:

1) $5\sqrt{6}$ и $6\sqrt{5}$. $5\sqrt{6} = \sqrt{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$, $6\sqrt{5} = \sqrt{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$,

……………………, значит, $5\sqrt{6}$ $\boxed{}$ $6\sqrt{5}$;

2) $\sqrt{17}$ и $3\sqrt{3}$. $3\sqrt{3} =$ ……………………, значит, $\sqrt{17}$ $\boxed{}$ $3\sqrt{3}$.

10 Сократить дробь:

$\frac{a-\sqrt{7}}{7-a^2} =$ ....

11 Упростить выражение $(x-5)\sqrt{\frac{1}{x^2-10x+25}}$, заполняя пропуски:

1) при $x>5$; 2) при $x<5$.

$(x-5)\cdot\sqrt{\frac{1}{(\ldots\ldots\ldots)^2}} = (x-5)\cdot$ ....

1) При $x>5$ имеем $|$..............$|$=..............., т. е.

$(x-5)\cdot\frac{1}{\qquad} =$;

....

2) при $x<5$ имеем $|$..................$|$=..............., т. е. ....

Ответ. 1) 1; 2) –1.

П

12 Заполнить таблицу:

1)

x	0	1	8	27	64	125	216
$\sqrt[3]{x}$			2				

2)

x	0	1	16	81	256	625	1296
$\sqrt[4]{x}$					4		

13 Заполнить пропуски в определении арифметического корня натуральной степени.

Определение. Арифметическим корнем натуральной степени n .... из .... числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого ....

Если $a \geqslant 0$, то $(\sqrt[n]{a})^n =$ .... , $\sqrt[n]{a^n} =$ ....

14 Доказать, что $\sqrt[3]{0,008} = 0,2$.

Так как $\boxed{} > 0$ и $\boxed{}^3 =$ ...., то ....

15 Вычислить: $\sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{2^4} = 2.$

1) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\square^3} =$ .... ;

2) $\sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{\square^6} =$ .... ;

3) $\sqrt[3]{(-1000)} = \sqrt[3]{\square^3} = -\sqrt[3]{\square^3} =$ ....

16 Решить уравнение:

$$x^3 = 125, \quad x = \sqrt[3]{125}, \quad x = \sqrt[3]{5^3}, \quad x = 5.$$

1) $x^4 = 10\,000$, $x^4 = \sqrt[4]{\ldots\ldots\ldots} = \sqrt[4]{\square^4}$, $x =$ .... ;

2) $x^5 = -\dfrac{1}{32}$, $x^5 = \sqrt[5]{\ldots\ldots\ldots} = \sqrt[5]{\square^5} = -\sqrt[5]{\square^5}$, $x =$ .... ;

3) $x^4 = -16$, $\sqrt[4]{\ldots\ldots\ldots}$, ... < 0, следовательно, ...

17 Закончить фразу.

1) Выражение $\sqrt[4]{x-2}$ имеет смысл при ....

2) Выражение $\sqrt[3]{x-2}$ имеет смысл при ....

3) Выражение $\sqrt[5]{3+x}$ имеет смысл при ....
....

4) Выражение $\sqrt[6]{x+5}$ имеет смысл при ....

5) Выражение $\sqrt[4]{x^2-6x+9}$ имеет смысл при ....
....

6)* Выражение $\sqrt[4]{4x-x^2-10}$ ....
....

18 Вычислить, используя свойства арифметического корня:

$$\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{25 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^3} = 5.$$

1) $\sqrt[4]{18 \cdot 72} = \sqrt[4]{2 \cdot \ldots\ldots \cdot 9 \cdot \ldots\ldots} = \sqrt[4]{\square^4 \cdot \square^4} =$ .... ;

2) $\sqrt[4]{3} : \sqrt[4]{1875} = \sqrt[4]{\dfrac{3}{\square}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{\ldots\ldots}} = \sqrt[4]{\square^4} =$ .... ;

3) $\sqrt[3]{12\dfrac{19}{27}} = \sqrt[3]{\dfrac{\square}{27}} = \sqrt[3]{\square^3} =$ .... $=$ .... ;

4) $\sqrt{\sqrt{81}} - \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{\ldots\ldots} - \sqrt{\ldots\ldots} = \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots.$

Можно вычислить другим способом:

$\sqrt{\sqrt{81}} - \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[\square]{81} - \sqrt[\square]{64} = \sqrt[4]{3^{\square}} - \sqrt[6]{2^{\square}} = 3 - 2 = 1.$

19* Заполняя пропуски, разложить на множители по формулам сокращённого умножения:

1) $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \left(\sqrt[\square]{a}\right)^2 - \left(\sqrt[\square]{b}\right)^2 = (\ldots\ldots\ldots) \cdot (\ldots\ldots\ldots);$

2) $a + b = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\ldots\ldots - \sqrt[3]{ab} + \ldots\ldots\right);$

3) $\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b} = (\ldots\ldots\ldots)^2.$

20* Сократить дробь:

1) $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots;$

2) $\dfrac{\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{ab} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots.$

III

21 Вычислить:

1) $\sqrt[4]{625} = \ldots\ldots\ldots;$

2) $\sqrt[3]{-216} = \ldots\ldots\ldots;$

3) $\sqrt[4]{32 \cdot 8} + \sqrt[3]{\dfrac{162}{6}} = \ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots.$

22 Решить уравнение:

1) $x^4 = 625$, $x = \ldots\ldots\ldots$, $x = \ldots\ldots;$

2) $x^3 = -27$, $x = \ldots\ldots\ldots$, $x = \ldots\ldots.$

23 Выяснить, при каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt[4]{3 - x}$ $\ldots\ldots\ldots;$

2) $\sqrt[5]{x^2 - 3}$ $\ldots\ldots\ldots.$

§ 10. Степень с рациональным показателем.
§ 11. Возведение в степень числового неравенства

I

1 Вычислить:

1) $\sqrt[4]{0{,}0625} = \sqrt[4]{\boxed{}^{\,4}} = \ldots\ldots\ldots$;

2) $\sqrt[3]{-343} = -\sqrt[3]{\boxed{}^{\,3}} = \ldots\ldots\ldots$;

3) $\sqrt[3]{3^6} = \sqrt[3]{\left((3)^{\boxed{}}\right)^3} = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$;

4) $\sqrt[4]{11^8} = \sqrt[4]{\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$.

2 Закончить фразу.

1) Выражение a^n, где n — любое натуральное число, имеет смысл при ....

2) Выражение a^p, где p — отрицательное число, имеет смысл при ....

3) Выражение 0^p имеет смысл при ....

3 Выполнить умножение неравенств:

1) $\times\begin{array}{r} 3<5 \\ \underline{17<19} \end{array}$

....

2) $\times\begin{array}{r} 10>7 \\ \underline{3{,}5>2} \end{array}$

....

3) $\begin{array}{r} \times\ 3<5 \\ \times\ 3<5 \\ \underline{3<5} \end{array}$

....

4) $\begin{array}{l} \times\ a>b \\ \times\ a>b \\ \times\ a>b \\ \underline{a>b} \end{array}$, где $a>0$, $b>0$.

....

4 Выполнить действия:

1) $3^{-3}\cdot 3^7 - \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \sqrt{3^4} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2) $\frac{a^{-3}b^2}{b^{-3}a}\cdot\frac{\sqrt{a^8}}{\sqrt[3]{b^{15}}} = \frac{b^2\cdot\ldots\ldots\ldots}{a\cdot\ldots\ldots\ldots}\cdot\frac{a^{\boxed{}}}{b^{\boxed{}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

II

5 Записать в виде степени с рациональным показателем:

1) $\sqrt{a} =$ ……………; 2) $\sqrt{b^3} = b^{\square}$;

3) $\sqrt[4]{x^5} = \square^{\frac{5}{4}}$; 4) $\sqrt[7]{y^{-2}} =$ ……………….

6 Записать в виде корня из степени с целым показателем:

1) $a^{\frac{3}{2}} =$ ……………; 2) $b^{-\frac{1}{2}} =$ ……………;

3) $(3x)^{-\frac{1}{3}} =$ ……………; 4) $(x-2)^{\frac{2}{3}} =$ …………….

7 Заполнить таблицу, используя равенство $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$, где $x > 0$:

$x^{\frac{m}{n}}$	$x^{\frac{3}{7}}$		$x^{-\frac{2}{5}}$	$x^{-\frac{1}{6}}$	$x^{\frac{1}{8}}$	$x^{0,2}$
$\sqrt[n]{x^m}$		$\sqrt[10]{x^2}$		$\sqrt[6]{x^{-1}}$		

8 Закончить фразу.

1) Выражение $a^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n} > 0$, имеет смысл при ……………

…………………………………………………………………………………….

2) Выражение $a^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n} < 0$, имеет смысл при ……………

…………………………………………………………………………………….

3) Выражение a^r, где r — любое рациональное число, имеет смысл при …………….

9 Вычислить:

1) $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} =$ …………; 2) $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} =$ …………;

3)* $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[\square]{\square^2} = \sqrt[\square]{(\square^3)^2} =$ ………… $=$ …………;

4)* $32^{0,6} = 32^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\square^3} = \sqrt[5]{(\square^5)^3} =$ ………… $=$ …………;

5)* $81^{-0,75} = 81^{-\frac{3}{4}} =$ …………… $=$ …………… $=$ …………… $=$ …………….

10 Заполнить пропуски в записи свойств степени с любым действительным показателем.

Для любых ……………… и ……………… верны равенства:
1) $a^p \cdot a^q =$ ……………………; 2) $a^p : a^q =$ ……………;   3) ……………… $= a^{pq}$; 4) ……………… $= a^p b^q$;   5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p =$ …………………….

11 С помощью свойств записать в виде степени:

$$3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 3^1 = 3.$$

1) $5^{\frac{2}{3}} : 5^{-\frac{1}{6}} =$ ………………………………………………;

2) $\left(6^{\frac{7}{12}}\right)^{-3} = 6^{\square} =$ ……………………………;

3) $3^{\frac{4}{5}} \cdot 8^{0,8} = 3^{\frac{4}{5}} \cdot 8^{\square} = \boxed{}^{\frac{4}{5}} =$ ……………….

12 Разложить на множители:

1) $a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}($……………………$)$;

2) $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} = ($………… − …………$)($………… + …………$)$.

13 Сравнить числа:

1) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^3$ и $\left(\dfrac{4}{5}\right)^3$. Так как $\dfrac{3}{5} \square \dfrac{4}{5}$, то $\left(\dfrac{3}{5}\right)^3 \square \left(\dfrac{4}{5}\right)^3$;

2) $(7{,}01)^4$ и $(7{,}011)^4$. Так как $7{,}01 \square 7{,}011$, то ……………… ………………;

3) $\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\left(\dfrac{6}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$. Так как $\dfrac{7}{9} =$ ……, $\dfrac{6}{7} =$ …… и ……………,

то $\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \square \left(\dfrac{6}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$;

4) $\sqrt[3]{0{,}21}$ и $\sqrt[3]{0{,}31}$. Так как $\sqrt[3]{0{,}21} = (0{,}21)^{\square}$, $\sqrt[3]{0{,}31} = (0{,}31)$ и $0{,}21 \square 0{,}31$, то $\sqrt[3]{0{,}21} \square \sqrt[3]{0{,}31}$.

14 Заполнить пропуски в записи правила возведения в степень неравенства.

Если обе части неравенства ...., то при возведении его в положительную степень знак неравенства ...., а при возведении в .... степень знак неравенства меняется ....

15 Сравнить числа:

$$(0{,}44)^{-2} \text{ и } (0{,}45)^{-2}.$$

$$\text{Так как } 0{,}44 < 0{,}45 \text{ и } -2 < 0, \text{ то } (0{,}44)^{-2} > (0{,}45)^{-2}.$$

1) $(11)^{-3}$ и $(15)^{-3}$. Так как $11 \ \square\ 15$ и $-3 \ \square$ ......, то $(11)^{-3} \ \square\ (15)^{-3}$;

2) $(2{,}45)^{-\frac{1}{2}}$ и $(2{,}47)^{-\frac{1}{2}}$. Так как $2{,}45 \ \square\ 2{,}47$, ...,

то ....;

3) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-\frac{1}{3}}$ и $\left(\dfrac{5}{9}\right)^{-\frac{1}{3}}$. Так как $\dfrac{3}{7} =$ ...., $\dfrac{5}{9} =$ .... и $-\dfrac{1}{3} \ \square$ ......,

то ....

16 Решить уравнение:

1) $4^x = 64$, $4^x = 4^{\square}$, $x =$ ....;

2) $2^{2x} = 8^{\frac{2}{5}}$, $2^{2x} = (\square)^{\frac{2}{5}}$, $2^{2x} =$ ...., $2x =$ ...., $x =$ ....;

3) $3^{2x} = 27^{\frac{1}{4}}$, $3^{2x} = (\square)^{\frac{1}{4}}$, ...;

4) $5^{x-1} = 25$, $5^{x-1} = \square^{2}$, ..., $x =$ ....

Ответ. 1) $x = 3$; 2) $x = 0{,}6$; 3) $x = \dfrac{3}{8}$; 4) $x = 3$.

17* Упростить выражение:

1) $\dfrac{b}{a-b} + \dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{b}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)(\ldots\ldots)} + \dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} =$ ....

....

....;

2) $\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}=$ ....

18* Решить неравенство $(x^2+2)^{\frac{1}{3}}>(2x^2+1)^{\frac{1}{3}}$.

Так как $x^2+2 \; \boxed{} \; 0$, $\frac{1}{3} \; \boxed{} \; 0$, то и $(x^2+2)^{\frac{1}{3}} \; \boxed{} \; 0$.

Так как $2x^2+1 \; \boxed{} \; 0$, $\frac{1}{3} \; \boxed{} \; 0$, то и $(2x^2+1)^{\frac{1}{3}} \; \boxed{} \; 0$.

Возведём обе части неравенства $(x^2+2)^{\frac{1}{3}}>(2x^2+1)^{\frac{1}{3}}$ с положительной левой и правой частями в .... степень. По свойству 1 (§ 11)

$x^2+2 \; \boxed{} \; 2x^2+1$, ...

III

19 Вычислить:

1) $32^{\frac{1}{5}}=$ ....;

2) $64^{-\frac{1}{3}}=$ ....;

3) $81^{\frac{3}{4}}=$ ....

20 Сравнить числа:

1) $(0{,}48)^{\frac{1}{3}}$ и $(0{,}048)^{\frac{1}{3}}$. Так как ...., то ....

2) $(2{,}3)^{-\frac{1}{2}}$ и $(2{,}4)^{-\frac{1}{2}}$. Так как ...., то ....

21 Решить уравнение:

1) $5^{2x}=125$, $5^{2x}=$ ...., ...;

2) $4^{x-2}=64$, $4^{x-2}=$ ...., ...

Ответ. 1) $x=$ ....; 2) $x=$ ....

Степенная функция

§ 12. Область определения функции

I

1 Найти числовое значение каждого из алгебраических выражений при заданном значении a и заполнить таблицу:

a	–2	–1	0	1	1,5	2	3
x^2-1							
$\sqrt{x^2-1}$							
$\frac{1}{x^2-1}$	$\frac{1}{3}$	не сущ.	–1	не сущ.	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$
$\sqrt[3]{x^2-1}$							

....

....

....

....

2 Функция задана формулой $y(x) = 3x + 1$. Найти:

1) $y(0) =$ ....;

2) $y(-3) =$ ....;

3) значения x, при которых $y(x) = 0{,}5$, $y(x) = -3$.

$0{,}5 =$ ...., $-3 =$ ....

3 Функция задана формулой $y = x^2 - 2x - 3$.
1) Найти значения x, при которых функция принимает положительные значения.

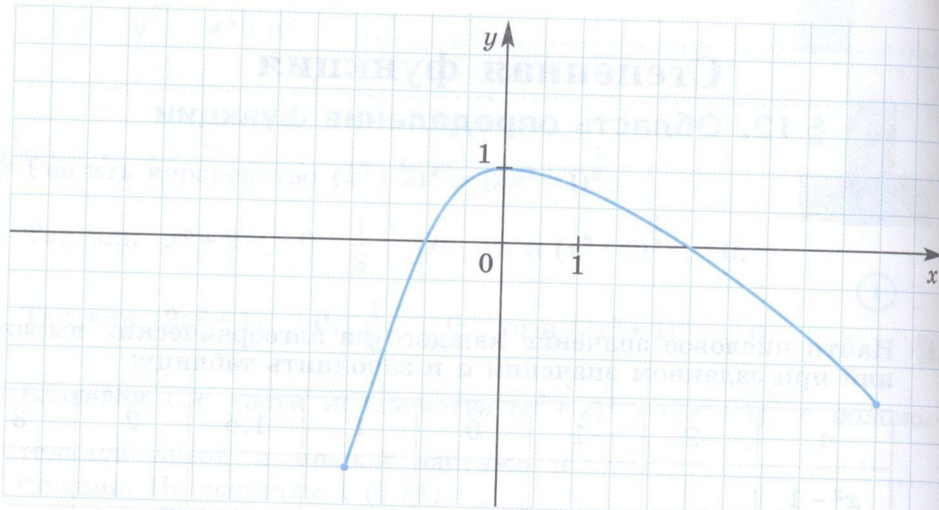
....

2) Найти наименьшее значение функции.

....

Ответ. 1) ....; 2) ....

4 Функция $y(x)$ задана графиком.

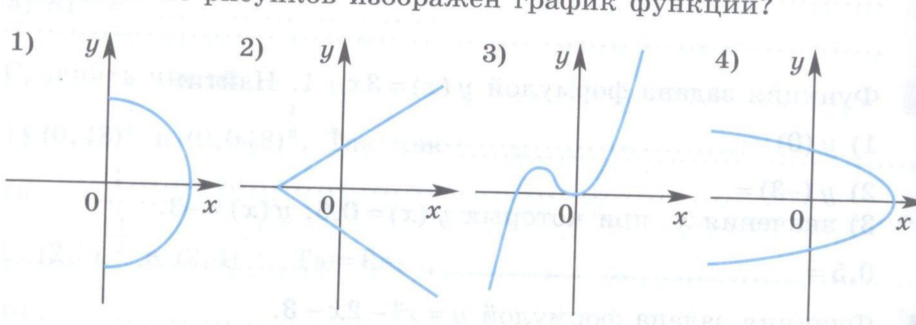


Найти:

1) $y(1)$, $y(-1)$, $y(0)$, $y\left(2\frac{1}{2}\right)$;
2) наибольшее значение функции;
3) два значения x, при которых функция не определена;
4) значения x, при которых $y(x) < 0$.

Ответ. 1) ....; 2) ....; 3) ....;
4) ....

5 На каком из рисунков изображён график функции?



Ответ. На рисунке ....

6 Закончить фразу.

1) Выражение $0{,}3x + 0{,}7$ имеет смысл при ....

2) Выражение $3x^2 - x + 1$ имеет смысл при ....

....

3) Выражение $\dfrac{1}{x+1}$ имеет смысл при ....

4) Выражение $\sqrt{x-1}$ имеет смысл ....

5) Выражение $\sqrt[3]{1-x}$ имеет смысл при ....

....

6) Выражение $x^{-2} + 1$ имеет смысл при ....

7 Закончить фразу.

1) График функции $y = x^2 + 2$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом вдоль .... на ....

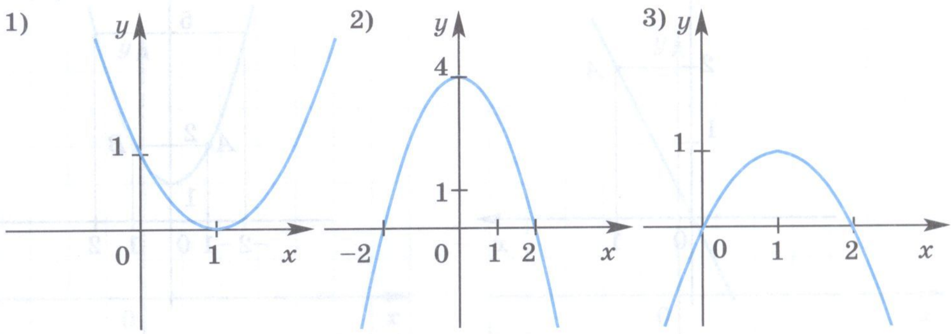
2) График функции $y = 2x^2 - 1$ получается из графика функции $y = 2x^2$ сдвигом вдоль .... на ....

3) График функции $y = (x-2)^2$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом вдоль .... на ....

4) График функции $y = (x+1)^2 - 2$ получается из графика функции $y = x^2$ сдвигом вдоль .... на .... ,

а затем вдоль .... на ....

8 На рисунке изображён график функции $y = ax^2 + bx + c$. Найти a, b и c.



....

....

Ответ. 1) .... ; 2) .... ; 3) ....

9 Заполняя пропуски, найти область определения функции:

1) $y=3x^2+2x-1$. Выражение $3x^2+2x-1$ имеет смысл при ....,

поэтому функция $y=3x^2+2x-1$ определена при ....

2) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$. Выражение $\dfrac{1}{x^2-1}$ .... при .... $\neq 0$,

т. е. при ...., поэтому областью определения функции $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ являются ....,

кроме ....

3) $y=\sqrt{x+3}$. Выражение $\sqrt{x+3}$ .... при ....,

поэтому функция $y=\sqrt{x+3}$ определена при ....

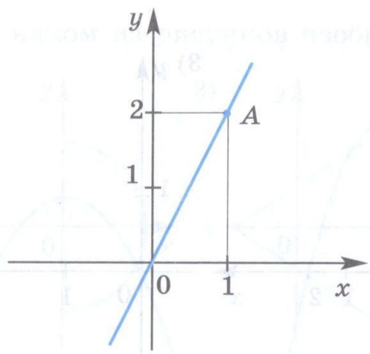
4) $y=\sqrt[3]{x-5}$. Выражение $\sqrt[3]{x-5}$ ....

...., поэтому ....

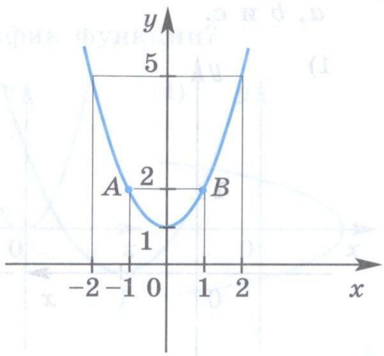
....

10 Задать формулой функцию, график которой изображён на рисунке, и найти её область определения.

1)



2)



1) Так как графиком функции является прямая, проходящая через точки (...........) и (...........), то формула имеет вид $y=$............. Подставим координаты точки A в формулу $y=$.............., получим ...., откуда $k=$........ .

Функция задана формулой $y =$ .... и определена при

....

2) Так как вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ лежит на оси Oy, то .... Точки A (...............) и B (...............) принадлежат графику функции, поэтому $2 = a \cdot \square^2 + b \cdot \square + 1$ и $2 = a \cdot \square^2 + b \cdot \square + 1$.

Получим систему $\begin{cases} \text{..............................} \\ \text{..............................} \end{cases}$

Решим систему $\begin{cases} \text{..............................} \\ \text{..............................} \end{cases}$

....

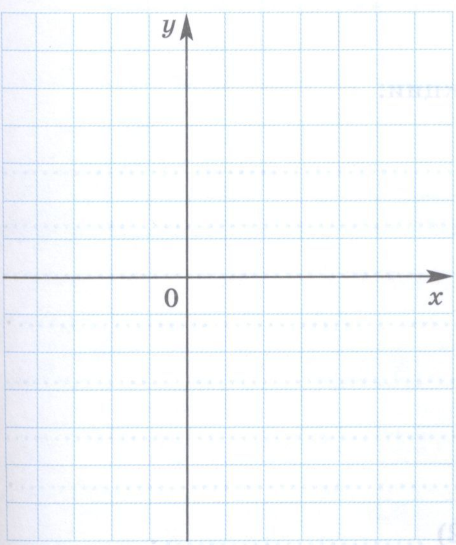
....

Таким образом, $a =$ ...., $b =$ ....

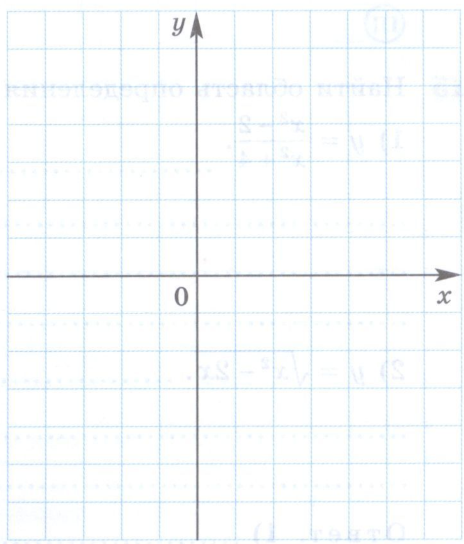
Функция задана формулой .... и определена при ....

11 Построить график функции $y = f(x)$, если эта функция определена на отрезке $[-1; 2]$:

1) $y = 2x^2$;



2) $y = 3 - 2x$.



12 Найти область определения функции:

1) $y = \dfrac{x-1}{x^2+3x-4}$. ....

....

....

2) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$. ....

....

....

Ответ. 1) ....; 2) ....

13 Изобразить (на с. 47) эскиз графика функции $y = f(x)$, у которой область определения:
1) $[-3; 3]$; 2) $x \geqslant 2$.

14* Построить (на с. 47) график функции:
1) $y = |x| + 2$. Построим график функции $y = |x|$, затем осуществим его сдвиг вдоль ....
2) $y = 2 - |x|$. Построим график функции $y = -|x|$ и осуществим его сдвиг вдоль ....
3) $y = |x - 2|$. Построим график функции $y = |x|$ и осуществим ....

III

15 Найти область определения функции:

1) $y = \dfrac{x^2-2}{x^2+4}$. ....

....

....

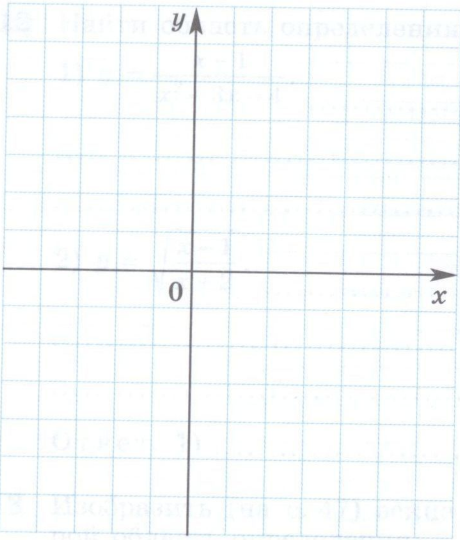
....

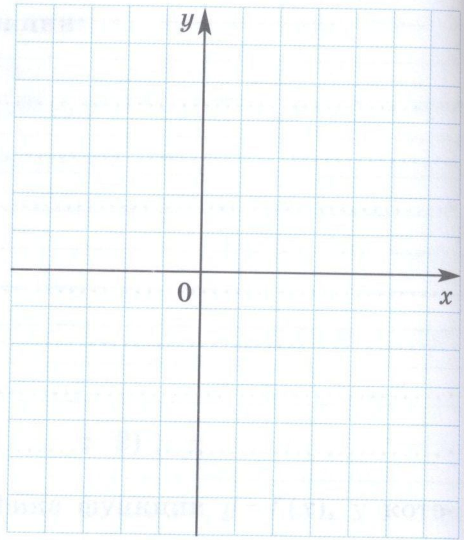
2) $y = \sqrt{x^2-2x}$. ....

....

....

Ответ. 1) ....; 2) ....





16* Построить график функции $y = |x + 3|$.

17* Построить график функции

$$y = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{при } x < -1, \\ |x| & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

§ 13. Возрастание и убывание функции

(I)

1 В пустые клетки вписать необходимый по смыслу знак > или <:

1) $2^{71} \square 2{,}1^{71}$, так как $0 \square 2 \square 2{,}1$ и $71 \square 0$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \square \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, так как $\frac{1}{2} \square \frac{1}{3} \square 0$ и $\frac{1}{2} \square 0$;

3) $72^{-4} \square 71{,}9^{-4}$, так как $72 \square 71{,}9 \square 0$ и $-4 \square 0$;

4) $(0{,}3)^{-\frac{3}{2}} \square (0{,}33)^{-\frac{3}{2}}$, так как $0 \square 0{,}3 \square 0{,}33$ и $-\frac{3}{2} \square 0$.

2 Закончить фразу.

1) Областью определения функции $y = x^2$ является множество

....

2) Областью определения функции $y = \dfrac{1}{x^2}$ является множество

....

3) Областью определения функции $y = \sqrt{x}$ является множество

....

4) Областью определения функции $y = \sqrt[3]{x}$ является множество

....

3 Сравнить с нулём разность выражений $3a + 7$ и $3b + 7$, если $a < b$.

$(3a + 7) - (3b + 7) =$ ....

....

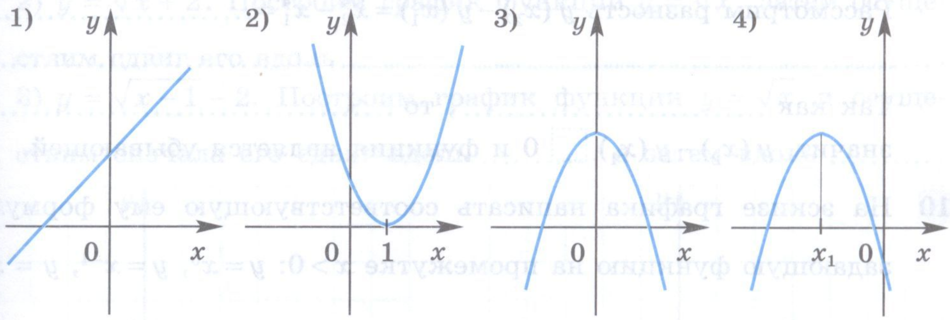
4 Доказать, что $2x^2 + 3 > 2y^2 + 3$, если $x > y > 0$.

$(2x^2 + 3) - (2y^2 + 3) =$ ....

.... , так как .... ,

следовательно, $2x^2 + 3$ $\boxed{}$ $2y^2 + 3$.

5 С помощью графика, изображённого на рисунке, записать промежутки, на которых функция возрастает (убывает).



Ответ. 1) ....

2) ....

3) ....

4) ....

(II)

6 Заполнить таблицу.

Функция	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = \frac{1}{x}$	$y = \frac{1}{x^2}$	$y = \sqrt{x}$
Показатель степени аргумента				-1		
Область определения функции				$x \neq 0$		

7 Заполнить пропуски в записи определения возрастающей на промежутке функции.

Функция $y(x)$ называется возрастающей на промежутке, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих ....,

таких, что .... выполняется неравенство ....

8 Даны функции $y = x$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^{-5}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{-\frac{1}{3}}$.

Подчеркнуть одной чертой те из них, которые возрастают на промежутке $x \geqslant 0$, и двумя чертами те, которые убывают на промежутке $x \geqslant 0$.

9 Доказать, что функция $y = x^4$ убывает на промежутке $x \leqslant 0$.

Пусть $x_2 \boxed{}\ x_1 \boxed{}\ 0$. Покажем, что $y(x_2) \boxed{}\ y(x_1)$.

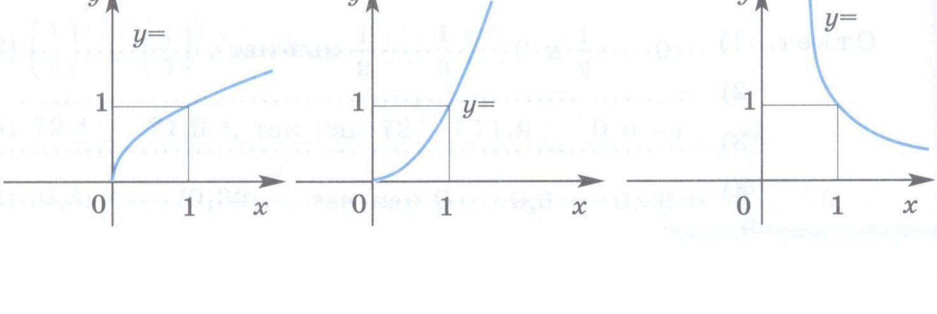
Рассмотрим разность $y(x_2) - y(x_1) = x_2^4 - x_1^4 =$ ....

....

Так как ...., то ....,

значит, $y(x_2) - y(x_1) \boxed{}\ 0$ и функция является убывающей.

10 На эскизе графика написать соответствующую ему формулу, задающую функцию на промежутке $x > 0$: $y = x^5$, $y = x^{-4}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$.



11 Доказать, что функция $y = x^2 - 4x$ убывает на промежутке $x \leqslant 2$.

Пусть $x_2 \;\square\; x_1 \;\square\; 2$. Покажем, что $y(x_2) \;\square\; y(x_1)$.

Рассмотрим разность ....

....

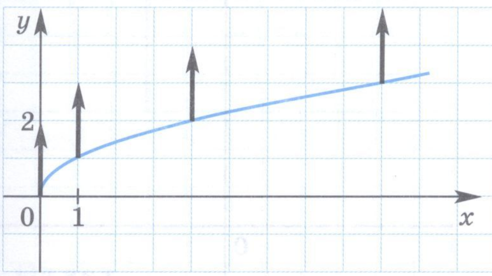
....

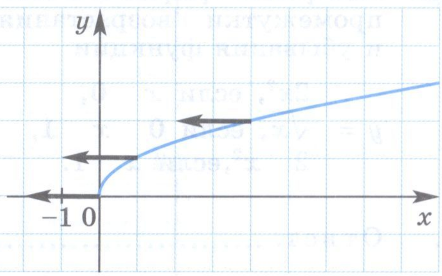
12 Построить график функции:

1) $y = \sqrt{x} + 2$. Построим график функции $y = \sqrt{x}$, предварительно заполнив таблицу:

x	9	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{\ }$	0
$y = \sqrt{x}$				$\frac{1}{2}$		

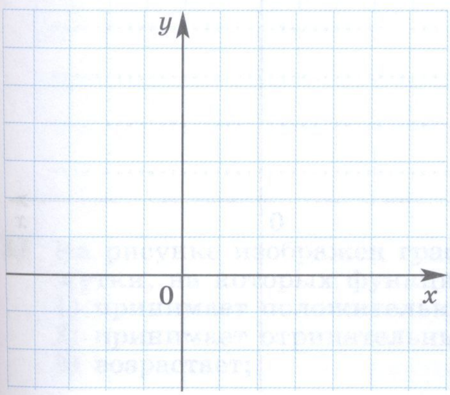
Осуществим сдвиг графика вдоль ....

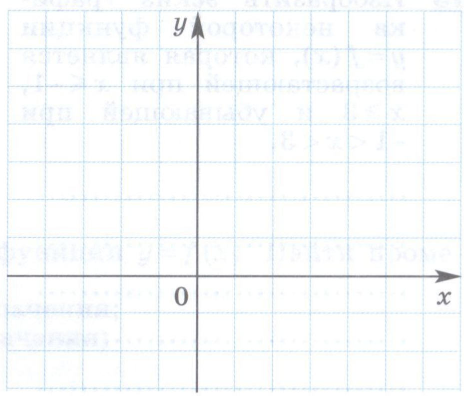




2) $y = \sqrt{x + 2}$. Построим график функции $y = \sqrt{x}$, затем осуществим сдвиг его вдоль ....

3) $y = \sqrt{x - 1} - 2$. Построим график функции $y = \sqrt{x}$ и осуществим сначала его сдвиг вдоль ...., а затем вдоль ....





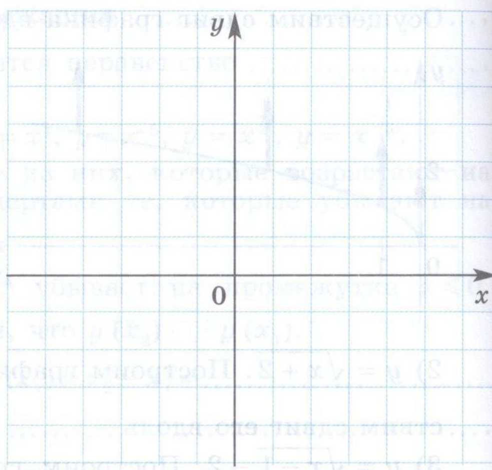
4) $y = 2\sqrt{x}$. Построим график функции $y = \sqrt{x}$ и осуществим растяжение графика функции $y = \sqrt{x}$ от оси .... вдоль оси .... в 2 раза.

13 С помощью графиков, построенных в предыдущем задании, заполнить таблицу:

Функция	Область определения	Область значений	Промежутки возрастания (убывания)
$y = \sqrt{x} + 2$			
$y = \sqrt{x+2}$	$x \geqslant -2$	$y \geqslant 0$	$x \geqslant -2$
$y = \sqrt{x \quad 1} \quad 2$			

14* Построить график и найти промежутки возрастания и убывания функции

$$y = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } x \quad 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } 0 \quad x \quad 1, \\ 2 \quad x^2, \text{если } x \quad 1. \end{cases}$$



Ответ. ....

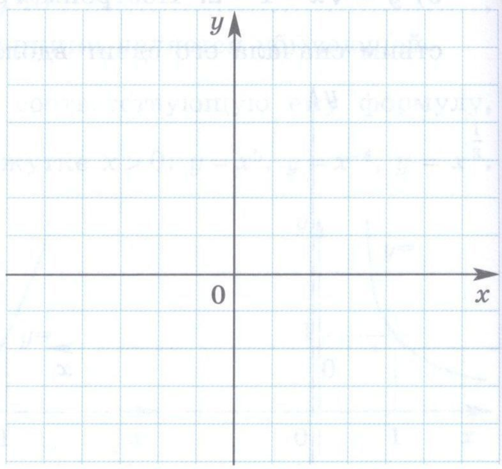
....

....

....

....

15 Изобразить эскиз графика некоторой функции $y = f(x)$, которая является возрастающей при $x \leqslant -1$, $x \geqslant 3$ и убывающей при $-1 < x < 3$.



....

....

....

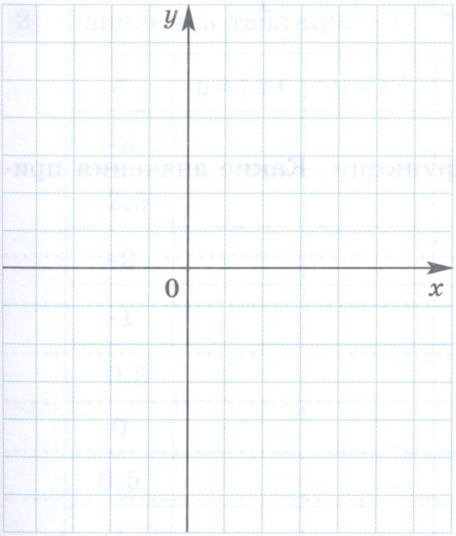
....

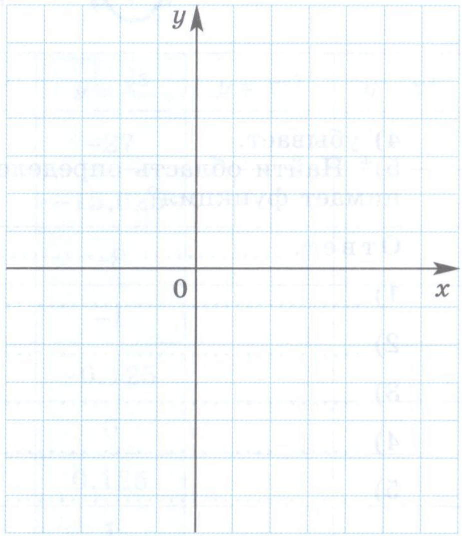
....

III

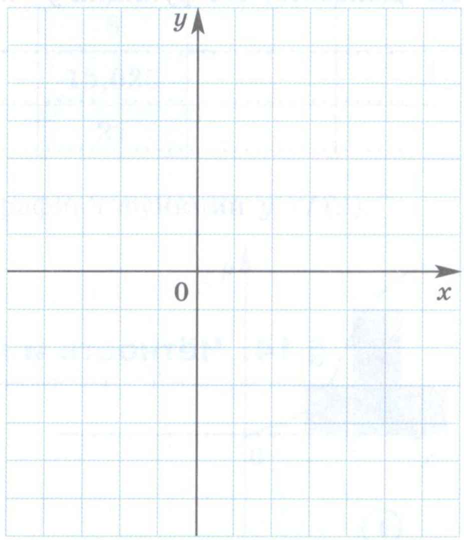
16 Нарисовать эскиз графика функции $y = f(x)$ на промежутке $x \geqslant 0$ и записать, возрастает или убывает функция, если

1) $y = x^6$; 2) $y = x^{-3}$; 3) $y = x^{\frac{1}{2}}$.

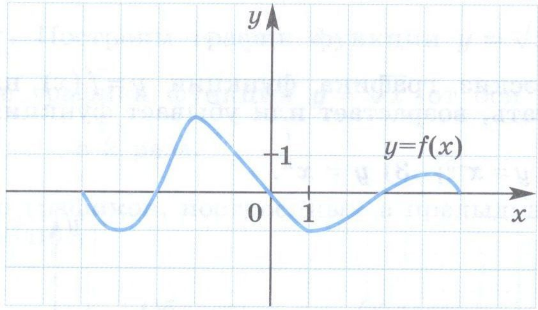




Ответ. ....



17 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найти промежутки, на которых функция:
1) принимает положительные значения;
2) принимает отрицательные значения;
3) возрастает;



4) убывает.

5)* Найти область определения функции. Какие значения принимает функция?

Ответ. ....

1) ....

2) ....

3) ....

4) ....

5) ....

18* Доказать, что функция $y = x^6 - 1$ возрастает на промежутке $x \geqslant 0$.

....

....

....

....

§ 14. Чётность и нечётность функции

I

1 Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} - 8^{\frac{1}{3}} + (0,75)^0 =$ ....

.... ;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-5} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} =$ ....

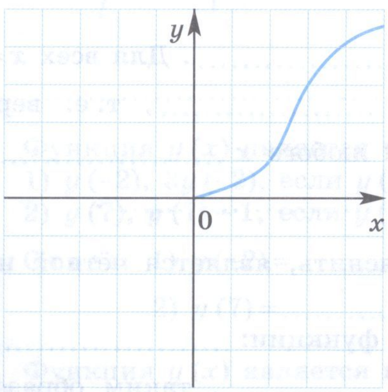
....

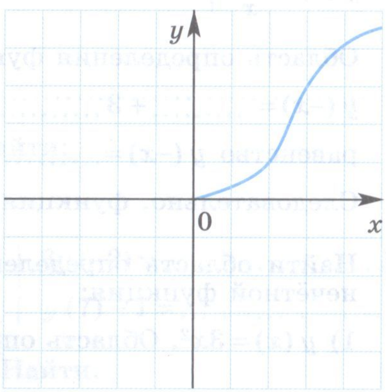
....

2 Заполнить таблицу:

x	$y = \lvert x \rvert$	$y = x^2$	$y = x^{-2}$	$y = x^3$	$y = x^{-3}$	$y = x^4$
–3				–27		
–2,5				–15,625		
–2				–8		
–1				–1		
–0,5				–0,125		
0				0		
0,5				0,125		
1				1		
2				8		
2,5				15,625		
3				27		

3 На рисунке изображена часть графика функции $y = f(x)$.





Изобразить другую часть графика, если известно, что она:
1) симметрична данной относительно оси ординат;
2) симметрична данной относительно начала координат.

4 Дана точка $A\ (-3;\ 7)$. Записать координаты точек B, C и D, если:
1) точка B симметрична точке A относительно оси Ox;
2) точка C симметрична точке A относительно оси Oy;
3) точка D симметрична точке A относительно начала координат.

Ответ. 1) B (..............); 2) C (..............); 3) D (..............).

5 Сравнить значения функции при $x = 2$ и $x = -2$, если:

1) $y = x^2 - x^4$. $y\,(2) =$ ...., $y\,(-2) =$ ....

2) $y = x + x^3$. $y\,(2) =$ ...., $y\,(-2) =$ ....

3) $y = x + x^2$. $y\,(2) =$ ...., $y\,(-2) =$ ....

Ответ. 1) $y\,(2)$ ☐ $y\,(-2)$; 2) $y\,(2)$ ☐ $y\,(-2)$; 3) $y\,(2)$ ☐ $y\,(-2)$.

II

6 Заполнить пропуски в доказательстве того, что функция $y\,(x) = 2x^2 + \frac{1}{x^4}$ является чётной.

Область определения функции: .... Для всех x ☐ 0 $y\,(-x) = 2\,(\text{..........})^2 +$ .... = ..., т. е. верно равенство $y\,(-x) =$ .... для любого x из .... Следовательно, функция является ....

7 Заполнить пропуски в доказательстве того, что функция $y\,(x) = \frac{1}{x} + 3x^3$ является нечётной.

Область определения функции: .... Для всех $x \neq 0$ $y\,(-x) =$ .... + 3 .... = ..., т. е. верно равенство $y\,(-x) =$ .... для любого x ....
Следовательно, функция является ....

8 Найти область определения и выяснить, является чётной или нечётной функция:

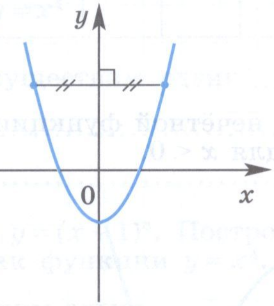
1) $y\,(x) = 3x^2$. Область определения функции: ...., $y\,(-x) = 3$ ...., таким образом, $y\,(x) =$ .... для любого x из .... Следовательно, функция ....

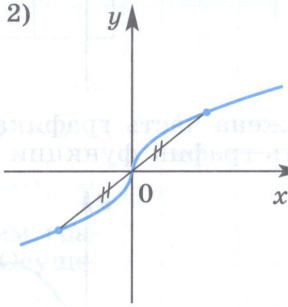
2) $y(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$. Область определения функции: ....

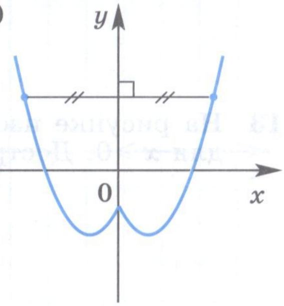
....

....

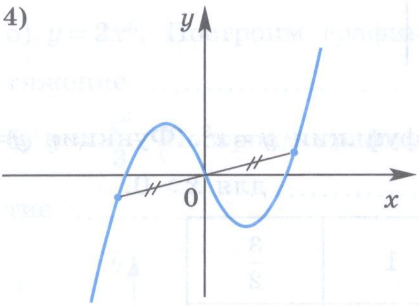
9 На рисунке изображены графики функций. Под каждым из них подписать, является ли функция, заданная данным графиком, чётной, нечётной или не является ни чётной, ни нечётной.

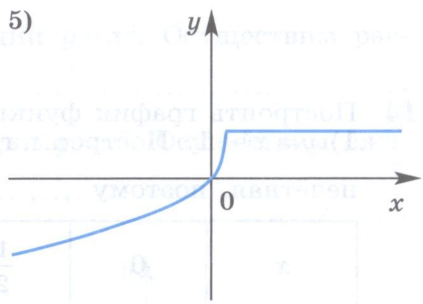
1) 

2) 

3) 

....

4) 

5) 

....

10 Функция $y(x)$ является чётной. Найти:
1) $y(-2)$, $3y(-2)$, если $y(2) = 7$;
2) $y(7)$, $y(7) - 1$, если $y(-7) = 1$.

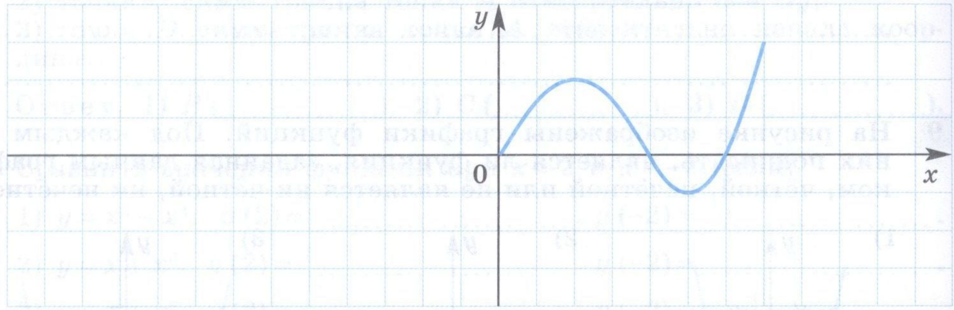
Ответ. 1) $y(-2) =$ ....; | $3y(-2) =$ ....;
2) $y(7) =$ ....; | $y(7) - 1 =$ ....

11 Функция $y(x)$ является нечётной. Найти:

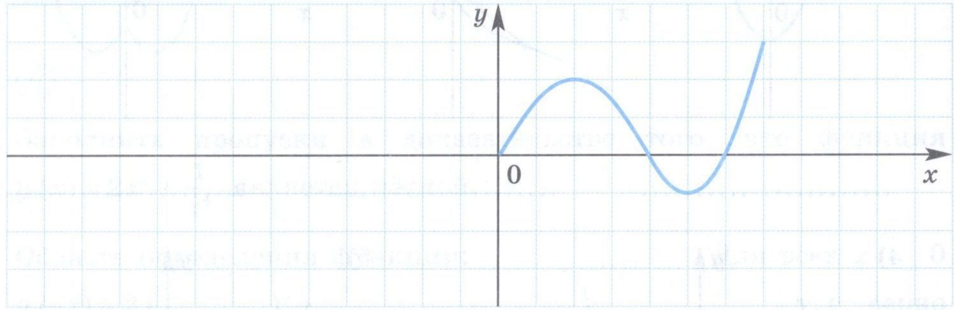
1) $y(-3)$, если $y(3) = \frac{1}{2}$; 2) $y(10)$, если $y(-10) = -1$.

Ответ. 1) $y(-3) =$ ....; 2) ....

12 На рисунке изображена часть графика чётной функции $y(x)$ для $x \geqslant 0$. Достроить график функции для $x < 0$.



13 На рисунке изображена часть графика нечётной функции $y(x)$ для $x \geqslant 0$. Достроить график функции для $x < 0$.

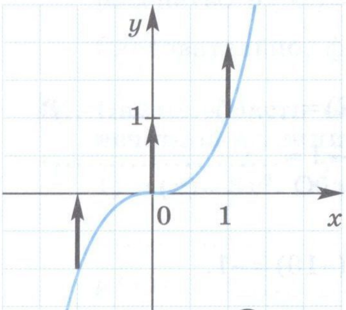


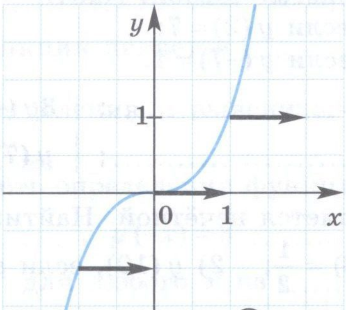
14 Построить график функции:

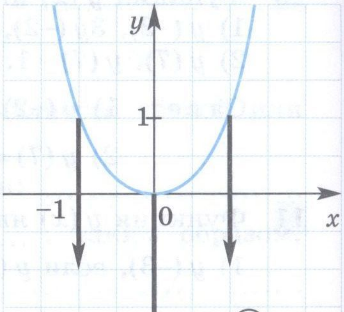
1) $y = x^3 + 1$. Построим график функции $y = x^3$. Функция $y = x^3$ нечётная, поэтому .... для $x > 0$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$y = x^3$				

Далее осуществим его сдвиг вдоль ....





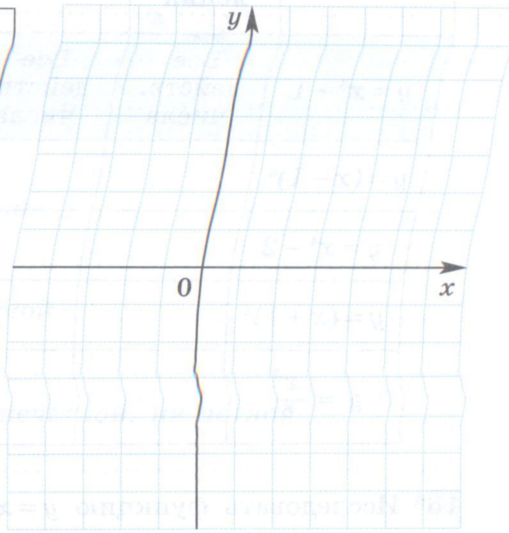


2) $y=(x-1)^3$. Построим график функции $y=x^3$. Осуществим его сдвиг вдоль ....

3) $y=x^4-2$. Построим график функции $y=x^4$. Функция $y=x^4$ ....

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$y=x^4$				

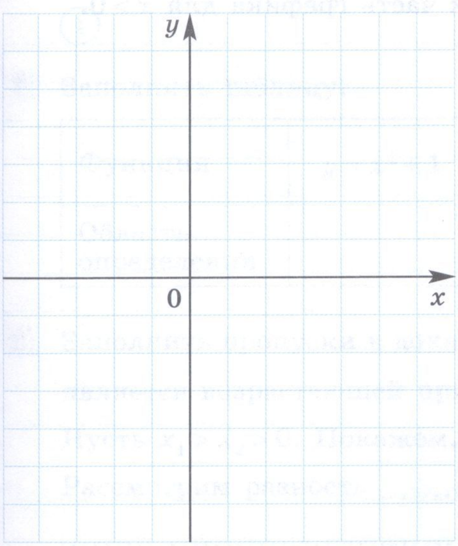
Осуществим сдвиг ....

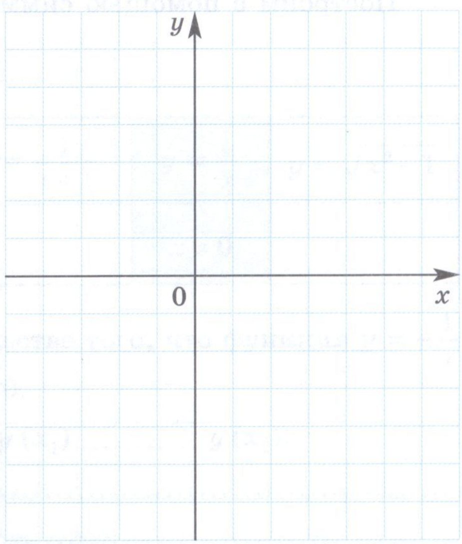


4) $y=(x+1)^4$. Построим график функции $y=x^4$. Осуществим сдвиг ....

5) $y=2x^3$. Построим график функции $y=x^3$. Осуществим растяжение ....

6) $y=\frac{x^3}{3}$. Построим график функции $y=x^3$. Осуществим сжатие ....





15 С помощью построенных в предыдущей задаче графиков функций заполнить таблицу:

Функция	Область определения	Область значений	Промежутки		Чётность
			возрастания	убывания	
$y = x^3 + 1$	Все действ. числа	Все действ. числа	Вся числовая ось	—	Ни чётная, ни нечётная
$y = (x-1)^3$					
$y = x^4 - 2$					
$y = (x+1)^4$					
$y = \dfrac{x^3}{3}$					

16* Исследовать функцию $y = x^2 + 3\,|\,x\,| - 4$ и построить её график.

1) Область определения ....

2) $y = (-x) =$ ...., т. е. $y = (-x) =$ ....

Следовательно, функция является ....

3) При $x \leqslant 0\ |\,x\,| =$ ...., тогда при $x \leqslant 0\ y =$ ....

Построим часть графика этой функции, лежащую в левой полуплоскости.

Построим с помощью симметрии часть графика для $x > 0$.

(III)

17 Изобразить эскиз графика функции

....

....

....

....

18 Доказать, что функция:

1) $y(x) = 2x^2 - |x|$ является чётной ....

....

2) $y(x) = x^3 - \sqrt[3]{x}$ является нечётной ....

....

3) $y = x^2 + x^3 + 1$ не является ни нечётной, ни чётной ....

....

§ 15. Функция $y = \frac{k}{x}$

(I)

1 Заполнить таблицу:

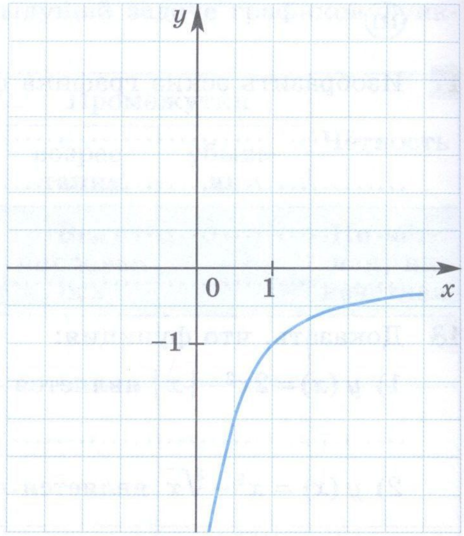
Функция	$y = x^4 + 1$	$y = \frac{1}{x+1}$	$y = \frac{5}{x}$	$y = \sqrt{x^2 - 1}$
Область определения			$x \neq 0$	

2 Заполнить пропуски в доказательстве того, что функция $y = -\frac{1}{x}$ является возрастающей при $x > 0$.

Пусть $x_1 > x_2 > 0$. Покажем, что $y(x_1)$ .... $y(x_2)$.

Рассмотрим разность ....

....



3 Изобразить эскиз графика функции, у которой областью определения являются все действительные числа, кроме 0, и при $x > 0$ функция возрастает.

4 Доказать, что функция $y = \frac{7}{x}$ является нечётной.

Область определения функции $y(x) = \frac{7}{x}$, $y(-x) =$ ....
.... для .... из области определения.

5 Заполнить таблицу, предварительно вычислив значение k для функции $y = \frac{k}{x}$:

x	0,3	0,5	$\frac{3}{4}$	1,5	2	$2\frac{1}{3}$	$3\frac{3}{\ }$	4,5
$y = \frac{\square}{x}$						$\frac{9}{7}$		

$\frac{9}{7} = \frac{k}{\_}$, откуда ....

(II)

6 На рисунке изображён график функции $y = -\frac{\ }{x}$ при $x > 0$. Достроить график этой функции при $x < 0$ и записать:

1) область определения функции: ....

2) значения, которые может принимать функция: ....

3) промежутки возрастания (убывания) функции: ....

7 В одной системе координат построить графики функций $y = x^2$ и $y = \frac{2}{x}$ и выяснить, сколько корней имеет уравнение $x^2 - \frac{2}{x} = 0$.

....

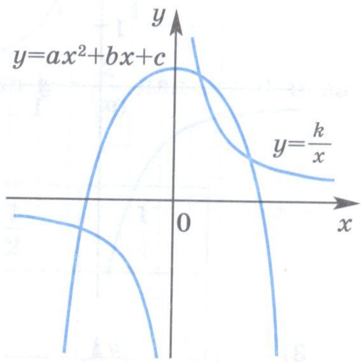
Ответ. ....

8 На рисунке изображены графики функций

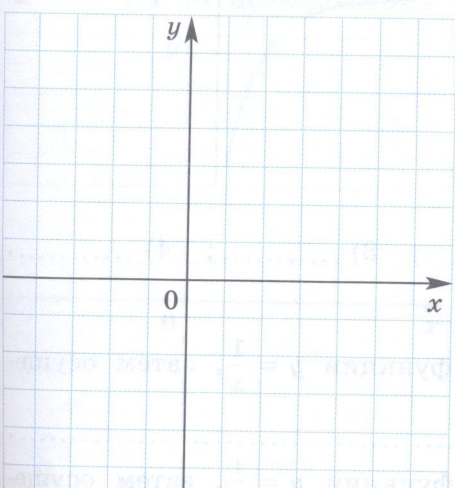
$$y = \frac{k}{x} \text{ и } y = ax^2 + bx + c.$$

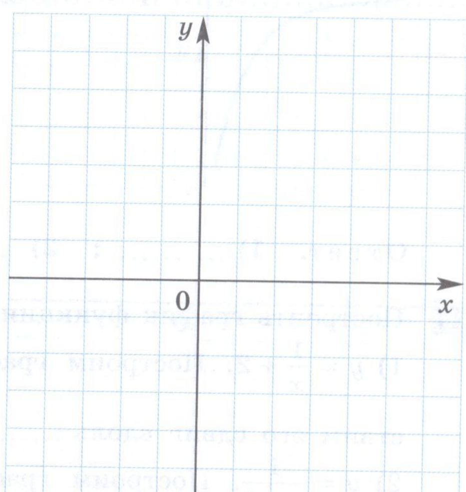
Обвести красным карандашом ту часть графика функции $y = \frac{k}{x}$, для точек которой выполняется неравенство

$$\frac{k}{x} < ax^2 + bx + c.$$



9 В одной системе координат построить графики функций $y = \frac{3}{x}$ и $y = \frac{x}{3}$ и найти значения x, при которых выполняется неравенство $\frac{3}{x} > \frac{x}{3}$.

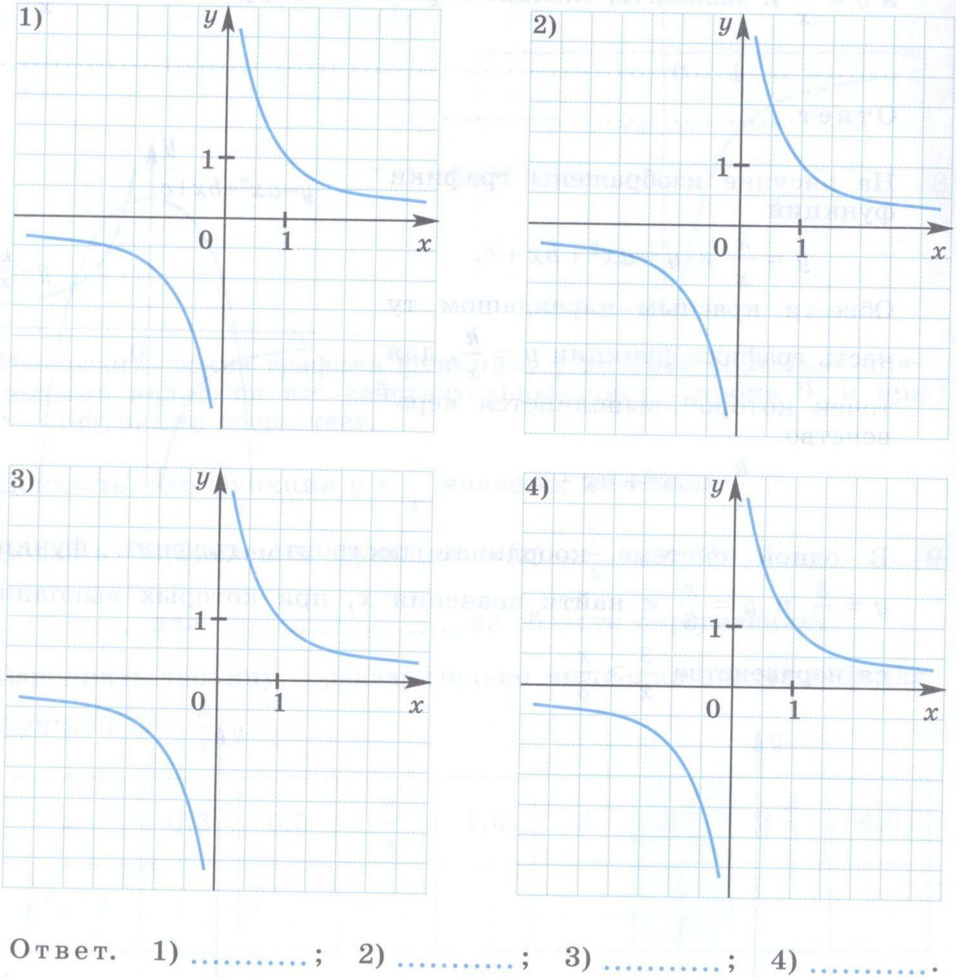




Ответ. ....

10 На рисунке изображён график функции $y = \frac{1}{x}$. Нарисовать эскизы графиков функций $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^3$, $y = x^4$ и выяснить, сколько корней имеет уравнение:

1) $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$; 2) $\frac{1}{x} = \sqrt[3]{x}$; 3) $\frac{1}{x} = x^3$; 4) $\frac{1}{x} = x^4$.

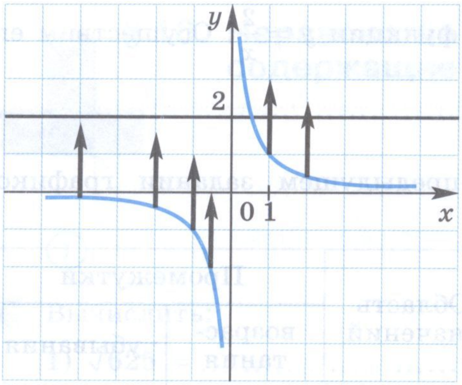


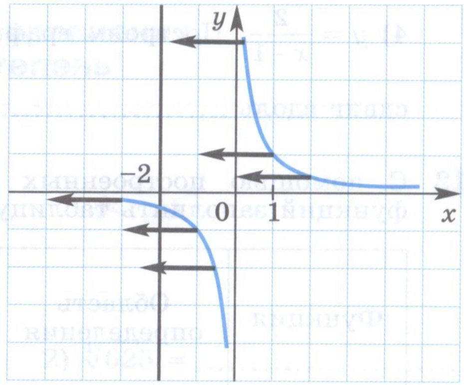
Ответ. 1) ....; 2) ....; 3) ....; 4) ....

11 Построить график функции:

1) $y = \frac{1}{x} + 2$. Построим график функции $y = \frac{1}{x}$, затем осуществим его сдвиг вдоль ....

2) $y = \frac{1}{x+2}$. Построим график функции $y = \frac{1}{x}$, затем осуществим его сдвиг вдоль ....





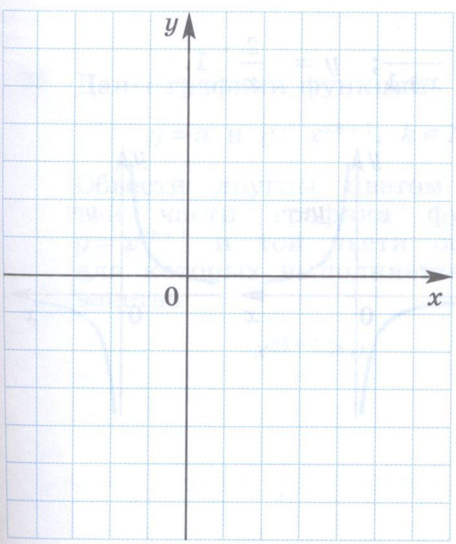
3) $y = \frac{2}{x} - 1$. Построим график функции $y = \frac{2}{x}$ для $x > 0$ и затем ....

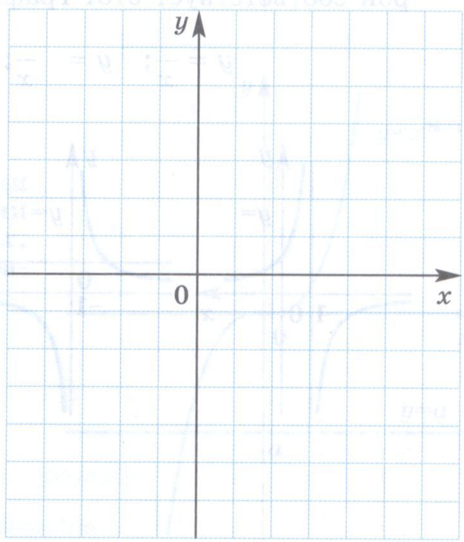
x	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$y = \frac{2}{x}$					

Осуществим его сдвиг вдоль ....

....

....





4) $y = \frac{2}{x-1}$. Построим график функции $y = \frac{2}{x}$. Осуществим его сдвиг вдоль ....

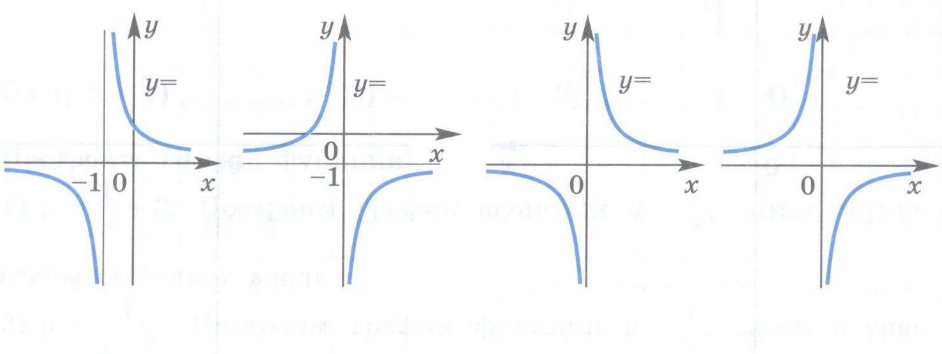
12 С помощью построенных в предыдущем задании графиков функций заполнить таблицу:

Функция	Область определения	Область значений	Промежутки	
			возрастания	убывания
$y = \frac{1}{x} + 2$				
$y = \frac{1}{x+2}$	$x \neq -2$	$y \neq 0$	—	$x < -2$, $x > -2$
$y = \frac{2}{x}\quad 1$				
$y = \frac{2}{x\quad 1}$				

III

13 На эскизе графика функции написать формулу функции, которой соответствует этот график:

$$y = \frac{}{x};\quad y = \quad \frac{}{x};\quad y = \frac{}{x+1};\quad y = \quad \frac{2}{x}\quad 1.$$



§ 16. Неравенства и уравнения, содержащие степень

I

1 Вычислить:

1) $\sqrt{625} =$ ....; 2) $\sqrt[4]{625} =$ ....;

3) $\sqrt[3]{216} =$ ....; 4) $\sqrt[7]{1} =$ ....;

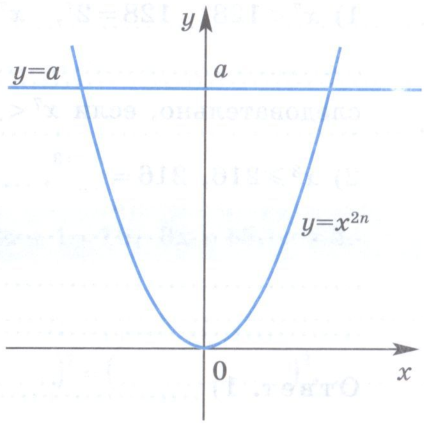
5) $\sqrt[5]{32} =$ ....; 6) $\sqrt[4]{256} =$ ....

2 Даны графики функций

$$y = a \text{ и } y = x^{2n}, \ n \in N.$$

Обвести другим цветом точки той части графика функции $y = x^{2n}$ и той части оси Ox, для которых выполняется неравенство

$$x^{2n} \leqslant a.$$

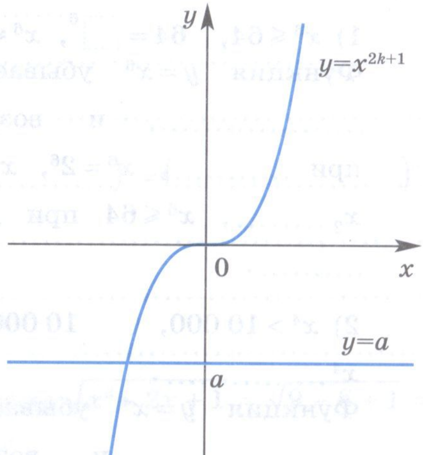


3 Даны графики функций

$$y = a \text{ и } y = x^{2k+1}, \ k \in N.$$

Обвести другим цветом точки той части графика функции $y = x^{2k+1}$ и той части оси Ox, для которых выполняется неравенство

$$x^{2k+1} \geqslant a.$$



4 Упростить:

1) $\sqrt[3]{(x-5)^3}$ при $x \geqslant 5$; $\sqrt[3]{(x-5)^3} =$ ....

2) $\sqrt{(2-x)^2}$ при $x > 2$; $\sqrt{(2-x)^2} =$ ....

5 Найти значения x, при которых выполняется равенство:

1) $\sqrt{x} = 3$,   2) $\sqrt{x} = 8$,   3) $\sqrt{x} = 0{,}5$.

....

....

II

6 Решить неравенство:

1) $x^7 < 128$, $128 = 2^7$, $x^7 < 2^7$. Функция $y = x^7$ определена и .... при всех .... ,

следовательно, если $x^7 <$ .... , то $x <$ ....

2) $x^3 \geqslant 216$, $216 = \boxed{}^3$, ...

....

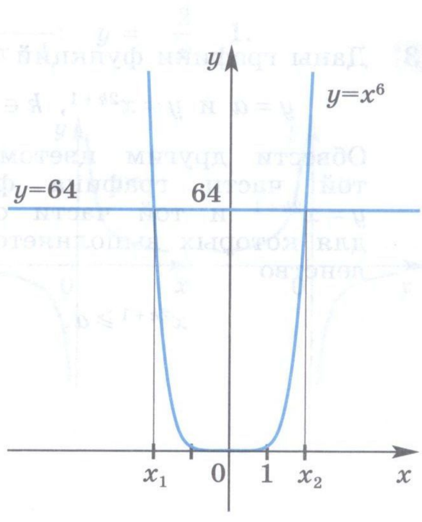
....

....

Ответ. 1) .... ; 2) ....

7 Решить неравенство:

1) $x^6 \leqslant 64$, $64 = \boxed{}^6$, $x^6 \leqslant$ ....
Функция $y = x^6$ убывает при .... и возрастает при .... , $x^6 = 2^6$, x_1 .... , x_2 .... , $x^6 \leqslant 64$ при ....



2) $x^4 > 10\,000$, $10\,000 = \boxed{}^4$,
x^4 ....
Функция $y = x^4$ убывает при .... и возрастает

при ...., $x^4 =$ ....,

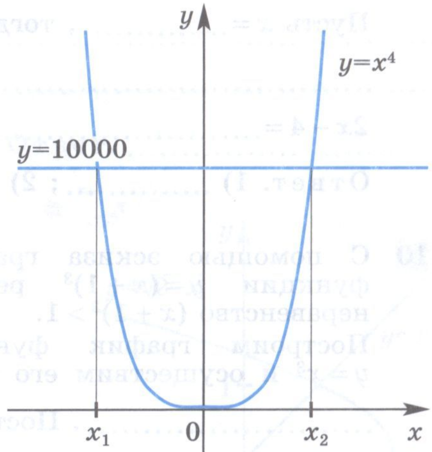
$x_1 =$ ...., $x_2 =$ ....,

$x^4 > 10\,000$ при ....

Ответ.

1) ....;

2) ....



8 Проверить, является ли число x корнем уравнения:

1) $\sqrt{x-1} = 3$, если $x = 10$. ....

2) $\sqrt{x^2-3} = 1$, если $x = -2$. ....

3) $\sqrt{x-1} = \sqrt{3x+5}$, если $x = -3$. ....

4) $\sqrt{x^2-13} = 1 - x$, если $x = 7$. ....

9 Решить уравнение:

$$\sqrt{3x+1} = 4,\ \left(\sqrt{3x+1}\right)^2 = 4^2,\ 3x+1 = 16,\ 3x = 15,\ x = 5.$$

1) $\sqrt{x+1} = 7$, ...

2*) $\sqrt{x+5} = \sqrt{3x+15}$, (....................)^2 = (....................)^2,

....

Проверка. При $x =$ ....

$\sqrt{x+5} =$ ....

$\sqrt{3x+15} =$ ....

3*) $\sqrt{x^2-2x+1} = 2x-4$, (....................)^2 = (....................)^2,

....

....

....

Проверка. Пусть $x =$ ...., тогда $\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{9-6+1} =$ $= \sqrt{4} = 2$, $2x - 4 =$ ....

Пусть $x =$ ...., тогда $\sqrt{x^2 - 2x + 1} =$ ....

$2x - 4 =$ ....

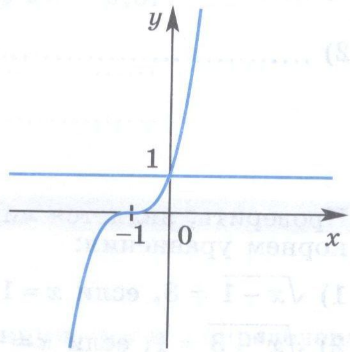
Ответ. 1) .... ; 2) .... ; 3) .... ; 4) ....

10 С помощью эскиза графика функции $y = (x+1)^3$ решить неравенство $(x+1)^3 > 1$.

Построим график функции $y = x^3$ и осуществим его сдвиг

.... Построим

график функции $y =$ ....
и найдём абсциссу точки пересечения двух графиков. Это
$x =$ ....

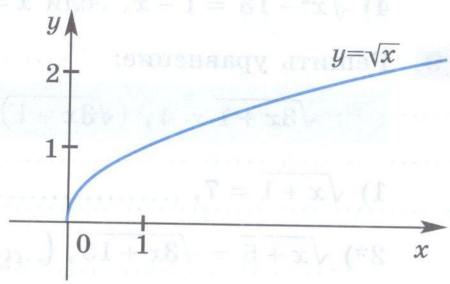


Ответ. ....

11* Решить неравенство $\sqrt{x-2} < 2$ и сделать графическую иллюстрацию решения.

Функция $y = \sqrt{x-2}$ определена при .... и принимает неотрицательные значения. Правая часть неравенства неотрицательна.

Возведём обе части неравенства в .... , получим .... , откуда .... Следовательно, решение неравенства ....



III

12 Решить уравнение:

1) $\sqrt{x+5} = 3$,

2) $\sqrt{x-1} = \sqrt{2x}$.

....

....

....

....

....

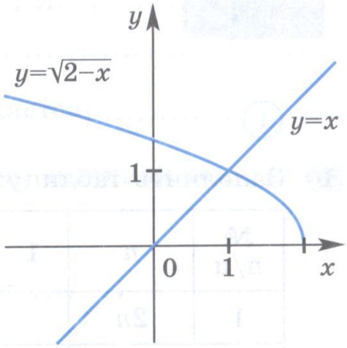
....

Ответ. .... Ответ. ....

13* Решить неравенство

$$\sqrt{2-x} < x$$

с помощью изображённых на рисунке графиков.



Ответ. ....

Прогрессии

§ 17. Числовая последовательность

I

1 Заполнить таблицу:

№ п/п	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$2n$					10					
2	$2n-1$					9					
3	n^2					25					

II

2 Дана последовательность чётных чисел

$$2,\ 4,\ 6\ \ldots,\ 2n,\ 2(n+1),\ \ldots.$$

1) Записать четвёртый, седьмой и n-й член этой последовательности: ...., ..., ...

2) Записать номера членов последовательности, равных 6, 18, $2(n+1)$: ...., ..., ...

3 Вычислить первые 3 члена последовательности, которая задана формулой n-го члена:

1) $a_n = 2n+1$, $a_1 = 2 \cdot 1 + 1 =$ ......, $a_2 = 2 \cdot 2 + 1 =$ ......, $a_3 =$ ....;

2) $a_n = \dfrac{1}{n^2+3}$, $a_1 = \dfrac{1}{1^2+3} =$ ...., $a_2 =$ ...., $a_3 =$ ....

4 Последовательность задана формулой $a_n = n^2 + 1$. Выяснить:

1) номер члена этой последовательности, равного 82, 170.

$82 = n^2 + 1$, откуда $n^2 =$ ...., $n = \pm$.............., но так как искомый номер $n \in N$, то $n =$ ....;

$170 =$ ...., откуда $n^2 =$ ...., $n =$ ....;

2) является ли членом последовательности число 24, 37.

$24 = n^2 + 1$, откуда $n^2 = 23$, $n = \pm$........., но так как искомое n — натуральное число, то число 24 не является членом последовательности;

....

....

....

Ответ. 1) $n =$.......; $n =$.......; 2) не является; ....

5 Найти первые 3 члена последовательности, заданной рекуррентной формулой:

1) $a_{n+1} = a_n + 5$, если $a_1 = -3$;

$a_1 = -3$, $a_2 = -3 + 5 =$........., $a_3 =$........ $+ 5 =$........;

2) $a_{n+1} = 10 - 3a_n$, если $a_1 = 4$;

$a_1 = 4$, $a_2 = 10 - 3 \cdot 4 =$........, $a_3 =$............................;

3) $a_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot a_n\right)$, если $a_1 = 0$.

$a_1 = 0$, $a_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) =$........., $a_3 =$......................

(III)

6 Последовательность задана формулой $x_n = n^2 - n$.

1) Найти одиннадцатый член последовательности.

....

2) Выяснить, является ли число 16 членом этой последовательности. ....

....

3) Найти номер члена последовательности, равного 56.

....

....

7 Найти первые 3 члена последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}}{2}$ и условием $a_1 = 81$.

....

....

§ 18. Арифметическая прогрессия

(I)

1 Заполнить таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_n = 2 + 3n$					17			

С помощью таблицы найти

$a_2 - a_1 =$ ...., $a_3 - a_2 =$ ...., $a_6 - a_5 =$ ...., $a_8 - a_7 =$ ....

Высказать предположение: $a_{n+1} - a_n =$ ....

2 Заполнить таблицу:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_n = n^2$					25			

С помощью таблицы найти

$a_2 - a_1 =$ ...., $a_3 - a_2 =$ ...., $a_6 - a_5 =$ ...., $a_8 - a_7 =$ ....

Высказать предположение о разности последующего и предыдущего членов последовательности $a_n = n^2$:

....

(II)

3 Назвать первый член и найти разность арифметической прогрессии:

1) 4, 7, 10, ...; $a_1 =$ ....; $d =$ ....;

2) −7, −4, −1, ...; $a_1 =$ ....; $d =$ ....

4 Записать первые четыре члена арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 12$; $d = -2$. ....

2) $a_1 = -0{,}5$; $d = 1{,}5$. ....

5 Доказать, что последовательность $a_n = -3(5-n)$ является арифметической прогрессией.

$a_{n+1} = -3(5-(n+1)) = -15+3(n+1) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_n = -3(5-n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_{n+1} - a_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

Разность $a_{n+1} - a_n$ не зависит от n, поэтому последовательность $a_n = -3(5-n)$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

6 В арифметической прогрессии найти:

1) a_{21}, если $a_1 = 13$, $d = 2$. $a_{21} = 13 + (21-1)\cdot 2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

2) a_{15}, если $a_1 = \frac{1}{3}$, $d = -1$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

7 Записать формулу n-го члена арифметической прогрессии:

1) 3; 10; 17; ... . $a_1 = 3$, $a_2 = 10$, $d = a_2 - a_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$,

$a_n = 3 + (n-1)\ldots\ldots\ldots$.

2) –5; –8; –11; ... . $a_1 = \ldots\ldots\ldots$, $a_2 = \ldots\ldots\ldots$,

$d = \ldots\ldots\ldots$, $a_n = \ldots\ldots\ldots$.

3) 1; 3,5; 6; ... $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

8 Число –15 является членом арифметической прогрессии 3; 1; –1; ... . Найти номер этого члена.

$a_1 = 3$, $a_2 = \ldots\ldots$, откуда $d = \ldots\ldots = \ldots\ldots$. Так как по условию $a_n = -15$, то по формуле $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ имеем

$$-15 = 3 + (n-1)\cdot \ldots\ldots\ldots.$$

Решим относительно n полученное уравнение:

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ответ. $n = \ldots\ldots\ldots$.

9 Найти разность арифметической прогрессии, если $a_1 = -8$, $a_5 = 4$.
По формуле общего члена для $n = 5$ имеем уравнение

$$4 = -8 + (5 - 1) \cdot d.$$

Решим это уравнение относительно d: ....

....

Ответ. $d =$ ....

10 Найти первый член арифметической прогрессии, если $d = -7$, $a_5 = -28$.

В формулу общего члена $a_n =$ .... подставим $n = 5$, $a_5 = -28$, $d = -7$ и получим уравнение относительно a_1:

.... $= a_1$ ....

....

Ответ. $a_1 =$ ....

11* Дана арифметическая прогрессия, в которой $a_1 = 25$, $d = -3$. При каких значениях n члены этой прогрессии отрицательны?

Для данной прогрессии $a_n =$ .... По условию $a_n < 0$, когда .... < 0. Решим это неравенство относительно n: ....

....

Ответ. При n ....

12* Записать формулу n-го члена арифметической прогрессии, у которой:

1) $a_4 = -18$, $a_6 = -12$. Согласно формуле $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ $(n > 1)$,

$a_5 = \dfrac{a_4 + a_6}{2} =$ .... Тогда $d = a_5 - a_4 =$ ....

По формуле n-го члена, например для a_4, получим $-18 = a_1 + 3 \cdot$ ...., откуда $a_1 =$ ....

Ответ. $a_n =$ .... $+ (n - 1) \cdot$.......

2) $a_3 = 26$, $a_8 = 48$. С помощью формулы n-го члена для a_3 и a_8 составим систему уравнений: $\begin{cases} 26 = a_1 + 2d, \\ 48 = \text{..........} \end{cases}$

Решим эту систему относительно a_1 и d:

....

Ответ. $a_n =$ ....

III

13 Записать формулу n-го члена арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -18$, $d = 0{,}2$. ....

....

2) $a_6 = -13$, $d = -2$. ....

....

3) $a_1 = 26$, $a_8 = 5$. ....

....

4) $a_2 = 11$, $a_7 = 49$. ....

....

Ответ. 1) ....; 2) ....;

3) ....; 4) ....

§ 19. Сумма n первых членов арифметической прогрессии

I

1 Найти рациональным способом сумму всех натуральных чисел от 1 до 10.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = (1 + 10) + (2 + 9) + ($..............$) +$

$+ ($..............$) + ($..............$) = 11 \cdot$ .... $=$ ....

2 Найти $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ рациональным способом.

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$

$+$

$S = 9 + 8 +$ .... $+$ .... $+$ .... $+$ .... $+$ .... $+$ .... $+$ ....

$2S = 10 + 10 +$ .... $+$ .... $+$ .... $+$ .... $+$ .... $+$ .... $+$ ....

$2S = 10 \cdot$ ...., $2S =$ ...., откуда $S =$ .... $: 2$, $S =$ ....

Ответ. $S =$ ....

II

3 Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = 2$, $a_n = 40$, $n = 30$. По формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ находим

$S_{30} = \frac{2 + 40}{2} \cdot 30 =$ ....

2) $a_1 = -3$, $a_n = -23$, $n = 20$. $S_{20} =$ ....

4 Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии:

1) $-18; -14; -10; \ldots$, если $n = 12$.

$d = -14 - (-18) =$ ...., $a_{12} = -18 + 11 \cdot$ .... = ...

$S_{12} = \frac{-18 + \ldots\ldots}{2} \cdot$ .... = ...

2) $1{,}5;\ 5{,}5;\ 9{,}5;\ \ldots$, если $n = 10$. ....

....

5 Арифметическая прогрессия задана формулой n-го члена $a_n = 7n - 2$. Найти S_{40}.

$a_1 = 7 \cdot 1 - 2 =$ ....

$S_{40} =$ ....

Ответ. ....

6 Найти a_1 и d арифметической прогрессии, если $a_6 = 53$, $S_6 = 150$. По формуле общего члена арифметической прогрессии $53 = a_1 + 5d$, откуда $a_1 = 53 - 5d$. По формуле суммы n первых членов арифметической прогрессии $150 = \frac{(53 - 5d) + 53}{2} \cdot 6$. Решим это уравнение относительно d:

....

....

....

Так как $53 = a_1 + 5 \cdot$ ...., то $a_1 =$ ....

Ответ. $a_1 =$ ...., $d =$ ....

III

7 Найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, если:

1) $a_1 = -4$, $a_n = 18$, $n = 15$. ....

2) $a_1=\frac{1}{2}$, $d=\frac{3}{2}$, $n=12$. ....

....

3) $a_1=42$, $d=-4$, $a_n=10$. ....

....

8 Найти a_n и d арифметической прогрессии, если $a_1=-\frac{1}{2}$, $n=11$, $S_{11}=-33$.

....

....

....

Ответ. $a_n=$........, $d=$........ .

§ 20. Геометрическая прогрессия

(I)

1 Вычислить:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^3=$ ....; 2) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3=$ ....;

3) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4=$ ....; 4) $5\cdot2^3=$ ....;

5) $(5\cdot2)^3=$ ....; 6) $8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^5=$ ....;

7) $2^{10}:2^5=$ ....; 8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}:\left(\frac{1}{3}\right)^7=$ ....

2 Вычислить:

1) $\sqrt{81}=$ ....; 2) $\sqrt{\frac{9}{64}}=$ ....; 3) $\sqrt{16\cdot25}=$ ....

3 Найти n, если:

1) $2^5=2^n$; $n=$........; 2) $3^7=3^{n-1}$; ....;

3) $(-2)^n=16$; ....; 4) $2^{n+1}=32$; ....

4 Решить уравнение:

1) $x^2 = 4$; 2) $a^4 = \frac{1}{16}$; 3) $x^3 = -8$.

Ответ. 1) ....; 2) ....; 3) ....

(II)

5 Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии:

1) 9; 3; 1; ... ; $b_1 =$ ...., $b_2 =$ ...., $q = \frac{b_2}{b_1} =$ .... $=$ ....;

2) –10; 30; –90; ... .

6 Записать первые 4 члена геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$. $b_1 = 8$, $b_2 = b_1 \cdot q =$ ...., $b_3 = b_2 \cdot q =$ ....,

$b_4 =$ ....

2) $b_1 = -3$, $q = -2$. $b_1 = -3$, $b_2 = b_1 \cdot q =$ ...., $b_3 =$ ....,
$b_4 =$ ....

7 Доказать, что последовательность, заданная формулой n-го члена $b_n = 6^{n+1}$, является геометрической прогрессией.

$b_{n+1} = 6^{(n+1)+1} = 6^{\boxed{}}$, $b_n \neq 0$,

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{6^{\boxed{}}}{6^{n+1}} = 6^{\boxed{}} =$ .... — не зависит от n, значит, данная последовательность (по определению) — геометрическая прогрессия.

8 Найти b_6, если:

1) $b_1 = 7$, $q = -2$. По формуле n-го члена геометрической прогрессии $b_6 = 7 \cdot (-2)^{6-1} =$ ....

2) $b_1 = -3$, $q = \frac{1}{2}$ ....

9 В геометрической прогрессии $b_1 = 5$, $q = 3$. Найти номер члена прогрессии, равного 405.

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Если $b_n = 405$, $b_1 = 5$ и $q = 3$, то нужно решить уравнение $405 = 5 \cdot 3^{n-1}$ относительно n:

$405 = 5 \cdot 3^{n-1}$, откуда $3^{n-1} =$ ...., $3^{n-1} = 3$...........,

$n - 1 =$ ...., $n =$ ....

Ответ. ....

10 Найти знаменатель геометрической прогрессии, если $b_1 = 64$, $b_6 = -2$.

По формуле n-го члена геометрической прогрессии получим уравнение $-2 = 64 \cdot q^{6-1}$.

Решим это уравнение относительно q:

....

....

....

Ответ. ....

11 Найти первый и третий члены геометрической прогрессии с положительными членами, если $b_2 = \frac{2}{9}$, $b_4 = \frac{1}{8}$.

$b_3 = \sqrt{b_2 \cdot b_4} =$ ....

$q = \frac{b_3}{b_2} =$ ...., $b_1 = b_2 : q =$ ....

Ответ. $b_1 =$ ...., $b_3 =$ ....

12 По формуле сложных процентов $b = b_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ с помощью микрокалькулятора найти:

1) b, если $b_1 = 10\,000$, $p = 4$, $n = 4$;

....

....

2) b_1, если $b = 16\,224$, $p = 4$, $n = 2$;

....

....

3) p (с точностью до 1), если $b = 57\,881{,}25$, $b_1 = 50\,000$, $n = 3$.

....

....

13 Банк начисляет по вкладам 3% годовых. Сколько денег будет на счету у вкладчика через 4 года, если он положил на счёт 200 000 р. и не снимал со счёта деньги?

....

....

....

III

14 Найти седьмой член геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = 64$, $q = \frac{1}{2}$. ....

2) $b_1 = 1$, $b_2 = -2$. ....

15 Найти знаменатель геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 2$, $b_3 = 162$.

....

....

Ответ. ....

§ 21. Сумма n первых членов геометрической прогрессии

I

1 Вычислить:

1) $3^4 =$ ....; 2) $3^3 \cdot 3^2 =$ ....; 3) $(3^3)^2 =$ ....;

4) $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5 =$ ....; 5) $8^7 : 8^5 =$ ....

2 Решить уравнение:

1) $2^n = 16$; 2) $3^{n-1} = 27$; 3) $2^{n-1} = 1$.

....

....

Ответ. .... Ответ. .... Ответ. ....

II

3 Найти сумму n первых членов геометрической прогрессии, если:

1) $b_1 = \frac{1}{3}$, $q = 3$, $n = 5$. $S_5 = \dfrac{\frac{1}{3}(1-3^5)}{1-3} =$ ....

....

2) $b_1 = -\frac{3}{2}$, $q = -2$, $n = 6$. $S_6 = \dfrac{-\frac{3}{2}(1-(-2)^6)}{1-(-2)} =$ ....

....

Ответ. 1) ....; 2) ....

4 В геометрической прогрессии найти b_1 и b_5, если $q=-2$, $S_5=44$. По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ имеем $44=\frac{b_1(1-(-2)^5)}{1-(-2)}$.

Решим это уравнение относительно b_1:

....

По формуле n-го члена геометрической прогрессии $b_n=b_1q^{n-1}$

найдём $b_5=$ .... $\cdot(-2)^{\square}=$ ....

Ответ. $b_1=$ .... , $b_5=$ ....

5 В геометрической прогрессии найти число её членов n, если известно, что $S_n=-7\frac{1}{2}$, $b_1=-4$, $q=\frac{1}{2}$.

По формуле суммы n членов имеем: $-7\frac{1}{2}=\frac{\ldots\ldots\left(1-(\ldots\ldots)^n\right)}{1-\ldots\ldots}$.

Решим это уравнение относительно n:

....

....

Ответ. $n=$ ....

6 В геометрической прогрессии найти:

1) b_n, если $b=5$, $q_1=2$, $S_n=155$. По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии $155=\frac{\ldots\ldots\cdot\left(1-\ldots\ldots^n\right)}{1-\ldots\ldots}$.

Решим полученное уравнение относительно n:

....

.... $n=$ ....

По формуле общего члена $b_n=b_1q^{n-1}$ найдём $b_{\square}=$ ....

2) n и q, если $b_1=-2$, $b_n=-486$, $S_n=-728$. Воспользуемся следующей формулой суммы n первых членов геометрической прогрессии: $S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}$.

Подставив в неё $b_1=-2$, $b_n=-486$, $S_n=-728$, получим уравнение

.... , которое решим относительно q: ....

....

Знаем, что $q = \ldots\ldots\ldots$, по формуле общего члена имеем $-486 = -2 \cdot \boxed{}^{\,n-1}$. Отсюда найдём n: ....

....

Ответ. 1) $b_n = \ldots\ldots\ldots$; 2) $q = \ldots\ldots\ldots$, $n = \ldots\ldots\ldots$.

7 Геометрическая прогрессия задана формулой $b_n = -3 \cdot 2^{n+1}$. Найти S_7.

$b_1 = \ldots\ldots\ldots$, $b_2 = \ldots\ldots\ldots$, отсюда $q = \ldots\ldots\ldots$.

По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_7 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ответ. $S_7 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

8 Найти сумму первых шести членов геометрической прогрессии 128; 64; 32; ... .

....

....

....

Ответ. ....

III

9 В геометрической прогрессии $b_1 = -1$, $b_2 = 3$, $b_n = 243$. Найти q, n, S_n.

....

....

....

....

Ответ. $q = \ldots\ldots\ldots$, $n = \ldots\ldots\ldots$, $S_{\boxed{}} = \ldots\ldots\ldots$.

10 В геометрической прогрессии $b_1 = 2$, $q = 4$, $S_n = 682$. Найти n и b_n.

....

....

....

....

Ответ. ....

Случайные события

§ 22. События

I

Заполнить пропуски (1—3).

1 В результате бросания игрального кубика на верхней грани может появиться число очков, равное: 1; ....

2 В результате бросания монеты может появиться:

орёл; ....

3 В полной колоде карт (36 листов) находится:

1) карт пиковой масти — ....

2) карт красных мастей — ....

3) валетов чёрных мастей — ....

4) тузов — ....

5) карт с числами — ....

6) карт с картинками — ....

II

4 Закончить формулировку определения.

1) **Невозможным** называют событие, которое в данных условиях ....

2) **Достоверным** называют событие, которое в данных условиях ....

3) **Случайным** называют событие, которое в данных условиях ....

4) **Несовместными** называют два события, которые в данных условиях ....

5 Записать, **невозможным**, **достоверным** или **случайным** является событие, которое может произойти в результате бросания двух игральных костей.

На первой кости выпало 6 очков, а на второй выпало 7 очков — *невозможное*.

1) На обеих костях выпало по 6 очков — ....

2) Сумма выпавших очков больше 1 — ....

3) Сумма выпавших очков равна 7 — ....

4) Произведение выпавших очков равно 6 — ....

5) Произведение выпавших очков равно 7 — ....

6 Записать, какие из пар событий, которые могут произойти в результате одного бросания игральной кости, являются **совместными**, а какие — **несовместными**.

Выпало 2 очка; выпало 6 очков — *несовместные*.

1) Выпало 3 очка; выпало число очков, кратное 6 — ....

2) Выпало 5 очков; выпало число очков, не меньшее, чем 4 — ....

3) Выпало 3 очка; выпало число очков, не большее, чем 3 — ....

7 Обвести номера пар равновозможных событий, которые могут произойти в результате одного бросания игральной кости.
1) Выпало 3 очка; выпало 4 очка.
2) Выпало 6 очков; выпало нечётное число очков.
3) Выпало нечётное число очков; выпало чётное число очков.
4) Выпало 3 очка; выпало число очков, кратное 3.

III

8 Записать **невозможным**, **достоверным** или **случайным** является событие.
1) Два ученика одного класса (в котором 30 человек) родились в один и тот же день — ....
2) Сумма очков, выпавших на двух брошенных игральных костях, меньше 12 — ....
3) Произведение очков, выпавших на двух брошенных игральных костях, не меньше 1 — ....
4) В текущем году 367 дней — ....

9 Испытание состоит в следующем: из полного набора домино извлекается одна костяшка и прочитываются числа очков на её половинках. Записать, **совместными** или **несовместными** являются события.

1) Одно число равно 2; второе число нечётное — ....

2) Оба числа чётные; одно число больше другого — ....

....

3) Сумма очков равна 1; произведение очков равно 0 — ....

....

4) Произведение очков равно 0; сумма очков равна 8 — ....

....

10 Из колоды карт (36 листов) наугад вынимается одна карта. Являются ли **равновозможными** события:

1) вынута дама бубей; вынут валет красной масти — ....

2) вынута семёрка треф; вынут король червей — ....

§ 23. Вероятность события

I

1 Заполнить пропуски.

1) В классе 25 учащихся, среди которых 11 мальчиков. Мальчики составляют .... часть учащихся класса.

2) В вазе лежат 5 яблок и 6 груш. Груши составляют .... часть всех фруктов, находящихся в вазе.

3) В полном наборе домино дубли составляют .... часть всех костяшек.

4) В полной колоде карт (36 листов): карты красной масти составляют .... часть всех карт; трефовые карты составляют .... часть всех карт; бубновый туз составляет .... часть всех карт.

2 Заполнить пропуски.

1) Куб имеет .... граней.

2) Куб имеет .... рёбер.

3) Куб имеет .... вершин.

4) Куб с ребром 3 см имеет объём .... и площадь поверхности ....

II

3 Заполнить пропуски в предложениях.

1) Измерением степени достоверности наступления событий занимались в XVII в. французские учёные ....

2) Долю успеха наступления некоторого события математики называют ....

3) Вероятность события A обозначают ....

4) Вероятность события A равна ...., где n — число ...., m — число ....

4 В ящике находятся 3 белых, 5 красных и 9 чёрных шаров. Наугад вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар:

1) Белый. Число всех равновозможных исходов $n = 3 + 5 + 9 =$ $=$ .... Событию A (появился белый шар) благоприятствуют $m = 3$ исходов. $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{\dots} =$ ....

2) Красный. Событие A — появился красный шар, $n =$ ...., $m =$ .... Тогда $P(A) = \frac{m}{n} =$ ....

3) Чёрный. Событие A — ....

5 На двенадцати одинаковых карточках написаны числа от 1 до 12 (на каждой карточке — одно число). Карточки перемешали и наугад вынули одну. Найти вероятность того, что на карточке оказалось:

1) Число 5. Число всех возможных исходов $n = 12$, $m = 1$, поэтому $P = \frac{m}{n} =$ .... ;

2) Чётное число. $m =$ ....

3) Число, кратное 3. ....

4) Число, большее 6. ....

5) Число, не меньшее 10. ....

6) Число, большее 2, но меньшее, чем 7 ....

(III)

6 Раскручивается стрелка рулетки, поле которой разделено на 20 равных секторов, пронумерованных числами от 1 до 20. Найти вероятность того, что стрелка остановилась на секторе:

1) с номером, кратным 5 ....

2) номер которого не меньше 16 ....

Ответ. 1) ....; 2) ....

7 Случайным образом из колоды карт (36 листов) извлекается одна карта. Найти вероятность того, что эта карта:

1) девятка пик ....

2) дама красной масти ....

3) король ....

4) карта с числом ....

Ответ. 1) ....; 2) ....; 3) ....; 4) ....

§ 24. Решение вероятностных задач с помощью комбинаторики

(I)

1 С помощью цифр 5 и 6 записать всевозможные трёхзначные числа: ....

2 Сколько различных двузначных чисел (цифры в которых не повторяются) можно записать с помощью цифр:

1) 1 и 2 ....

2) 1, 2 и 3 ....

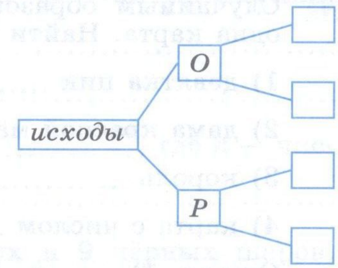
3) 1, 2, 3 и 4 ....

Ответ. 1) ....; 2) ....; 3) ....

3 Бросают два игральных тетраэдра: белый и красный (грани каждого пронумерованы числами от 1 до 4). Заполнить таблицу вариантов появления чисел на нижних гранях тетраэдров:

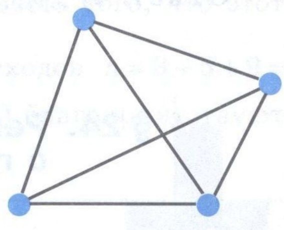
Красный тетраэдр / Белый тетраэдр	1	2	3	4
1	11	12		
2				
3				
4				

4 Монету бросают дважды. Завершить построение графа-дерева, иллюстрирующего возможные варианты (исходы испытания) появления **орла** (O) и **решки** (P).

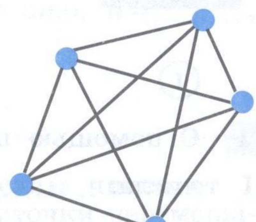


5 Сколькими способами можно выбрать двоих школьников для дежурства в столовой, если:

школьников четверо? С помощью графа определим число различных пар, которые можно составить из четверых школьников: $\frac{4 \cdot (4-1)}{2} = 6$.



1) школьников пятеро? Можно составить .... = 10 пар.



2) школьников шестеро? Можно образовать .... различных пар.

(II)

6 Имеются две рулетки, поверхность каждой из которых разделена на 8 равных секторов, пронумерованных числами от 1 до 8. Стрелки рулеток раскручивают. Найти вероятность события:

A — на первой рулетке стрелка остановилась на числе 3, а на второй — на числе 5.

Согласно правилу произведения число возможных исходов испытания

$$n = 8 \cdot \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots.$$

Событию A благоприятствует единственный исход, т. е. $m = 1$.

Таким образом, $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{\ldots}$.

1) B — на первой рулетке стрелка остановилась на числе 8, а на второй — на чётном числе. Число исходов, благоприятствующих событию B — появлению числа 8 на первой рулетке и чётного числа (их четыре: 2, 4, 6, 8) на второй рулетке, находится по правилу произведения: $m = 1 \cdot 4 = 4$. Тогда $P(B) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{4}{\ldots} =$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

2) C — на первой рулетке стрелка остановилась на чётном числе, а на второй — на нечётном. Согласно правилу .... событию C благоприятствуют $m = 4 \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots$ исходов. Таким образом, $P(C) = \dfrac{m}{n} = \ldots\ldots = \ldots\ldots$.

3) D — на первой рулетке стрелка остановилась на числе, большем 3, а на второй — на числе, не большем 3. Чисел, на которых может остановиться стрелка первой рулетки, всего 5. Чисел, на которых может остановиться стрелка второй рулетки, — .... Согласно правилу .... число исходов, благоприятствующих событию D, равно $m = 5 \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots$.

Тогда $P(D) = \dfrac{m}{n} = \ldots\ldots\ldots$.

7 Брошены две игральные кости: белая и красная. Найти вероятность события:

A — на обеих костях появились очки, кратные 3.

Число возможных исходов испытания $n = \ldots\ldots\ldots$.

$m = \ldots\ldots\ldots$, $P(A) = \ldots\ldots\ldots$.

1) B — на костях появились разные очки ....

....

2) C — выпали очки, сумма которых равна 4 ....

....

3) D — выпали очки, сумма которых не больше 4 ....

....

8* В коробке лежат 4 белых и 2 чёрных шара. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность события:

1) A — вынуты 2 белых шара. Из 6 имеющихся шаров можно составить .... различных пар, т. е. число всех возможных исходов испытания $n=$........ . Событию A благоприятствуют все возможные пары, образованные из 4 имеющихся белых шаров. Таких пар ...., т. е. $m=$...... . Тогда $P(A)=\frac{m}{n}=$........ .

2) B — вынуты белый и чёрный шары. Событию B благоприятствуют все пары, составленные из одного белого и одного чёрного шаров. Согласно правилу произведения таких пар ...., т. е. $m=$....... . Таким образом, $P(B)=\frac{m}{n}=$........ .

III

9 Бросают монету и игральную кость. Найти вероятность события:

1) A — на монете появился **орёл**, а на кости — 6 очков ....
2) B — на монете появилась **решка**, а на кости — число очков, кратное 3 ....

10 Имеются две рулетки: белая и жёлтая. Поле белой рулетки разделено на 6 равных секторов (пронумерованных числами от 1 до 6). Поле жёлтой рулетки разделено на 10 равных секторов (пронумерованных числами от 1 до 10). Стрелки обеих рулеток раскрутили. Найти вероятность события:

1) A — стрелка белой рулетки остановилась на секторе с нечётным номером, а стрелка жёлтой рулетки остановилась на секторе, номер которого не меньше 5 ....

....

2) B — стрелки рулеток остановились на секторах, номера которых больше 3 ....

....

11* В вазе лежат 3 яблока и 4 апельсина. Не глядя, из вазы вынимают два плода. Найти вероятность того, что:

1) вынуты два яблока ....

2) вынуты два апельсина ....

3) вынуты яблоко и апельсин ....

§ 25. Геометрическая вероятность

I

1 Найти отношение длин отрезков:

1) $AB : BC$ .... Ответ. ....

2) $CD : AD$ .... Ответ. ....

3) $AB : AD$ .... Ответ. ....

4) $BC : AD$ .... Ответ. ....

2 Найти отношение площадей:

1) треугольников MBN и ABC ....

2) квадратов $BKPM$ и $BCDA$ ....

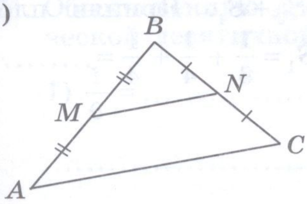
3) квадратов $NBZQ$ и $ABCD$ ....

4) кругов с радиусами r и R ....

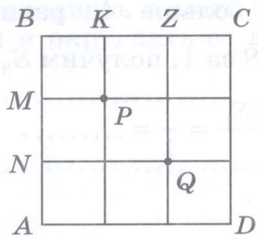
5) секторов 1 и 2 ....

6) секторов 2 и 5 ....

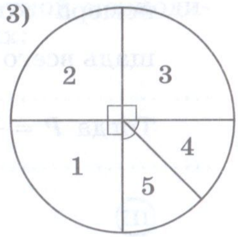
1)



2)



3)



Ответ. 1) ....; 2) ....; 3) ....;

4) ....; 5) ....; 6) ....

3 Найти отношение объёмов кубов с рёбрами:

1) 1 и 3. .... Ответ. ....

2) 2 и 3. .... Ответ. ....

(II)

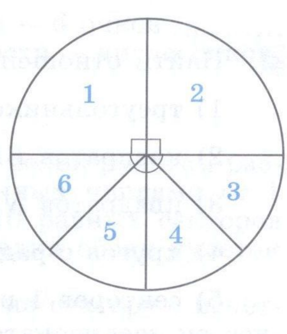
4 Дано: $AB = 10$ см, $CD = 2$ см, $DB = 3$ см. На отрезке AB случайным образом отмечается точка X. Найти вероятность того, что точка X попадёт:

1) на отрезок CD. Вероятность попадания точки X на отрезок CD равна $P = \frac{CD}{AB} =$ ....;

2) на отрезок AD. Так как $AD =$ ....; $P = \frac{AD}{AB} =$ ....;

3) на отрезок AC. Так как $AC =$ ....; $P =$ ....

5 Поверхность рулетки разделена на 6 секторов. Найти вероятность того, что стрелка рулетки после раскручивания остановится:



1) на секторе 1. Площадь S_1 сектора 1 в .... раза меньше площади S всего круга, поэтому вероятность того, что стрелка остановится на секторе 1, равна $P = \frac{S_1}{S} =$ ....;

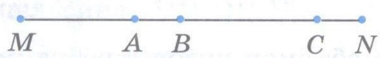
2) на секторе 4. Площадь S_4 сектора 4 в .... раз меньше площади S всего круга, поэтому $P =$ ....;

3) на секторе, номер которого не больше 4. Площадь секторов, номера которых больше 4, равна $S_3 + S_2 + S_1$. Приняв площадь всего круга S за 1, получим $S_3 + S_2 + S_1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$ ....

Тогда $P = \frac{S_3 + S_2 + S_1}{S} = \frac{\ }{1} =$ ....

(III)

6 Дано: $MN = 15$ см, $MA = 5$ см, $AB = CN = 2$ см. На отрезке MN случайным образом отмечается точка X. Найти вероятность того, что эта точка попадёт на отрезок:

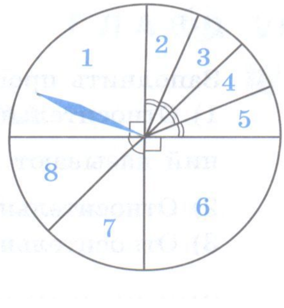


1) MA. .... Ответ. ....

2) MB. .... Ответ. ....

3) BC. .... Ответ. ....

7 Раскручивается стрелка рулетки, сектора которой пронумерованы числами от 1 до 8. Найти вероятность того, что стрелка остановится:



1) на секторе 7. ....

Ответ. ....

2) на секторе 3. ....

Ответ. ....

§ 26. Относительная частота и закон больших чисел

I

1 Десять лет своей жизни юноша, которому сейчас 20 лет, учился в школе, а 2 года он служил в армии. Какую часть своей жизни юноша:

1) учился в школе? ....

2) служил в армии? ....

Ответ. 1) .... ; 2) ....

2 Обыкновенную дробь представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби и округлить её до сотых:

1) $\frac{1}{6}$ = ...

....

2) $\frac{2}{7}$ = ...

....

3 Найти, сколько процентов составляет число M от числа N, если:

1) $M = 14$, $N = 200$ ....

2) $M = 33$, $N = 250$ ....

Ответ. 1) .... ; 2) ....

II

4 Заполнить пропуски:

1) Относительной частотой события A в данной серии испытаний называют ....

2) Относительную частоту события A обозначают ....

3) Относительная частота события A находится по формуле ....

4) Под статистической вероятностью события понимают число, ...

5 Заполнить таблицу:

Число испытаний с подбрасыванием гайки	10	40	100	200	500	1000
Частота падения гайки плашмя	8	31	77			
Относительная частота падения гайки плашмя	0,8	$\frac{31}{40}$		0,85		
Число падений гайки на грань	2				96	
Относительная частота падения гайки на грань	0,2					0,18

III

6 В изготовленной партии из 2000 одинаковых игрушек 24 игрушки оказались бракованными. Найти относительную частоту появления в данной партии бракованной игрушки (результат выразить в процентах).

....

Ответ. ....

Случайные величины

§ 27. Таблицы распределения

I

1 Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что:

1) на обеих костях появилось по 3 очка ....

2) на одной кости появилось 1 очко, а на другой — 2 очка ....

3) сумма выпавших очков равна 2 ....

4) сумма выпавших очков равна 11 ....

Ответ. 1) ....; 2) ....; 3) ....; 4) ....

2 Имеются две одинаковые рулетки, поверхность каждой из которых разделена на 4 одинаковых сектора. Сектора пронумерованы числами от 1 до 4. Раскручивают стрелки рулеток и прочитывают числа, на которых остановились стрелки. Затем находят сумму появившихся чисел. Заполнить таблицу возможных сумм этих чисел и найти вероятность того, что полученная описанным способом сумма равна: 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6.

	2-я рулетка			
1-я рулетка	1	2	3	4
1	2	3		
2				
3				
4				

....

Ответ. 1) ....; 2) ....; 3) ....; 4) ....

3 Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X — числа очков, появившегося при бросании игрального кубика:

1) на одной грани которого отмечено 1 очко, а на остальных — 2 очка. $X_1 = 1$, $X_2 = 2$. Всего граней $n = 6$. При этом $m_1 = 1$, $m_2 = 5$, поэтому $P_1 = \frac{1}{6}$, $P_2 =$ .... Таблица распределения имеет вид:

X	1	2
P	$\frac{1}{6}$	

2) на двух гранях которого отмечено 1 очко, а на остальных — 2 очка. $X_1 =$ ...., $X_2 =$ ....; $n = 6$, $m_1 =$ ...., $m_2 =$ ....; $P_1 =$ ...., $P_2 =$ .....

X	1	2
P		

3) на одной грани которого отмечено 1 очко, на трёх — 2 очка, на двух — 3 очка. $X_1 =$ ...., $X_2 =$ ...., $X_3 =$ ....; $n = 6$, $m_1 =$ ...., $m_2 =$ ...., $m_3 =$ ....; $P_1 =$ ...., $P_2 =$ ...., $P_3 =$ .....

X			
P			

4) на четырёх гранях которого отмечено 1 очко, на одной — 2 очка, на одной — 3 очка. ....

X	
P	

4 Составить таблицу распределения по частотам M значений случайной величины X — цифр, встречающихся в номерах квартир, которые посетил за день участковый врач:

1) 8, 5, 23, 48, 17, 9, 64, 109, 37, 83, 71.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
подсчёт	I	III	I							
M	1	3	1							

2) 82, 56, 31, 19, 4, 26, 8, 40, 67, 35, 105.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
подсчёт										
M										

5 Используя данные задачи 4, составить таблицу распределения по относительным частотам значений величины X в выборке.

1) Число всех цифр в выборке $N = 20$. По формуле $W = \frac{M}{N}$ находим относительную частоту W для каждого значения X и заносим её в таблицу:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M	1	3	1							
W	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$							

2) Число всех цифр в выборке $N =$......

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M										
W										

III

6 На стол одновременно бросают два игральных тетраэдра, грани которых пронумерованы числами от 1 до 4. Составить таблицу распределения по вероятностям значений случайной величины X — произведений очков на гранях тетраэдров, касающихся поверхности стола.

Составим таблицу произведений выпавших на тетраэдрах очков:

	2-й тетраэдр			
1-й тетраэдр	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

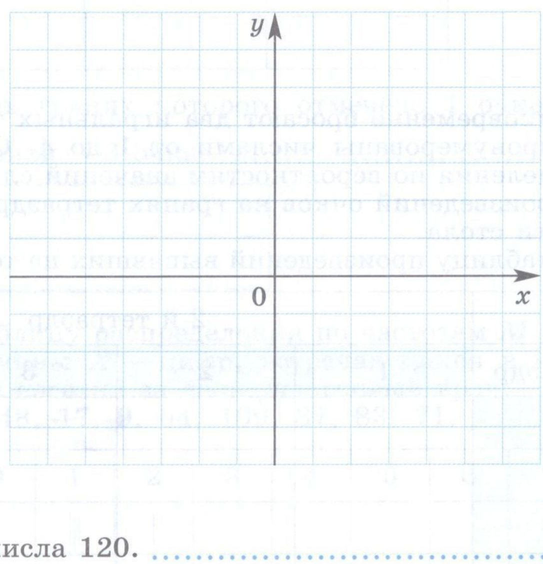
X	
P	

7 Известны номера месяцев, в которых родились учащиеся одного класса: 3, 5, 12, 4, 1, 6, 8, 2, 7, 3, 5, 9, 10, 7, 1, 7, 10, 9, 3, 11, 12, 5, 9, 12, 2, 12. На основании приведённых данных составить таблицу распределения по частотам M и по относительным частотам W значений случайной величины X — номеров месяцев рождения учащихся класса.

§ 28. Полигоны частот

I

1 На координатной плоскости отметить точки $A\,(0; 3)$, $B\,(4; 0)$, $C\,(5; 2)$, $D\,(-1; 4)$, $E\,(3; -2)$, $F\,(-5; -3)$.



2 Найти:

1) 15% от числа 120. ....

2) число, 45% которого равны 30. ....

3) сколько процентов составляет число 85 от числа 60. ....

4) сколько процентов составляет число 12 от числа 96. ....

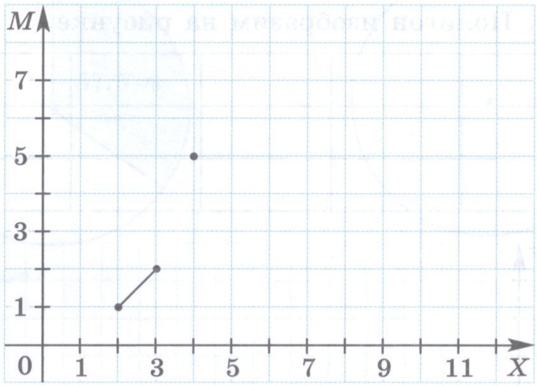
Ответ. 1) ....; 2) ....; 3) ....; 4) ....

II

3 Распределение величины X по частотам M представлено в таблице:

X	2	3	4	6	7	8	9
M	1	2	5	7	6	4	3

Завершить представление распределения X в виде полигона частот.



4 Используя данные таблицы распределения по частотам значений случайной величины X, построить полигон относительных частот распределения величины X.

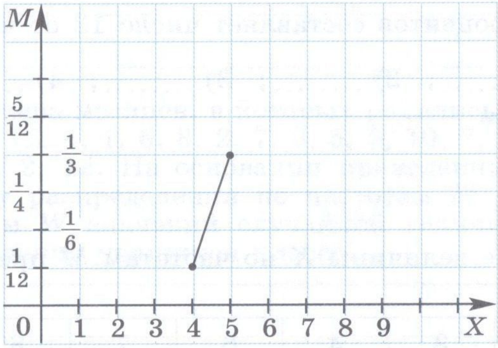
1)

X	4	5	6	7
M	1	4	4	3

$N = \Sigma M = 1 + 4 + 4 + 3 = 12$. Для каждого значения X найдём его относительную частоту в выборке по формуле $W = \dfrac{M}{N}$:

X	4	5	6	7
M	1	4	4	3
W	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$		

Построим полигон относительных частот.

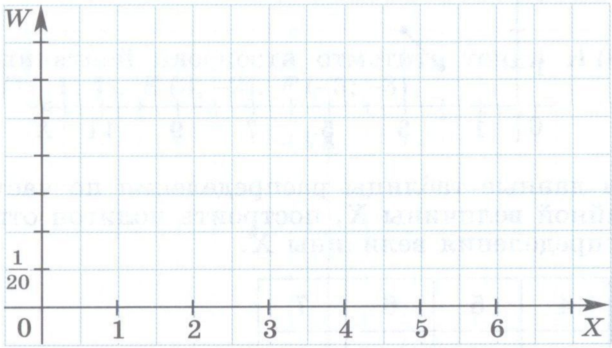


2)

X	1	2	3	4	5	6
M	2	3	5	7	2	1

$N =$ .... Полигон изобразим на рисунке.

X						
M						
W						



5 Используя транспортир, представить в виде круговой диаграммы распределение по относительным частотам значений случайной величины X, заданной распределением по частотам.

1)

X	1	2	3
M	3	4	1

Найдём относительные частоты каждого значения случайной величины и выразим их в процентах: $N = 3 + 4 + 1 = 8$, $W_1 = \frac{M_1}{N} = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$, $W_2 = \frac{M_2}{N} = \frac{4}{8} =$ ...., $W_3 =$ ....

Приняв площадь круга за 100%, значения W_1, W_2 и W_3 изобразим в виде секторов с соответствующими площадями. Центральные углы соответствующих секторов будут равны:

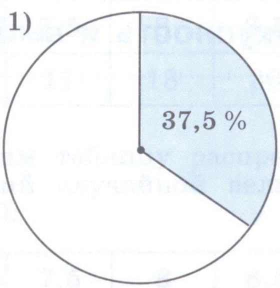
$\frac{360° \cdot 3}{8} = 135°$, $\frac{360° \cdot \ldots\ldots}{8} = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\frac{360° \cdot \ldots\ldots}{8} = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

2)

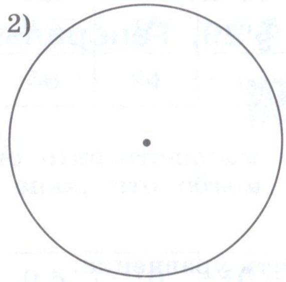
X	1	2	3	4
M	1	3	4	2

$N =$ ...., $W_1 =$ ...., $W_2 =$ ...., $W_3 =$ ...., $W_4 =$ .... Центральные углы соответствующих секторов будут равны: .... Изобразим их на рисунке.

1)



2)



III

6 Построить полигон частот и полигон относительных частот значений случайной величины X, распределение которой представлено в таблице:

X	1	2	3	4	5
M	3	5	6	4	2

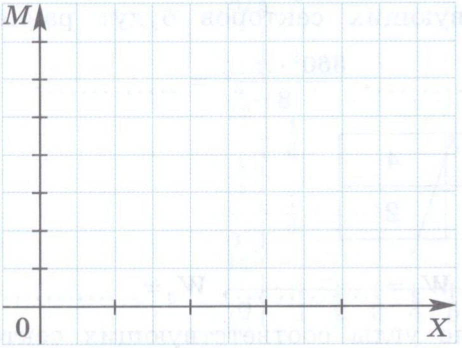
....

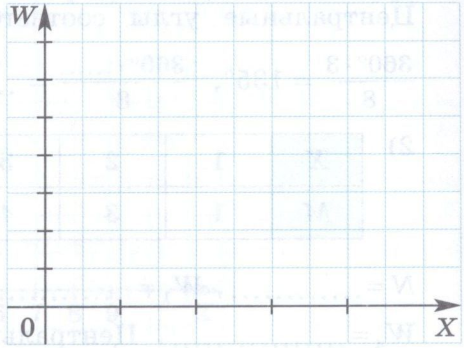
....

....

X					
M					
W					

Полигоны частот изобразим на рисунках.

1) 

2) 

§ 29. Генеральная совокупность и выборка

I

1 Решить уравнение:

1) $\frac{5}{x}=\frac{2}{3}$; 2) $3=\frac{45}{x}$; 3) $\frac{x}{4}=12$.

....

Ответ. 1) ....; 2) ....; 3) ....

2 Найти величины углов треугольника, если известно, что они пропорциональны числам 1, 3 и 5.

....

....

Ответ. ....

II

3 Объём текста 5000 слов. Определить примерное число глаголов в нём, если относительная частота появления глаголов в тексте примерно равна: 1) 0,2; 2) 0,3.

1) По условию объём текста (генеральной совокупности) $s=5000$, относительная частота глаголов в тексте $W=0{,}2$. По формуле (2)

учебника число глаголов во всём тексте $S = s \cdot W = 5000 \cdot 0{,}2 =$
$=$ ....

2) ....
....

Ответ. 1) ....; 2) ....

4 Фабрика по пошиву кожаных изделий должна изготовить 1500 пар мужских перчаток для офицеров Северного флота. Сколько пар каждого размера должна пошить фабрика, если результаты выявления размеров у 200 офицеров, выбранных случайным образом, показали, что размеры перчаток X распределены в этой выборке по частотам M следующим образом:

X	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11
M	11	18	30	42	50	24	15	10

Составим таблицу распределения по относительным частотам значений случайной величины X, зная, что объём выборки $N = 200$:

X	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11
M	11	18	30	42	50	24	15	10
W	0,225							

По формуле $S = 1500 \cdot W$ найдём число пар каждого размера в совокупности из 1500 пар:

X	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11
S								

III

5 При определении сорта изготовленных керамических изделий в партии объёмом 1300 штук контролёр первоначально определил сортность у 100 случайно выбранных из партии изделий. Результаты занёс в таблицу:

Сорт	I	II	III
Количество изделий	46	25	29

Определить примерное число изделий I и II сортов вместе в изготовленной партии. ....

Ответ. ....

6 В водоём запустили 50 000 мальков карпа. Через год выловили случайным образом 100 подросших карпов и каждого взвесили с точностью до 10 г. После разбиения на классы полученных данных о весе рыб (X) составили таблицу распределения веса по частотам (M):

Номер класса	1	2	3	4	5
X (г)	150—199	200—249	250—299	300—349	350—399
M	9	22	35	24	10

Считая, что за год не погибло практически ни одной рыбы, определить, сколько примерно рыб в водоёме попадает в каждый весовой класс.

....

....

Ответ. ....

§ 30. Размах и центральные тенденции

I

1 Найти значение выражения $a - b$, если:

1) $a = 15$, $b = 18$. ....

2) $a = -20$, $b = 8$. ....

3) $a = -34$, $b = 17$. ....

4) $a = 25$, $b = -6$. ....

Ответ. 1) .... ; 2) .... ; 3) .... ; 4) ....

2 Найти среднее арифметическое чисел:

1) 2 и 10. ....

2) –5 и –6. ....

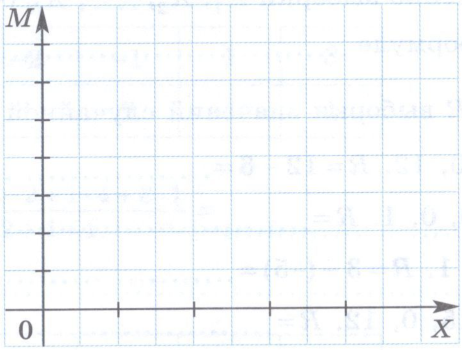
3) 13, 14, 15, 16. ....

4) –4, –3, –2, –1, 1. ....

Ответ. 1) ....; 2) ....; 3) ....; 4) ....

3 Построить полигон частот значений случайной величины X: 3, 0, 5, 1, 0, 2, 4, 5, 3, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 5, 0, 3, 4, 1.

X								
M								



4 Округлить число 24,698:

1) до сотых. ....

2) до десятых. ....

3) до единиц. ....

4) до десятков. ....

Ответ. 1) ....; 2) ....; 3) ....; 4) ....

5 Найти значение выражения 53,6 : 7 с точностью:

1) до десятых. ....

2) до сотых. ....

Ответ. 1) ....; 2) ....

II

6 Заполнить пропуски.

1) Размахом выборки называют ....

2) Модой выборки называют ....

3) Медиана выборки — это ....

4) Если упорядоченная выборка имеет нечётное число данных, то её медиана равна ....

5) Если упорядоченная выборка имеет чётное число данных, то её медиана равна ....

6) Средним значением случайной величины X называют

....

7) Среднее значение выборки X_1, X_2, ..., X_N обозначают .... и находят по формуле ....

7 Найти размах R выборки значений случайной величины X:

1) 6, 6, 7, 8, 10, 12. $R = 12 - 6 =$ ....

2) –3, –2, –2, 0, 0, 1. $R =$ ....

3) –4, 2, –5, 3, 1. $R = 3 - (-5) =$ ....

4) 12, 20, –1, 15, 0, 12. $R =$ ....

8 Найти моду Mo выборки значений величины X:

–2, –1, 0, 1, 2. Выборка не имеет моды.
5, –3, 2, 3, –3, 4. $Mo = -3$.

1) 1, 1, 2, 3, 3, 4. $Mo_1 = 1$, $Mo_2 =$ ....

2) –1, 2, 0, 2, –1, 2, 3. $Mo =$ ....

9 Найти медиану выборки:

7, 9, 5, 4, 6. Упорядочим выборку с нечётным числом данных: 4, 5, **6**, 7, 9. Центральное значение медианы $Me = 6$.
2, 4, 1, –2, 4, –3. Запишем данные в виде упорядоченного ряда, содержащего чётное число элементов: –3, –2, **1**, **2**, 4, 4. Медиана равна среднему арифметическому двух центральных значений: $Me = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$.

1) 1, 3, 1, 4, 0, 5, 2, 3. $Me =$

2) 3, 5, 1, 3, 2, 6, 4. $Me =$

10 Найти среднее значение выборки:

1) −3, −7, 0, 2, 5, 8, 2. $\frac{-3+(-7)+0+2+5+8+2}{7} =$

2) 5, 1, 6, 6, 3, 4, 3.

11 Найти среднее значение выборки случайной величины X, представленной таблицей распределения по частотам:

1)

X	−2	−1	1	3
M	1	2	4	1

$\overline{X} = \frac{-2\cdot 1+(-1)\cdot 2+1\cdot 4+3\cdot 1}{1+2+4+1} =$

2)

X	−3	0	2	3
M	1	3	4	2

3)

X	0	1	2	3	4
M	1	2	5	3	1

4)

X	–1	0	0,1	0,3	0,5
M	2	2	3	2	1

....

....

....

III

12 Найти размах, моду, медиану и среднее значение выборки:

1) 2, 3, 5, 6, 7. ....

....

2) 3, 1, 5, 1, 2, 4. ....

....

Ответ. 1) ....; 2) ....

13 Найти размах, моду, медиану и среднее выборки значений случайной величины X, распределение которых по частотам представлено в таблице:

1)

X	0	1	2	3
M	1	2	3	1

....

....

....

2)

X	–2	–1	0	1	2	3
M	1	3	4	5	2	1

....

....

....

Ответ. 1) ....; 2) ....

Оглавление

Предисловие 3

ГЛАВА I. Алгебраические уравнения. Системы нелинейных уравнений

§ 1. Деление многочленов 4
§ 2. Решение алгебраических уравнений 8
§ 3. Уравнения, сводящиеся к алгебраическим 13
§ 4. Системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными 18
§ 5. Различные способы решения систем уравнений 20
§ 6. Решение задач с помощью систем уравнений 24

ГЛАВА II. Степень с рациональным показателем

§ 7. Степень с целым показателем 27
§ 8. Арифметический корень натуральной степени 31
§ 9. Свойства арифметического корня . . . . —
§ 10. Степень с рациональным показателем 36
§ 11. Возведение в степень числового неравенства . . . . . . —

ГЛАВА III. Степенная функция

§ 12. Область определения функции 44
§ 13. Возрастание и убывание функции 48
§ 14. Чётность и нечётность функции 54
§ 15. Функция $y = \frac{k}{x}$ 61
§ 16. Неравенства и уравнения, содержащие степень 67

ГЛАВА IV. Прогрессии

§ 17. Числовая последовательность 72
§ 18. Арифметическая прогрессия 74
§ 19. Сумма n первых членов арифметической прогрессии . . 77
§ 20. Геометрическая прогрессия 79
§ 21. Сумма n первых членов геометрической прогрессии . . . 82

ГЛАВА V. Случайные события

§ 22. События 85
§ 23. Вероятность события 87
§ 24. Решения вероятностных задач с помощью комбинаторики 89
§ 25. Геометрическая вероятность 93
§ 26. Относительная частота и закон больших чисел 95

ГЛАВА VI. Случайные величины

§ 27. Таблицы распределения 97
§ 28. Полигоны частот 100
§ 29. Генеральная совокупность и выборка 104
§ 30. Размах и центральные тенденции 106