Алгоритмы решения задач

7–11 классы

Геометрия

- Краткая теория по всем темам
- Доступные и наглядные алгоритмы решений
- Задачи и примеры с решениями

Т. М. Виноградова

Алгоритмы решения задач

7–11 классы

Геометрия

Москва
2019

УДК 373.5:514
ББК 22.151я721
В49

Виноградова, Татьяна Михайловна.

В49 Геометрия. 7—11 классы / Т. М. Виноградова. — Москва : Эксмо, 2019. — 112 с. — (В помощь старшекласснику. Алгоритмы решения задач).

ISBN 978-5-04-093534-5

В пособии представлены алгоритмы решения типовых задач и примеров по геометрии, изучаемых в 7—11-х классах. Перед каждым алгоритмом помещен краткий теоретический блок по теме с необходимыми правилами и формулами. После алгоритма приведен пример решения задачи или примера, а также задания для самостоятельного решения.

Пособие адресовано учащимся 7—11-х классов, учителям и родителям, помогающим ребенку в выполнении домашних заданий.

УДК 373.5:514
ББК 22.151я721

ISBN 978-5-04-093534-5

СОДЕРЖАНИЕ

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТЕЙШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР . . . 5
Точка и прямая. Отрезок. Измерение отрезков 5
Полуплоскости. Полупрямая. Угол. Откладывание отрезков и углов . . . 12
Треугольник. Существование треугольника, равного данному 18
Параллельные прямые. Смежные и вертикальные углы. Свойство смежных и вертикальных углов 19
Виды треугольников. Высота, биссектриса и медиана треугольника . . . 24
Сумма углов треугольника 30
Внешний угол треугольника 31
Признаки и свойства параллельности прямых 34
Окружность, вписанная в треугольник и описанная около треугольника 36
Четырехугольники 41

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА 45
Прямоугольный треугольник 45
Теорема Пифагора 45

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ 48
Декартова система координат на плоскости 48
Декартова система координат в пространстве 50

УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ 51
Уравнение прямой 51
Уравнение окружности на плоскости 51
Взаимное расположение прямых по их уравнениям 53

ВЕКТОРЫ 55
Векторы на плоскости 55

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ 58
Признаки подобия треугольников 58
Свойства подобных треугольников 58
Свойства преобразования подобия 59

ВПИСАННЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ УГЛЫ 62
Плоский угол 62
Дополнительный угол 62
Центральный угол 62
Дуга окружности 64

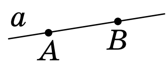
РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ 65
Теорема косинусов 65
Теорема синусов 66

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ 69
Площадь треугольника 69
Площади четырехугольников 71
ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ 74
Призма 74
Параллелепипед 75
Пирамида 77
ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ 80
Цилиндр 80
Конус 81
Шар. Сфера 82
ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ «ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО» 85
СПИСОК АЛГОРИТМОВ 91
ПРИЛОЖЕНИЯ 95

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТЕЙШИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

ТОЧКА И ПРЯМАЯ. ОТРЕЗОК. ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

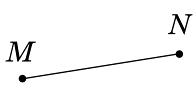
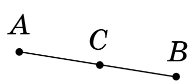
Основные геометрические фигуры на плоскости — это точка и прямая.

Точка A	Прямая a, или прямая AB, или прямая BA
• A	

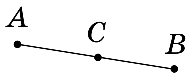
Аксиома — утверждение, которое принимается без доказательства.

Аксиома I. Основные свойства принадлежности точек и прямых на плоскости
Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, которые ей не принадлежат. Через любые две точки можно провести прямую и только одну.

Отрезок — часть прямой, состоящая из всех точек этой прямой, лежащих между двумя ее данными точками — концами отрезка.

Отрезок MN, или отрезок NM	$C \in AB$ (точка C принадлежит отрезку AB), или точка C лежит между точками A и B
	

Аксиома II. Основные свойства расположения точек на прямой
Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Аксиома III. Основные свойства измерения отрезков	
Каждый отрезок имеет определенную длину, бóльшую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой своей точкой.	
	$AB = AC + BC$

1

Нахождение длины отрезка, если известны длины его частей

АЛГОРИТМ

❶ **Найти длину отрезка, сложив длины его частей (согласно аксиоме III).**

⇩

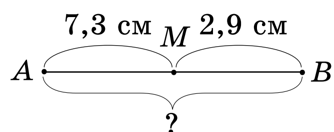
❷ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Найти длину отрезка AB, если точка M делит его на две части длиной 7,3 см и 2,9 см.

Решение.

① $AB = AM + MB$;
$AB = 7{,}3 + 2{,}9 = 10{,}2$ (см).



② ***Ответ***: 10,2 см.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Точка E делит отрезок OP на части длиной 10 дм и 1,1 дм. Найти длину отрезка OP.
2. Найти длину отрезка EF, если точка K лежит между точками E и F, $EK = 8{,}7$ м, $KF = 3{,}5$ м.
3. Отрезок AB разделен точкой X на части длиной 0,875 дм и 1,007 дм. Найти длину AB.
4. На отрезке QM взята точка F, $QF = 801$ м, $FM = 19$ м. Найти длину QM.

Нахождение длины части отрезка, если известна длина всего отрезка и одной из его частей

2

АЛГОРИТМ

❶ **Записать основные свойства измерения отрезков.**

⇩

❷ **Выразить из записанного равенства длину неизвестной части.**

⇩

❸ **Вычислить длину неизвестной части отрезка.**

⇩

❹ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

На отрезке AB взяли точку M так, что $AM = 7{,}3$ см. Найти длину отрезка MB, если $AB = 11{,}7$ см.

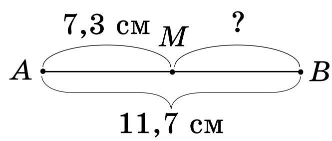
Решение.

① $AB = AM + MB$;

② $MB = AB - AM$.

③ $MB = 11{,}7 - 7{,}3 = 4{,}4$ (см).

④ ***Ответ***: 4,4 см.



ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Найти длину отрезка KE, если точка K принадлежит отрезку NE, $NE = 18$ м, $EK = 7{,}2$ м.

2. На отрезке CD взяли точку B так, что $BC = 9{,}7$ дм. Найти длину отрезка BD, если $CD = 11{,}3$ дм.

3. Точка A делит отрезок DP на две части. Найти длину отрезка AD, если $AP = 5{,}9$ см, $DP = 6{,}3$ см.

4. Найти длину отрезка KN, если $N \in KO$, $KO = 29$ дм, $NO = 18$ дм.

3 Определение расположения точек на прямой

АЛГОРИТМ

❶ **Из данных отрезков выбрать тот, длина которого равна сумме длин двух других.**

⇩

❷ **Сделать вывод о точке, лежащей между двумя другими, опираясь на аксиому III.**

⇩

❸ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Три точки B, C и D лежат на одной прямой. Известно, что $BC = 3{,}5$ см, $BD = 4{,}6$ см, $CD = 8{,}1$ см. Какая их трех точек B, C, D лежит между двумя другими?

Решение.

① Очевидно, что $3{,}5 + 4{,}6 = 8{,}1$ (см).

② Значит, $BC + BD = CD$. Поэтому точка B принадлежит отрезку CD, так как выполняется аксиома III. Следовательно, точка B лежит между точками C и D.

③ ***Ответ***: точка B лежит между точками C и D.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Определить, какая из трех точек K, L, M, принадлежащих одной прямой, лежит между двумя другими, если $KL = 10{,}9$ дм; $KM = 3{,}8$ дм; $ML = 7{,}1$ дм.
2. Точки E, A, B лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими, если $EB = 3{,}9$ м; $EA = 0{,}2$ м; $AB = 3{,}7$ м?
3. Известно, что $AB = 0{,}027$ дм, $AC = 0{,}1$ дм, $BC = 0{,}073$ дм. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Какая из них лежит между двумя другими?

Нахождение длин частей отрезка с помощью уравнения, если в условии указано, что они сравниваются

4

АЛГОРИТМ

❶ **Записать основное свойство измерения отрезков для условия данной задачи.**

❷ **Длину меньшей части обозначить *x*.**

❸ **Выразить длину большей части отрезка через *x* (если она *больше на* некоторую величину, то длина большей части отрезка равна сумме *x* и этой величины, а если она *больше в* несколько раз меньшей части, то длина большей части отрезка равна произведению *x* и этого количества раз).**

❹ **Составить уравнение.**

❺ **Решить полученное уравнение.**

❻ **Записать длину меньшей части отрезка и вычислить длину большей части.**

❼ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

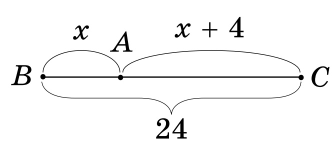
Точка A принадлежит отрезку BC, длина которого равна 24 см. Найти длину отрезков AB и AC, если:
1) отрезок AB на 4 см меньше отрезка AC;
2) отрезок AB в 3 раза больше отрезка AC.

Решение. Условие 1

① $BC = AB + AC$ (аксиома III).

② Пусть $AB = x$ см.

③ Тогда $AC = (x + 4)$ см.



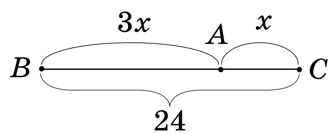
④ $x + x + 4 = 24$.

⑤ $2x = 24 - 4$; $2x = 20$; $x = 20 : 2$; $x = 10$.

⑥ Итак, $AB = 10$ см, $AC = 10 + 4 = 14$ (см).

⑦ ***Ответ***: 10 см; 14 см.

Условие 2



① $BC = AB + AC$ (аксиома III).

② Пусть $AC = x$ см.

③ Тогда $AB = 3x$ см.

④ $x + 3x = 24$.

⑤ $4x = 24$; $x = 24 : 4$; $x = 6$.

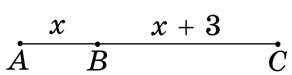
⑥ Итак, $AC = 6$ см, $AB = 3 \cdot 6 = 18$ (см).

⑦ ***Ответ***: 18 см; 6 см.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Точка E принадлежит отрезку AB длиной 25 дм. Найти длины отрезков AE и BE, если длина отрезка AE на 7 см больше длины отрезка BE.
2. Точка K принадлежит отрезку AC длиной 36 м. Найти длины отрезков AK и CK, если длина отрезка AK в 8 раз меньше длины отрезка CK.
3. На отрезке DN отметили точку F. Разность длин отрезков NF и DF равна 8 мм. Найти NF и DF, если $DN = 32$ мм.

Помни!



AB меньше BC на 3,
или BC больше AB на 3,
или разность BC и AB равна 3.

5 Нахождение длин частей отрезка, если он делится своей точкой на части, пропорциональные данным числам

АЛГОРИТМ

❶ **Записать основное свойство измерения отрезков (аксиома III) для условия данной задачи.**

❷ **Обозначить за *x* величину одной части отрезка.**

3 **Выразить длину частей отрезка через *x*, умножив *x* на соответствующие пропорциональные числа.**

4 **Составить уравнение.**

5 **Решить уравнение.**

6 **Вычислить длины частей отрезка.**

7 **Записать ответ.**

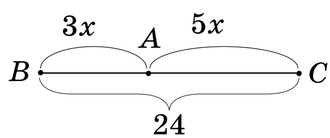
ПРИМЕР

Точка A принадлежит отрезку BC, длина которого равна 24 см. Найти длины отрезков AB и AC, если $AB : AC = 3 : 5$.

Решение.

① $BC = AB + AC$ (аксиома III).

② Пусть x см — величина одной части.



③ Тогда $AB = 3x$ см, $AC = 5x$ см.

④ $3x + 5x = 24$.

⑤ $8x = 24$; $x = 24 : 8$; $x = 3$.

⑥ Итак, $AB = 3 \cdot 3 = 9$ (см); $AC = 5 \cdot 3 = 15$ (см).

⑦ ***Ответ***: 9 см; 15 см.

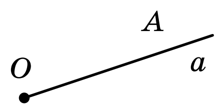
ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. На отрезке AB отметили точку D так, что $AD : DB = 7 : 11$. Найти длины отрезков AD и DB, если $AB = 54$ см.
2. Точка N принадлежит отрезку EF длиной 88 дм. Известно, что длины отрезков EN и FN относятся как $7 : 4$. Найти EN и FN.
3. Точка M делит отрезок AK в отношении $11 : 15$. Найти длины отрезков AM и KM, если $AK = 130$ мм.

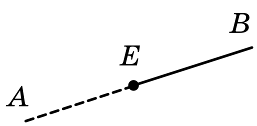
ПОЛУПЛОСКОСТИ. ПОЛУПРЯМАЯ. УГОЛ. ОТКЛАДЫВАНИЕ ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ

Аксиома IV
Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.

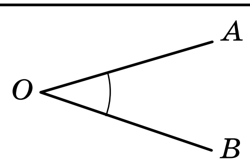
Полупрямая (луч) — часть прямой, состоящей из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки — начала луча.

	Полупрямая OA, или луч OA (точка O — начало луча OA), или луч a

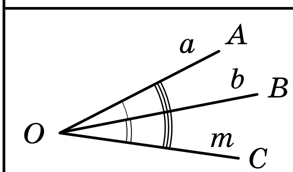
Дополнительные полупрямые — две различные полупрямые одной и той же прямой с общим началом.

	Лучи EB и EA — дополнительные

Угол — геометрическая фигура, образованная двумя различными полупрямыми с общим началом. (Полупрямые — стороны угла, общее начало — вершина угла.)

	$\angle AOB$ — угол AOB, или угол BOA, точка O — вершина, лучи OA и OB — стороны

Помни!
В записи угла вершина пишется посередине.

Аксиома V. **Основное свойство измерения углов**	
Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.	
	Луч OB проходит между сторонами $\angle AOC$. $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$, или $\angle(am) = \angle(ab) + \angle(bm)$ $0° < \angle AOC \le 180°$

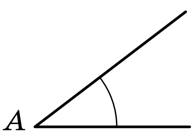
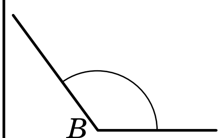
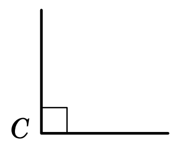
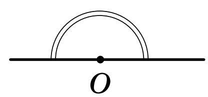
Аксиома VI

На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.

Аксиома VII

От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

Помни!

Виды углов			
Острый	Тупой	Прямой	Развернутый
			
$0° < \angle A < 90°$	$90° < \angle B < 180°$	$\angle C = 90°$	$\angle O = 180°$

Нахождение величины угла, если известны его части

6

АЛГОРИТМ

❶ **Чтобы найти величину угла, нужно сложить величины его частей (согласно аксиоме V).**

❷ **Записать ответ.**

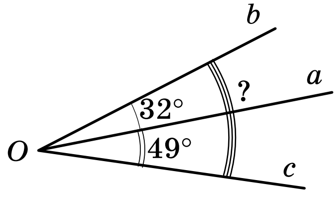
ПРИМЕР

Луч a проходит между сторонами угла (bc). Найти градусную меру (величину) угла (bc), если $\angle(ab) = 32°$; $\angle(ac) = 49°$.

Решение.

① $\angle(bc) = \angle(ab) + \angle(ac)$;
$\angle(bc) = 32° + 49° = 81°$.

② ***Ответ***: 81°.



ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Луч b проходит между сторонами угла (ad). Найти градусную меру угла (ad), если $\angle(ab) = 47°$, $\angle(bd) = 54°$.
2. Луч c проходит между сторонами угла (mn). Найти $\angle(mn)$, если $\angle(cm) = 51°$, $\angle(cn) = 32°$.
3. Найти величину угла (ab), если луч d проходит между его сторонами и $\angle(ad) = 29°$, $\angle(bd) = 44°$.

7 Нахождение части угла, если известна величина всего угла и другой его части

АЛГОРИТМ

❶ **Записать основное свойство измерения углов для условия данной задачи (согласно аксиоме V).**

⇩

❷ **Выразить неизвестную часть угла из записанного равенства (из величины всего угла вычесть величину известной части) и вычислить ее.**

⇩

❸ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

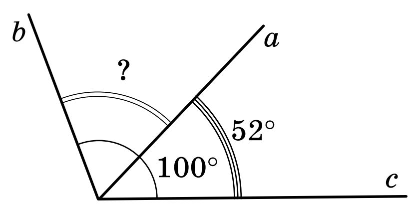
Луч a проходит между сторонами угла (bc). Найти $\angle(ab)$, если $\angle(bc) = 100°$, $\angle(ac) = 52°$.

Решение.

① $\angle(bc) = \angle(ab) + \angle(ac)$ (аксиома V).

② $\angle(ab) = \angle(bc) - \angle(ac) = 100° - 52° = 48°$.

③ ***Ответ***: 48°.



ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Луч c проходит между сторонами угла (ab). Известно, что $\angle(ab) = 83°$, $\angle(ac) = 36°$. Найти $\angle(bc)$.
2. Найти величину угла (ab), если луч b проходит между сторонами угла (ac), $\angle(ac) = 41°$, $\angle(bc) = 18°$.
3. Величина угла (ad) равна 108°. Луч m проходит между его сторонами. Найти $\angle(am)$, если $\angle(md) = 72°$.

Нахождение частей угла с помощью уравнения, если известна зависимость между ними

8

АЛГОРИТМ

❶ **Записать основное свойство измерения углов для условия данной задачи (согласно аксиоме V).**

⇩

❷ **Обозначить величину меньшей части угла *x*°.**

⇩

❸ **Величину большей части угла выразить через *x* (если она больше меньшей части угла на некоторую величину, то к *x*° добавить эту величину, а если она больше меньшей части в несколько раз, то *x*° умножить на число раз).**

⇩

❹ **Составить уравнение.**

⇩

❺ **Решить уравнение.**

⇩

❻ **Найти части угла, подставив найденное значение *x*.**

⇩

❼ **Записать ответ.**

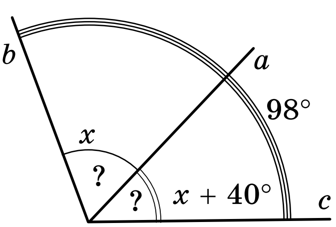
ПРИМЕР

Луч a проходит между сторонами угла (bc). Найти величины углов (ab) и (ac), если:

1) $\angle(ab)$ на $40°$ меньше $\angle(ac)$, $\angle(bc) = 98°$;

2) $\angle(ab)$ в 3 раза больше $\angle(ac)$, $\angle(bc) = 60°$.

Решение. Условие 1



① $\angle(bc) = \angle(ab) + \angle(ac)$ (аксиома V).

② Пусть $\angle(ab) = x°$.

③ Тогда $\angle(ac) = (x + 40)°$.

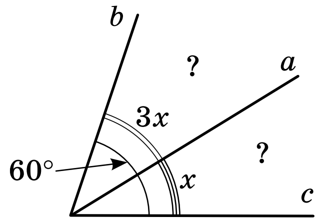
④ $x + x + 40 = 98$.

⑤ $2x = 98 - 40$; $2x = 58$; $x = 58 : 2$; $x = 29$.

⑥ Итак, $\angle(ab) = 29°$, $\angle(ac) = 29° + 40° = 69°$.

⑦ ***Ответ***: 29°; 69°.

Условие 2



① $\angle(bc) = \angle(ab) + \angle(ac)$.

② Пусть $\angle(ac) = x°$.

③ Тогда $\angle(ab) = 3x°$.

④ $3x + x = 60$.

⑤ $4x = 60$; $x = 60 : 4$; $x = 15$.

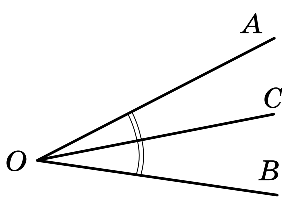
⑥ Итак, $\angle(ac) = 15°$, $\angle(ab) = 3 \cdot 15° = 45°$.

⑦ ***Ответ***: 45°; 15°.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Луч OB проходит между сторонами $\angle AOC$, равного 85°. Найти $\angle AOB$ и $\angle BOC$, если $\angle AOB$ больше $\angle BOC$ на 21°.
2. Луч, проходящий между сторонами угла, равного 112°, делит его на две части, одна из которых в 6 раз меньше другой. Найти образовавшиеся углы.
3. Развернутый угол разделили на два угла, один из которых на 36° меньше другого. Найти эти углы.

Биссектриса угла — луч, выходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла.

	Луч OC — биссектриса $\angle AOB$. $\angle AOC = \angle BOC = \frac{1}{2}\angle AOB$

9 Нахождение частей угла, на которые его делит биссектриса

АЛГОРИТМ

❶ **Величину данного угла разделить на 2.**

❷ **Записать ответ.**

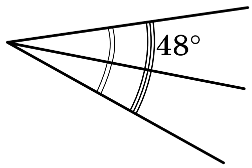
ПРИМЕР

Найти угол, образованный биссектрисой угла, равного 48°, и стороной данного угла.

Решение.

① $48° : 2 = 24°$.

② ***Ответ***: 24°.



ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Проведена биссектриса c угла (ab). Найти $\angle(ac)$, если $\angle(ab) = 66°$.

2. Найти угол, который образует биссектриса со стороной угла, если величина данного угла 128°.

3. Найти угол между стороной и биссектрисой прямого угла.

10 Нахождение угла, если известна его часть между стороной и биссектрисой

АЛГОРИТМ

❶ **Величину угла умножить на 2.**

⇩

❷ **Записать ответ.**

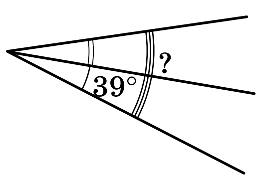
ПРИМЕР

Найти величину угла, если угол между его биссектрисой и стороной равен 39°.

Решение.

① $39° \cdot 2 = 78°$.

② ***Ответ***: 78°.



ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

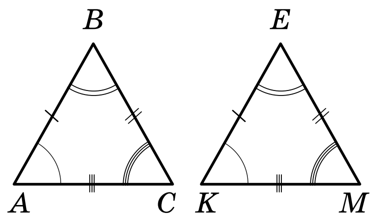
1. Найти величину угла, если угол, образованный его биссектрисой и стороной, равен 82°.

2. Угол, образованный биссектрисой и стороной угла, равен 28°. Найти этот угол.

3. Угол между стороной и биссектрисой некоторого угла равен 45°. Найти этот угол.

ТРЕУГОЛЬНИК. СУЩЕСТВОВАНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА, РАВНОГО ДАННОМУ

Треугольники называются **равными**, если у них соответствующие стороны и соответствующие углы равны.

	$\triangle ABC = \triangle KEM$ 1) $AB = KE$; $BC = EM$; $AC = KM$; 2) $\angle A = \angle K$; $\angle B = \angle E$; $\angle C = \angle M$

Помни!

Обозначение равных треугольников записывают по соответствующим вершинам.

Интересно знать!

При наложении равные треугольники совпадают.

Аксиома VIII.
Существование треугольника, равного данному

Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной прямой.

11 Нахождение неизвестных сторон и углов равных треугольников

АЛГОРИТМ

❶ **По равенству данных треугольников записать равенство соответствующих сторон и углов. (Можно выполнить чертеж к задаче.)**

⇩

❷ **Записать длины неизвестных искомых сторон, величины неизвестных искомых углов.**

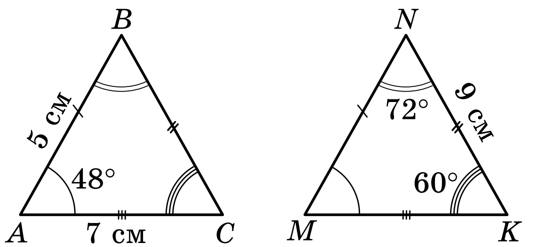
⇩

❸ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Известно, что $\triangle ABC = \triangle MNK$, $AB = 5$ см, $AC = 7$ см, $NK = 9$ см, $\angle A = 48°$, $\angle N = 72°$, $\angle K = 60°$. Найти неизвестные стороны и углы данных треугольников.

Решение.



① Так как $\triangle ABC = \triangle MNK$, то $AB = MN$, $BC = NK$, $AC = MK$; $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$, $\angle C = \angle K$.

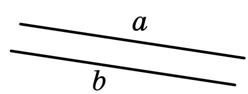
② Значит, $BC = 9$ см, $MN = 5$ см, $MK = 7$ см; $\angle M = 48°$, $\angle B = 72°$, $\angle C = 60°$.

③ ***Ответ***: $BC = 9$ см, $\angle B = 72°$, $\angle C = 60°$, $MN = 5$ см, $MK = 7$ см, $\angle M = 48°$.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

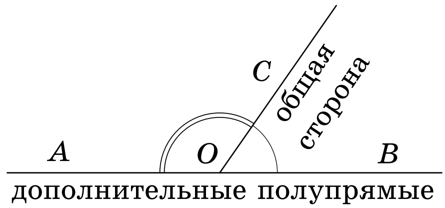
1. В треугольнике EFB $EB = 12$ см, $\angle E = 83°$. Найти длину стороны MP и $\angle M$ равного ему треугольника MOP.
2. Треугольники SEK и NAG равны, $KS = 45$ дм, $ES = 24$ дм, $\angle K = 36°$, $AG = 54$ дм, $\angle N = 126°$, $\angle E = 18°$. Найти неизвестные стороны и углы данных треугольников.
3. Известно, что $\triangle ACD = \triangle BER$, $BE = 6$ м, $ER = 8$ м, $BR = 9$ м, $\angle E = 29°$, $\angle R = 93°$, $\angle B = 58°$. Найти $\angle C$.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ. СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ. СВОЙСТВО СМЕЖНЫХ И ВЕРТИКАЛЬНЫХ УГЛОВ

Помни!	
Две прямые называются **параллельными**, если они не пересекаются. $a \parallel b$	

Аксиома IX. Основное свойство параллельных прямых
Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости одну и только одну прямую, параллельную данной.

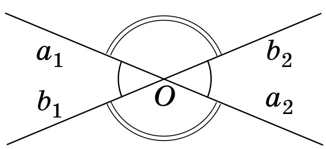
Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов — дополнительные полупрямые.

<table>
<tr><td>
</td><td>$\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные</td></tr>
</table>

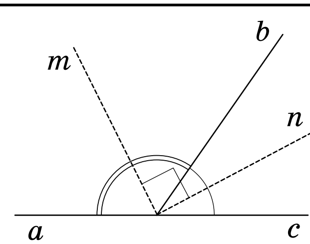
Свойство смежных углов
Сумма смежных углов равна 180°: $\angle AOC + \angle BOC = 180°$.

Важно знать!
1. Если два угла равны, то смежные с ними углы равны. **2.** Угол, смежный с прямым углом, прямой.

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого.

<table>
<tr><td>
</td><td>$\angle(a_1b_1)$ и $\angle(a_2b_2)$ — вертикальные; a_1 и a_2, b_1 и b_2 — дополнительные полупрямые</td></tr>
</table>

Свойство вертикальных углов
Вертикальные углы равны: $\angle(a_1b_1) = \angle(a_2b_2)$, $\angle(a_1b_2) = \angle(a_2b_1)$.

<table>
<tr><td colspan="2">Помни!</td></tr>
<tr><td>Угол между биссектрисами смежных углов всегда прямой.
$\angle(ab)$ и $\angle(bc)$ — смежные,
m — биссектриса $\angle(ab)$,
n — биссектриса $\angle(bc)$, $\angle(mn) = 90°$.</td><td>
</td></tr>
</table>

Нахождение угла, смежного данному

12

АЛГОРИТМ

❶ **Записать свойство смежных углов.**

⇩

❷ **Выразить из этого равенства неизвестный угол (из 180° вычесть величину известного угла) и вычислить его величину.**

⇩

❸ **Записать ответ.**

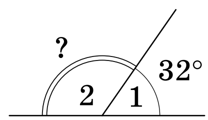
ПРИМЕР

Найти угол, смежный с углом 32°.

Решение.

① Пусть $\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные, $\angle 1 = 32°$, тогда $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

② $\angle 2 = 180° - \angle 1 = 180° - 32° = 148°$.



③ ***Ответ***: 148°.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. $\angle(ab)$ и $\angle(bc)$ — смежные, $\angle(ab) = 40°$. Найти $\angle(bc)$.

2. Один из смежных углов равен 116°. Найти другой угол.

3. Найти угол, смежный с углом 127°.

Нахождение углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, если один из углов известен

13

АЛГОРИТМ

❶ **Записать пары образовавшихся вертикальных углов (они равны) и выполнить чертеж к задаче.**

⇩

❷ **Записать основное свойство для одной из пар образовавшихся смежных углов.**

⇩

❸ **Выразить из полученного в пункте 2 равенства неизвестный угол и вычислить его.**

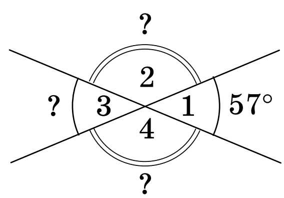
❹ **Записать величины неизвестных углов.**

❺ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равен 57°. Найти остальные углы.

Решение.



① Пусть при пересечении данных двух прямых образовались углы $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.
По условию $\angle 1 = 57°$. $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ как вертикальные.

② $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ как смежные.

③ $\angle 2 = 180° - \angle 1 = 180° - 57° = 123°$.

④ Итак, $\angle 2 = \angle 4 = 123°$, $\angle 3 = \angle 1 = 57°$.

⑤ ***Ответ***: 123°, 57°, 123°.

Помни!

Если сумма двух вертикальных углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равна 180°, то все образовавшиеся углы — прямые. Следовательно, пересекающиеся прямые перпендикулярны.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Найти углы, которые получаются при пересечении двух прямых, если один из них равен: **1)** 106°; **2)** 32°; **3)** 117°.

Нахождение углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, если известна сумма двух из них

14

АЛГОРИТМ

❶ **Данную сумму разделить на 2. Таким образом находятся величины одной пары вертикальных углов (предварительно выполнить чертеж к задаче).**

⇩

❷ **Найти угол, смежный к одному из найденных углов (для этого из 180° вычесть известный угол).**

⇩

❸ **Угол, вертикальный найденному углу в пункте 2, равен ему.**

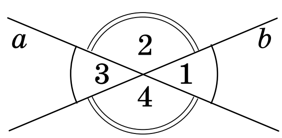
⇩

❹ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Сумма двух углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равна 110°. Найти образовавшиеся углы.

Решение.



① $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ как вертикальные. Пусть $\angle 1 + \angle 3 = 110°$, тогда $\angle 1 = \angle 3 = 110° : 2 = 55°$.

② $\angle 2 + \angle 1 = 180°$ как смежные.

Отсюда $\angle 2 = 180° - \angle 1 = 180° - 53° = 127°$.

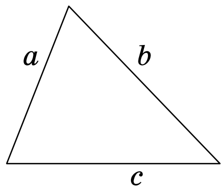
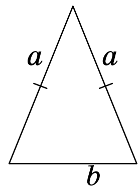
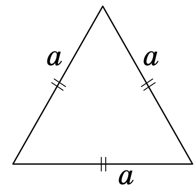
③ $\angle 4 = \angle 2 = 127°$.

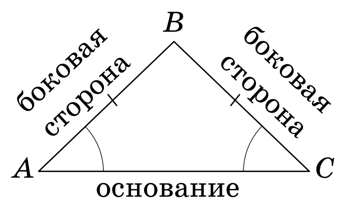
④ ***Ответ***: 55°, 127°, 55°, 127°.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

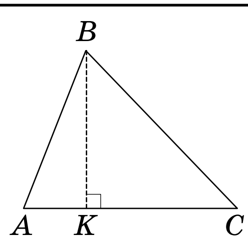
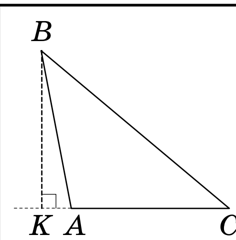
Найти углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых, если сумма двух из них равна: **1)** 38°; **2)** 160°; **3)** 84°.

ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ВЫСОТА, БИССЕКТРИСА И МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА

Виды треугольников по сторонам		
Разносторонний	Равнобедренный	Равносторонний (правильный)
		
$P = a + b + c$	$P = 2a + b$	$P = 3a$

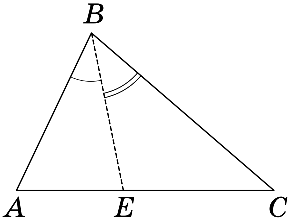
Свойство равнобедренного треугольника	
Углы при основании равнобедренного треугольника равны. $\angle A = \angle C$	

Признак равнобедренного треугольника
Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Высота треугольника		
Высотой треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону треугольника.		
	$BK \perp AC$, BK — высота $\triangle ABC$	

Биссектриса треугольника

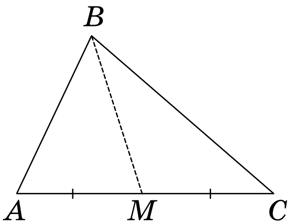
Биссектрисой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, который соединяет эту вершину с точкой на противолежащей стороне треугольника.



Луч BE — биссектриса $\angle ABC$;
отрезок BE — биссектриса $\triangle ABC$

Медиана треугольника

Медианой треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

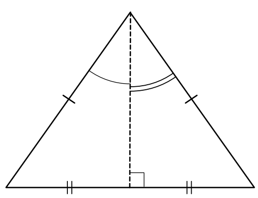


M — середина AC;
BM — медиана $\triangle ABC$

Помни!

Каждый треугольник имеет три высоты, три медианы, три биссектрисы.

Свойство медианы равнобедренного треугольника, проведенной к его основанию



Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой этого треугольника.

Важно знать!	
Высота равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию, является медианой и биссектрисой.	**Биссектриса равнобедренного треугольника**, проведенная к его основанию, является медианой и высотой.

15 Вычисление периметра треугольника, если известны его стороны

АЛГОРИТМ

❶ **Определить вид треугольника по данным его сторонам.**

⇩

❷ **По формуле вычисления периметра треугольника найти периметр P данного треугольника ($P = a + b + c$, если треугольник разносторонний; $P = 2a + b$, если треугольник равнобедренный и b — его основание; $P = 3a$, если треугольник равносторонний со стороной a).**

⇩

❸ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Найти периметр равнобедренного треугольника с основанием 17 см и боковой стороной 10 см.

Решение.

① Дан равнобедренный треугольник.

② $P = 2a + b$, где по условию задачи $a = 10$ см, $b = 17$ см. $P = 2 \cdot 10 + 17 = 37$ (см).

③ ***Ответ***: 37 см.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Найти периметр треугольника со сторонами 12 см, 13 см, 15 см.

2. Найти периметр правильного треугольника со стороной 11 дм.

3. Стороны треугольника равны 18 м, 15 м, 18 м. Найти его периметр.

Нахождение сторон треугольника, если известны зависимость между ними и периметр треугольника

16

АЛГОРИТМ

❶ **Выполнить чертеж к задаче.**

❷ **Меньшую из сторон треугольника обозначить за *x*. Две другие его стороны выразить через *x* по условию задачи.**

❸ **Используя формулу периметра треугольника (в зависимости от вида треугольника), составить уравнение. Решить его.**

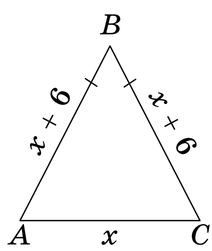
❹ **Найденное значение *x* является длиной одной из сторон треугольника. Используя его, найти длины оставшихся двух сторон.**

❺ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Найти стороны равнобедренного треугольника, если его периметр равен 33 см, а основание на 6 см меньше боковой стороны.

Решение.



① $P_{\triangle ABC} = 33$ см.

② Пусть $AC = x$ см,
тогда $AB = BC = (x + 6)$ см.

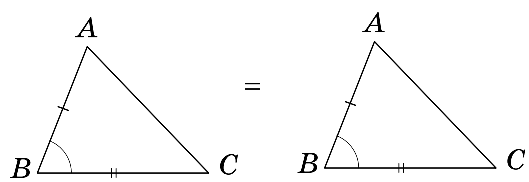
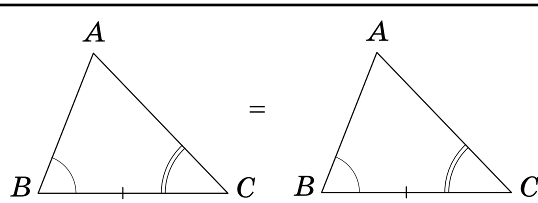
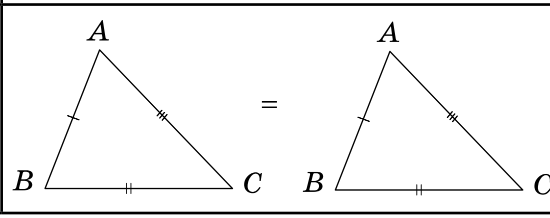
③ $P_{\triangle ABC} = 2 \cdot AB + AC$.
$2 \cdot (x + 6) + x = 33$; $2x + 12 + x = 33$;
$3x = 21$; $x = 7$.

④ Итак, $AC = 7$ см,
$AB = BC = 7 + 6 = 13$ (см).

⑤ ***Ответ***: 7 см; 13 см; 13 см.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Найти стороны равнобедренного треугольника, если его периметр равен 28 м, а боковая сторона на 8 м больше основания.
2. Одна из сторон треугольника на 52 дм меньше второй и в 4 раза меньше третьей. Найти стороны треугольника, если его периметр равен 118 дм.
3. Найти стороны равнобедренного треугольника, если его периметр равен 70 см, а боковая сторона в 2 раза больше основания.

Признаки равенства треугольников	
I. По двум сторонам и углу между ними	
II. По стороне и двум прилежащим к ней углам	
III. По трем сторонам	

17 Нахождение длины отрезка, используя признаки равенства треугольников

АЛГОРИТМ

❶ **По чертежу к задаче записать равные элементы двух треугольников.**

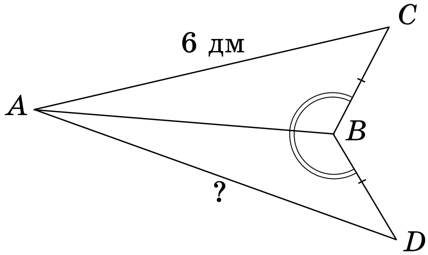
❷ **Сделать вывод о равенстве рассматриваемых треугольников, используя признаки равенства треугольников.**

❸ **Так как треугольники равны, то их соответствующие стороны равны. Записать длину неизвестной стороны одного из треугольников, соответствующей известной стороне равного ему треугольника.**

❹ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

На рисунке $AC = 6$ дм, $BC = BD$, $\angle ABC = \angle ABD$. Найти AD.



Решение.

① Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$:
AB — общая, $BC = BD$, $\angle ABC = \angle ABD$ (по условию).

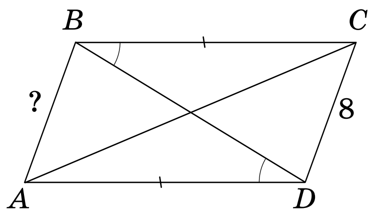
② Отсюда: $\triangle ABC = \triangle ABD$ (по I признаку).

③ $AD = AC$, как соответствующие стороны равных треугольников. Значит, $AD = 6$ дм.

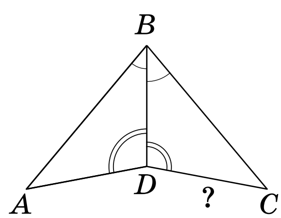
④ ***Ответ***: 6 дм.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

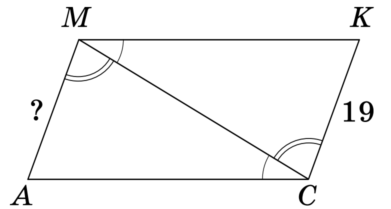
1. $AD = BC$, $\angle CBD = \angle ADB$, $CD = 8$ см. Найти AB.



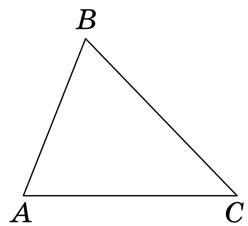
2. На рисунке $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle ADB = \angle CDB$, $AD = 2{,}3$ м. Найти DC.



3. На рисунке
$\angle AMC = \angle MCK$,
$\angle KMC = \angle ACM$.
Найти AM,
если CK = 19 дм.



СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

	$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

Теорема	Следствие
Сумма углов треугольника равна 180°.	У любого треугольника хотя бы два угла острые.

18 Нахождение неизвестного угла треугольника, если два других его угла известны

АЛГОРИТМ

❶ **Сложить величины данных двух углов треугольника.**

⇩

❷ **Вычесть полученную сумму из 180°.**

⇩

❸ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Найти неизвестный угол треугольника, если два его угла равны 62° и 100°.

Решение.

① $62° + 100° = 162°$.

② $180° - 162° = 18°$.

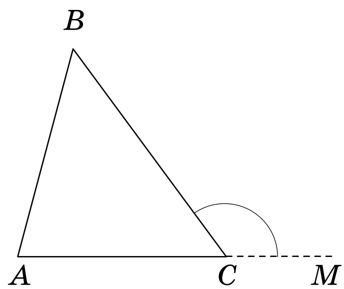
③ ***Ответ***: 18°.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Найти неизвестный угол треугольника, если два его угла равны: **1)** 45° и 35°; **2)** 111° и 30°; **3)** 24° и 72°.

ВНЕШНИЙ УГОЛ ТРЕУГОЛЬНИКА

Внешний угол треугольника при данной вершине — угол, смежный с углом треугольника при этой вершине.



$\angle BCM$ — внешний угол;
$\angle BCA$ — угол при вершине C

Теорема

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним: $\angle BCM = \angle A + \angle B$.

Помни!

В любом треугольнике 6 внешних углов (по 2 при каждой его вершине) и только 3 из них различны.

Важно знать!

Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.

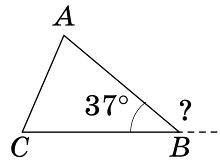
19 Нахождение внешнего угла треугольника, если известен угол треугольника, смежный с ним

АЛГОРИТМ

1. **Из 180° вычесть известный угол треугольника.**
2. **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Найти внешний угол $\triangle ABC$ при вершине B, если $\angle B = 37°$.



Решение.

① $180° - 37° = 143°$.

② ***Ответ***: 143°.

Помни!
Сумма внешних углов, взятых по одному при каждой вершине треугольника, равна 360°.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Найти внешний угол треугольника, если внутренний угол треугольника при этой же вершине равен: **1)** 101°; **2)** 54°; **3)** 18°.

20 Нахождение внешнего угла треугольника, если известны два угла треугольника, не смежные с ним

АЛГОРИТМ

❶ **Сложить данные углы треугольника.**

❷ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Два угла треугольника равны 59° и 86°. Найти внешний угол треугольника при третьей его вершине.

Решение.

① $59° + 86° = 145°$.

② ***Ответ***: 145°.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Два угла треугольника равны: **1)** 65° и 13°; **2)** 103° и 25°; **3)** 71° и 4°. Найти внешний угол треугольника при третьей его вершине.

Нахождение угла при вершине равнобедренного треугольника

21

АЛГОРИТМ

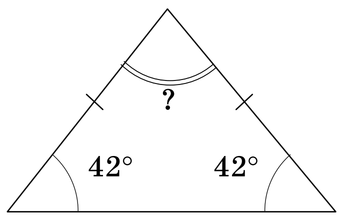
❶ **Найти разность 180° и удвоенного угла при основании (т.к. углы при основании равнобедренного треугольника равны, а сумма всех углов треугольника равна 180°).**

⇩

❷ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 42°.



Решение.

① $180° - 2 \cdot 42° = 180° - 84° = 96°$.

② ***Ответ***: 96°.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, если угол при основании равен: **1)** 25°; **2)** 60°; **3)** 12°.

Нахождение угла при основании равнобедренного треугольника

22

АЛГОРИТМ

❶ **Пусть α — угол при основании равнобедренного треугольника, а β — угол при вершине.**
Тогда $\alpha = \dfrac{180° - \beta}{2}$.

⇩

❷ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Найти угол при основании равнобедренного треугольника, если угол между его боковыми сторонами равен 80°.

Решение.

① $\alpha = \dfrac{180° - \beta}{2} = \dfrac{180° - 80°}{2} = \dfrac{100°}{2} = 50°.$

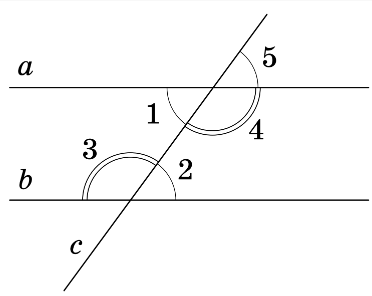
② ***Ответ***: 50°.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Найти угол при основании равнобедренного треугольника, если угол при его вершине равен: 1) 40°; 2) 160°; 3) 24°.

Помни!
Углы равностороннего треугольника равны 60°.

ПРИЗНАКИ И СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Признаки параллельности прямых	
Если внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180° и соответственные углы равны, то прямые параллельны.	
	$a \parallel b$ если: **1)** $\angle 1 = \angle 2$ или $\angle 3 = \angle 4$ (внутренние накрест лежащие при $a \parallel b$ и секущей c); **2)** $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ или $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ (внутренние односторонние при $a \parallel b$ и секущей c); **3)** $\angle 5 = \angle 2$ (соответственные углы)

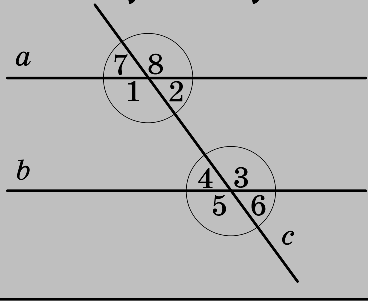
Свойства параллельных прямых
1. Две прямые, параллельные третьей прямой, между собой параллельны. **2.** Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180°, соответственные углы равны.

Нахождение углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных прямых секущей, если известен один из этих углов

23

АЛГОРИТМ

❶ **Отметить на рисунке углы, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей. Обозначить известный угол α. Пусть $\angle 1 = \alpha$.**



❷ **Записать все пары вертикальных углов (они равны).**

❸ **Записать все пары внутренних накрест лежащих углов (они равны).**

❹ **Найти угол из пары внутренних односторонних углов, один из которых известен по условию: $180^\circ - \alpha$.**

❺ **Записать величины всех найденных семи углов.**

❻ **Записать ответ.**

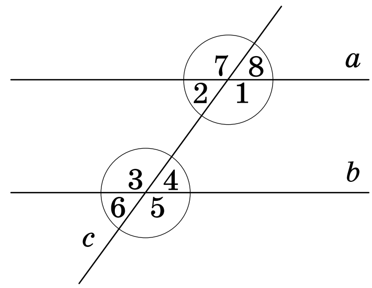
ПРИМЕР

Один из углов, образовавшихся при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 70°. Найти остальные семь углов.

Решение.

① Пусть $a \parallel b$, c — секущая. $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$, $\angle 8$ — образовавшиеся углы. $\angle 2 = 70°$.

② $\angle 2 = \angle 8$, $\angle 1 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 5$ как вертикальные.



③ $\angle 2 = \angle 4$, $\angle 1 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при $a \parallel b$ и секущей c.

④ $\angle 2 + \angle 3 = 180°$ как внутренние односторонние при $a \parallel b$ и секущей c. $\angle 3 = 180° - \angle 2 = 180° - 70° = 110°$.

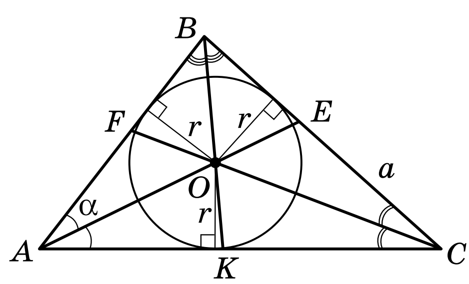
⑤ Итак, $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 110°$, $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 70°$.

⑥ ***Ответ***: 110°, 110°, 70°, 110°, 70°, 110°, 70°.

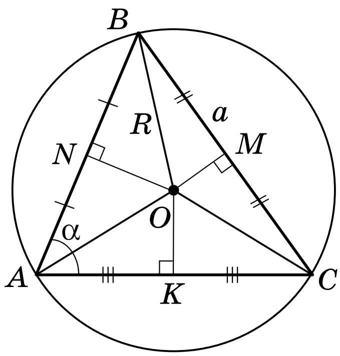
ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Найти углы, образовавшиеся при пересечении двух параллельных прямых секущей, если один из них равен:
1) 125°; **2)** 33°; **3)** 16°.

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК И ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

<table>
<tr><th colspan="2">Вписанная окружность</th></tr>
<tr><td>Окружность называется вписанной в треугольник (или треугольник, описанный около окружности), если она касается всех сторон треугольника.</td><td>
</td></tr>
</table>

Радиус вписанной окружности — r. CF, BK, AE — биссектрисы $\triangle ABC$.	**Центр вписанной окружности** точка O — точка пересечения биссектрис треугольника. $r = (p - a)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$, где p — полупериметр.

Описанная окружность	
Окружность называется **описанной** около треугольника (или треугольник, вписанным в окружность), если все вершины треугольника лежат на окружности.	

Радиус описанной окружности — R. ON, OM, OK — срединные перпендикуляры к сторонам AB, BC, AC соответственно.	**Центр описанной окружности** точка O — точка пересечения срединных перпендикуляров к сторонам треугольника. $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$

Важно знать!
Расстояние d между центрами вписанной и описанной окружности $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$.

Нахождение радиуса окружности, описанной около треугольника, если известны его сторона и противолежащий ей угол

24

АЛГОРИТМ

❶ **Записать формулу радиуса окружности, описанной около треугольника: $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$.**

⇩

❷ **Подставить значения длины стороны a и величины противолежащего ей угла α в формулу и вычислить R.**

⇩

❸ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AB = 5$ см, $\angle C = 30°$.

Решение.

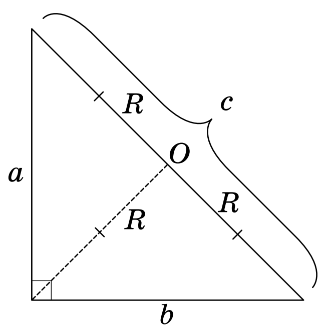
① $R = \dfrac{AB}{2\sin\angle C}$ (так как $\angle C$ лежит против стороны AB).

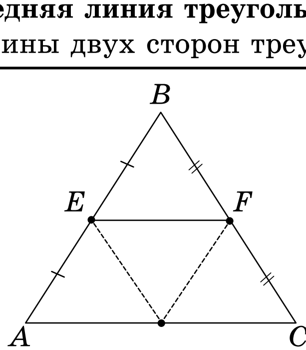
② $R = \dfrac{5}{2\cdot\sin 30°} = \dfrac{5}{2\cdot\frac{1}{2}} = 5$ (см).

③ ***Ответ***: 5 см.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Найти радиус окружности, описанной около треугольника MNE, если $MN = 8\sqrt{2}$ м, а $\angle E = 45°$.
2. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = 12\sqrt{3}$ см, а $\angle B = 60°$.
3. В $\triangle MOP$ $MO = 16$ см, $\angle P = 135°$. Найти радиус окружности, описанной около $\triangle MOP$.

Помни!	
	$R = \frac{1}{2}c = m_c$, где c — гипотенуза, m_c — медиана, проведенная к гипотенузе. $r = \dfrac{a+b-c}{2}$

Средняя линия треугольника	
Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.	
	EF — средняя линия $\triangle ABC$; $EF \parallel AC$, $EF = \frac{1}{2}AC$

Помни!
В каждом треугольнике три средние линии.

Нахождение длины средней линии треугольника

25

АЛГОРИТМ

❶ **Выполнить чертеж к задаче. Отметить на нем искомую среднюю линию.**

⇩

❷ **Средняя линия треугольника равна половине третьей его стороны. Вычислить ее.**

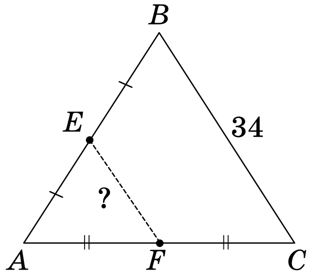
⇩

❸ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Средняя линия EF треугольника ABC соединяет середины сторон AB и AC соответственно. Найти длину EF, если $BC = 34$ см.

Решение.

① 

② $EF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 34 = 17$ (см).

③ ***Ответ***: 17 см.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Найти среднюю линию треугольника, лежащую против стороны, равной: **1)** 44 дм; **2)** 16 мм; **3)** 78 см.

26 Нахождение периметра треугольника, стороны которого являются средними линиями сторон данного треугольника

АЛГОРИТМ

❶ **Найти периметр данного треугольника (сложить длины всех его сторон).**

❷ **Периметр треугольника, сторонами которого являются средние линии данного треугольника, равен половине периметра данного треугольника. Вычислить его.**

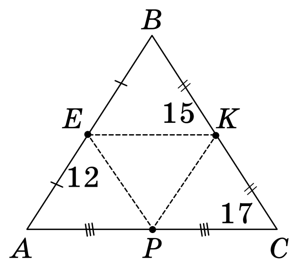
❸ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Стороны треугольника равны 12 см, 15 см, 17 см. Найти периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного.

Решение.

Пусть дан $\triangle ABC$, $AB = 12$ см, $BC = 15$ см, $AC = 17$ см; E — середина AB, K — середина BC, P — середина AC. Тогда EK, KP, EP — средние линии $\triangle ABC$.



① $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 12 + 15 + 17 = 44$ (см).

② $$P_{\triangle EKP} = EK + KP + EP = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC =$$
$$= \frac{1}{2}(AC + AC + BC) = \frac{1}{2}P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}44 = 22 \text{ (см)}.$$

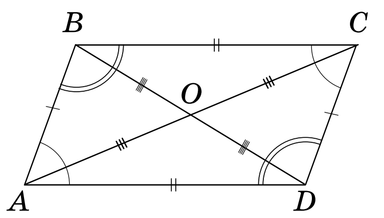
③ ***Ответ***: 22 см.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Стороны треугольника 6 см, 9 см, 7 см. Найти периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

2. Стороны треугольника равны 25 см, 35 см, 40 см. Найти периметр треугольника, стороны которого — средние линии данного треугольника.
3. В $\triangle EPK$: A, B, C — середины сторон EP, PK, EK соответственно. Найти $P_{\triangle ABC}$, если $EP = 11$ дм, $PK = 16$ дм, $EK = 15$ дм.

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Параллелограмм	
	$AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$; $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$; $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C =$ $\angle C + \angle D = \angle A + \angle D = 180°$; $AB = CD$, $BC = AD$; $AO = OC$, $BO = OD$; $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$; $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$

Нахождение углов параллелограмма, если известен один из них

27

АЛГОРИТМ

❶ **Противолежащие углы параллелограмма равны. Поэтому противолежащий угол данному углу α равен ему. Вычислить его.**

⇩

❷ **Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°. Отсюда соседний угол данного параллелограмма равен $(180° - \alpha)$. Вычислить его.**

⇩

❸ **Записать найденные углы.**

⇩

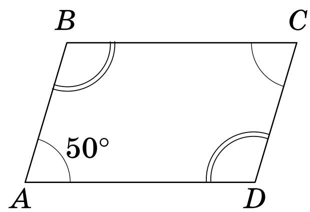
❹ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Один из углов параллелограмма равен 50°. Найти остальные углы.

Решение.

① Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм, $\angle A = 50°$.
По свойству параллелограмма:
$\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, $\angle C = 50°$.



② $\angle A + \angle B = 180°$ как углы параллелограмма, прилежащие к одной стороне.
$\angle B = 180° - \angle A = 180° - 50° = 130°$.

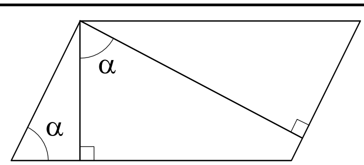
③ Итак, $\angle C = 50°$, $\angle B = \angle D = 130°$.

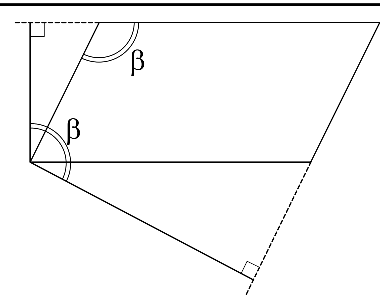
④ ***Ответ***: 130°, 50°, 130°.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

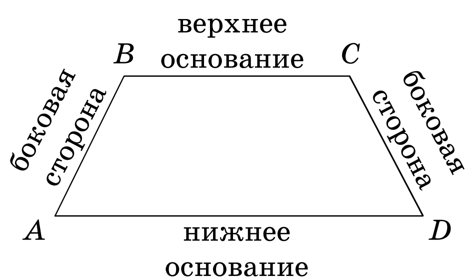
1. В параллелограмме $ABCD$ угол D равен 112°. Найти остальные углы параллелограмма.
2. В параллелограмме $KMNP$ угол M равен 80°. Найти остальные углы параллелограмма.
3. Найти все углы параллелограмма, если один из них равен 35°.

Помни!



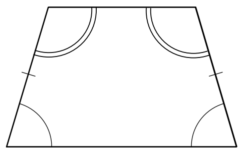
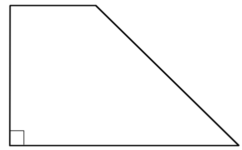


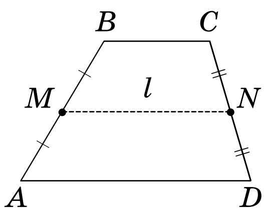
Трапеция



$BC \parallel AD$

$\angle A + \angle B =$
$= \angle C + \angle D = 180°$

Виды трапеции	
Равнобокая	Прямоугольная
	

Средняя линия трапеции	
Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых ее сторон.	
	$MN = l$ — средняя линия трапеции $ABCD$. $MN \parallel AD \parallel BC$, $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$

Вычисление средней линии трапеции

28

АЛГОРИТМ

❶ **Выполнить чертеж к задаче.**

⇩

❷ **Записать формулу средней линии трапеции.**

⇩

❸ **Подставить в эту формулу данные значения оснований трапеции и произвести вычисления.**

⇩

❹ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Найти среднюю линию трапеции $ABND$, основания которой BN и AD равны соответственно 7 см и 11 см.

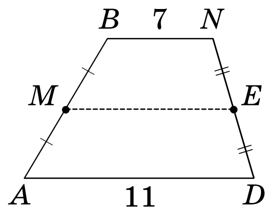
Решение.

① ME — средняя линия трапеции $ABND$.

② $ME = \dfrac{BN + AD}{2}$.

③ $ME = \dfrac{7 + 11}{2} = 9$ (см).

④ ***Ответ***: 9 см.



ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

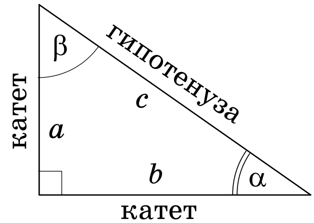
1. Найти среднюю линию трапеции $MNKP$, если $MN \parallel KP$ и $MN = 40$ см, $KP = 10$ см.

2. Основания трапеции равны 16 см и 20 см. Найти ее среднюю линию.

3. В трапеции $EFAS$ основания AF и ES равны 9 дм и 15 дм. Найти среднюю линию трапеции.

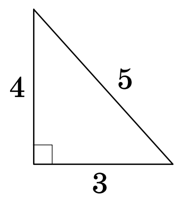
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

	$c > a,\ c > b,\ \alpha + \beta = 90°.$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

$c^2 = a^2 + b^2$. Отсюда: $a^2 = c^2 - b^2$; $b^2 = c^2 - a^2$.

Важно знать!	
Египетский треугольник — это прямоугольный треугольник с соотношением сторон 3 : 4 : 5	

Нахождение гипотенузы *c* прямоугольного треугольника по его катетам *a* и *b*

29

АЛГОРИТМ

❶ **Записать формулу теоремы Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$.**

⇩

❷ **Подставить в нее значения *a* и *b*, вычислить c^2.**

⇩

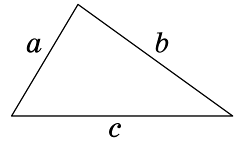
❸ **Вычислить *c* (извлечь квадратный корень из полученного числа).**

⇩

❹ **Записать ответ.**

Помни!

В любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон (неравенство треугольника).
$a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$
(все три неравенства должны выполняться одновременно).



ПРИМЕР

Катеты прямоугольного треугольника равны 12 см и 5 см. Найти его гипотенузу.

Решение.

① По теореме Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$.

② $c^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$.

③ $c = \sqrt{169} = 13$ (см).

④ ***Ответ***: 13 см.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны 6 см и 8 см.
2. В прямоугольном треугольнике заданы катеты 7 дм и 2 дм. Найти гипотенузу.
3. Катеты прямоугольного треугольника 3 м и 4 м. Найти гипотенузу.

30 Нахождение неизвестного катета *a* прямоугольного треугольника по его гипотенузе *c* и другому катету *b*

АЛГОРИТМ

❶ **Записать теорему Пифагора в обозначениях, данных в условии задачи.**

⇩

❷ **Выразить из этой формулы b^2. Вычислить его значение.**

⇩

❸ **Извлечь квадратный корень из полученного числа.**

⇩

❹ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

В прямоугольном треугольнике гипотенуза c равна 17 см, а один из катетов a равен 5 см. Найти второй катет.

Решение.

① По теореме Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$.

② $b^2 = c^2 - a^2 = 17^2 - 5^2 = 289 - 25 = 144$.

③ $c = \sqrt{144} = 12$ (см).

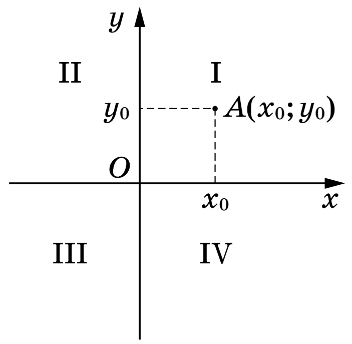
④ ***Ответ***: 12 см.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

В прямоугольном треугольнике заданы гипотенуза c и катет a. Найти второй катет b, если: **1)** $c = 50$ м, $a = 40$ м; **2)** $c = 1$ дм, $a = 0{,}6$ дм; **3)** $c = 8$ мм, $a = 4$ мм.

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

	Начало координат — т. O (0; 0); ось абсцисс — x; ось ординат — y; I, II, II, IV — координатные четверти. Точка лежит на оси x: (x; 0). Точка лежит на оси y: (0; y). x_0 — абсцисса т. A; y_0 — ордината т. A; (x_0; y_0) — координаты точки A

Помни!
Координатные оси взаимно перпендикулярны.

Координаты середины отрезка	
$x = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y = \dfrac{y_A + y_B}{2}$	Точки $A(x_\text{A};\ y_\text{A})$, $B(x_\text{B};\ y_\text{B})$ — произвольные точки плоскости; $C(x;\ y)$ — середина отрезка AB

Расстояние между двумя точками
1. На числовой оси между точками a и b: $d = \lvert a - b\rvert$. **2.** На плоскости между точками $A(x_\text{A};\ y_\text{A})$, $B(x_\text{B};\ y_\text{B})$: $d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ или $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

31 Нахождение расстояния между точками

АЛГОРИТМ

❶ **Записать формулу расстояния d между точками (x_1; y_1) и (x_2; y_2): $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.**

⇩

❷ **Подставить в формулу значения соответствующих координат точек и вычислить искомое расстояние.**

⇩

❸ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Найти длину отрезка AB, если $A(-8: 6)$, $B(4; -2)$.

Решение.

① $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

② $d = \sqrt{(4-(-8))^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{(4+8)^2 + (-8)^2} =$
$= \sqrt{12^2 + 8^2} = \sqrt{144+64} = \sqrt{208} = \sqrt{16 \cdot 13} = 4\sqrt{13}$.

③ ***Ответ***: $4\sqrt{13}$.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Найти расстояние между точками: **1)** $M(0; 3)$ и $N(-4; 0)$; **2)** $E(4; 3)$ и $F(-4; 9)$; **3)** $A(-2; -1)$ и $B(3; 4)$.

32 Нахождение координат середины отрезка

АЛГОРИТМ

❶ **Записать формулы для нахождения координат середины отрезка, если известны координаты его концов ($x_1; y_1$) и ($x_2; y_2$):**

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

⇩

❷ **Подставить в формулы соответствующие значения координат концов отрезка и вычислить искомые координаты.**

⇩

❸ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Найти координаты точки M — середины отрезка AB, если $A(-6; 15)$, $B(4; -3)$.

Решение.

① $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

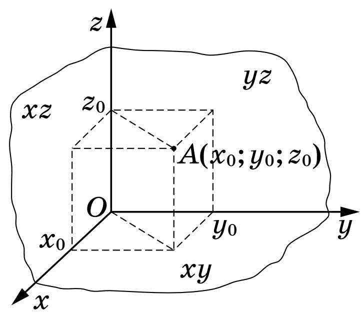
② $x_M = \dfrac{-6+4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1;\ y_M = \dfrac{15-3}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$.

③ ***Ответ***: $(-1; 6)$.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Найти координаты середины отрезка AC, если: **1)** $A(0; -6)$, $C(-10; 0)$; **2)** $A(3; 7)$, $C(2; 1)$; **3)** $A(-21; 16)$, $C(34; -10)$.

ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ



Начало координат — т. $O\,(0; 0; 0)$.
Координатные оси — x, y, z.
Координатные плоскости:
xy, xz, yz.
$(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — координаты точки A:
x_0 — абсцисса т. A,
y_0 — ордината т. A,
z_0 — аппликата т. A

Помни!
z — ось аппликат.
Точка лежит на оси x: $(x;\ 0;\ 0)$. Точка лежит на оси y: $(0;\ y;\ 0)$. Точка лежит на ос z: $(0;\ 0;\ z)$. Точка лежит в плоскости (xy): $(x;\ y;\ 0)$. Точка лежит в плоскости (xz): $(x;\ 0;\ z)$. Точка лежит в плоскости (yz): $(0;\ y;\ z)$

Координаты середины отрезка	
$x = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y = \dfrac{y_A + y_B}{2}$; $z = \dfrac{z_A + z_B}{2}$	Произвольные точки $A(x_{\text{A}};\ y_{\text{A}};\ z_{\text{A}})$, $B(x_{\text{B}};\ y_{\text{B}};\ z_{\text{B}})$. Середина отрезка AB — точка $C(x;\ y;\ z)$

Расстояние между двумя точками

1. На числовой оси между точками a и b: $d = |a - b|$.
2. В пространстве между точками $A(x_{\text{A}};\ y_{\text{A}};\ z_{\text{A}})$, $B(x_{\text{B}};\ y_{\text{B}};\ z_{\text{B}})$:

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Важно знать!
Расстояние между точками в пространстве находится аналогично алгоритму 31, а координаты середины отрезка в пространстве — алгоритму 32 с учетом изменения в формулах.

УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

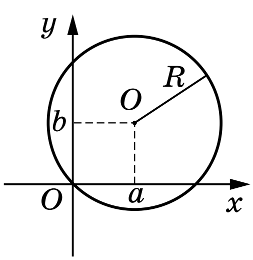
УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

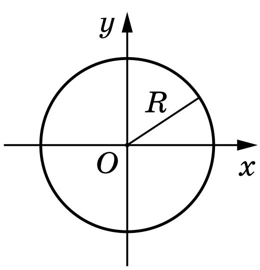
$ax + by + c = 0$,
где a, b, c — некоторые числа; x, y — переменные

Отдельные случаи
1. $a = 0$, $b \neq 0$. Прямая параллельна оси абсцисс или совпадает с ней при $c = 0$: $y = -\frac{c}{b}$. **2.** $b = 0$, $a \neq 0$. Прямая параллельна оси ординат или совпадает с ней при $c = 0$: $x = -\frac{c}{a}$. **3.** $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Прямая проходит через начало отсчета: $ax + by = 0$

Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки (x_1; y_1) и (x_2; y_2)	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
Уравнение прямой на плоскости в отрезках. Прямая пересекает ось *Ox* в точке *A*(*a*; 0) и ось *Oy* в точке *B*(0; *b*)	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ НА ПЛОСКОСТИ

	Центр окружности — т. $O(a; b)$. R — радиус окружности. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Уравнение окружности с центром в начале координат	
	$x^2 + y^2 = R^2$

Помни!

Если т. $O(a;\ b)$, то уравнение круга: $(x - a)^2 + (y - b)^2 \le R^2$.
Если т. $O(0;\ 0)$, то уравнение круга: $x^2 + y^2 \le R^2$

33 Составление уравнения прямой, проходящей через две заданные точки

АЛГОРИТМ

❶ **Записать формулу уравнения прямой: $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, где $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$ — данные точки.**

⇩

❷ **Подставить в формулу соответствующие значения координат данных точек и выразить y через x.**

⇩

❸ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;\ 2)$, $B(-4;\ -2)$.

Решение.

① $\dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} = \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A}$.

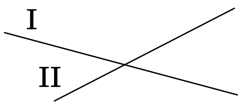
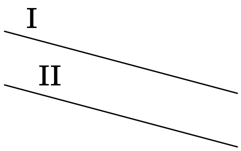
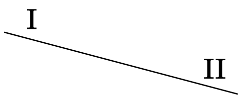
② $\dfrac{y - 2}{-2 - 2} = \dfrac{x - 3}{-4 - 3}$; $\dfrac{y - 2}{-4} = \dfrac{x - 3}{-7}$; $-7(y - 2) = -4(x - 3)$;
$-7y + 14 = -4x + 12$; $-7y = -4x + 12 - 14$;
$-7y = -4x - 2$; $y = \dfrac{4}{7}x + \dfrac{2}{7}$.

③ ***Ответ***: $y = \dfrac{4}{7}x + \dfrac{2}{7}$ см.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Составить уравнение прямой, проходящей через точки:
1) $(3;\ -4)$ и $(-2;\ 1)$; **2)** $(2;\ 2)$ и $(-3;\ -3)$; **3)** $(-6;\ 20)$ и $(1;\ -7)$.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ ПО ИХ УРАВНЕНИЯМ

Прямая I задается уравнением $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Прямая II задается уравнением $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.	
	Прямые I и II пересекаются: $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
	Прямые I и II параллельны: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
	Прямые I и II совпадают: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Важно знать!

Из уравнения прямой I получим y: $y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$.

Если $-\frac{a_1}{b_1} = k_1$, $-\frac{c_1}{b_1} = m_1$, тогда $y = k_1x + m_1$.

Аналогично для прямой II: $y = k_2x + m_2$.

Прямые I и II параллельны: $k_1 = k_2$.

Прямые I и II перпендикулярны: $k_1 \times k_2 = -1$.

k — угловой коэффициент прямой.

Нахождение углового коэффициента прямой, проходящей через две точки

34

АЛГОРИТМ

1. **Записать формулу углового коэффициента k прямой, проходящей через точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.**

⇩

2. **Подставить соответствующие значения координат данных точек в формулу и вычислить k.**

⇩

3. **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $E(6;\ 4)$ и $O(3;\ -2)$.

Решение.

① $k = \dfrac{y_O - y_E}{x_O - x_E}$.

② $k = \dfrac{-2-4}{3-6} = \dfrac{-6}{-3} = 2$.

③ ***Ответ***: 2.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки: **1)** $M(5;\ -4)$ и $N(1;\ -6)$; **2)** $A(-3;\ -3)$ и $B(1;\ 1)$; **3)** $K(-7;\ 8)$ и $O(6;\ 8)$.

35 Составление уравнения окружности по координатам ее центра и радиусу

АЛГОРИТМ

❶ **Записать общий вид уравнения окружности с центром в точке $(a;\ b)$ и радиусом R: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.**

⇩

❷ **Подставить соответствующие значения координат центра данной окружности и ее радиуса в эту формулу.**

⇩

❸ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Составить уравнение окружности с центром в точке $O(-2;\ 5)$ и радиусом $R = 4$.

Решение.

① $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

② $(x - (-2))^2 + (y - 5)^2 = 4^2$; $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$.

③ ***Ответ***: $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

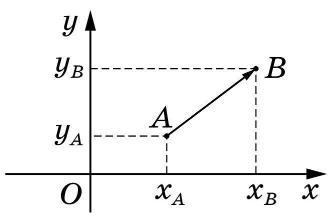
Составить уравнение окружности с центром в точке A и радиусом R, если:

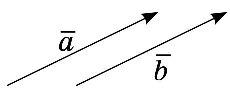
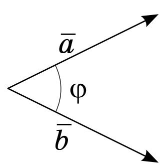
1) $A(0;\ 0)$, $R = 8$; **2)** $3(-5;\ -2)$, $R = 0{,}1$; **3)** $A(4;\ 9)$, $R = 6$.

ВЕКТОРЫ

ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

Вектор — направленный отрезок.

	$\overline{AB}$ — вектор, т. A — начало вектора, т. B — конец вектора

Координаты вектора	$\overline{AB}(x_B - x_A;\ y_B - y_A)$ или $\bar{a}(a_1;\ a_2)$
Модуль вектора (абсолютная величина вектора, длина вектора)	$\lvert\overline{AB}\rvert = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ или $\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
Равные векторы: $\bar{a}(a_1;\ a_2)$, $\bar{b}\ (b_1;\ b_2)$	 $\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{matrix}$
Нулевой вектор	$\bar{0}$
Действия с векторами	$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$; $\lambda \cdot \bar{a} = \overline{(\lambda a_1;\ \lambda a_2)}$; $\lvert\lambda \cdot \bar{a}\rvert = \lvert\lambda\rvert \cdot \lvert\bar{a}\rvert$
Коллинеарные векторы	$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$; $(\bar{a} \parallel \bar{b})$
Скалярное произведение векторов: $\bar{a} \cdot \bar{b} = \lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{b}\rvert \cdot \cos\varphi$, или $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$	
Признак перпендикулярности векторов	Если $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, то $\bar{a} \perp \bar{b}$

36 Нахождение суммы векторов, если известны координаты их начал и концов

АЛГОРИТМ

❶ **Найти координаты каждого данного вектора (из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты его начала).**

⇩

❷ **Сложить полученные векторы по правилу сложения векторов.**

⇩

❸ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Даны точки $A(2;\,-3)$, $B(0;\,1)$, $C(-4;\,2)$, $D(5;\,9)$. Найти $\overline{AC}+\overline{BD}$.

Решение.

① $\overline{AC}=\overline{(x_C-x_A;\,y_C-y_A)}=\overline{(-4-2;\,2-(-3))}=\overline{(-6;\,5)}$;

$\overline{BD}=\overline{(x_D-x_B;\,y_D-y_B)}=\overline{(5-0;\,9-1)}=\overline{(5;\,8)}$.

② $\overline{AC}+\overline{BD}=\overline{(-6;\,5)}+\overline{(5;\,8)}=\overline{(-6+5;\,5+8)}=\overline{(-1;\,13)}$.

③ ***Ответ***: $\overline{(-1;\,13)}$.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Даны точки $A(0;\,1)$, $B(-1;\,0)$, $C(1;\,0)$, $D(0;\,-1)$. Найти $\overline{AB}+\overline{CD}$.

2. Даны точки $P(-8;\,3)$, $E(3;\,-2)$, $K(-5;\,0)$, $F(3;\,4)$. Найти $\overline{PE}+\overline{FK}$.

3. Даны точки $O(0;\,0)$, $M(3;\,8)$, $N(0;\,-2)$, $R(4;\,4)$. Найти $\overline{MO}+\overline{RN}$.

Нахождение неизвестной координаты вектора по второй его координате и длине

37

АЛГОРИТМ

❶ **Записать формулу длины вектора.**

❷ **Подставить в нее известные величины.**

❸ **Выразить и вычислить неизвестную координату вектора.**

❹ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Длина вектора (абсолютная величина вектора) $\bar{a}$ равна 60, $\bar{a}(48;\ n)$. Найти n.

Решение.

① $\bar{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

② $\sqrt{48^2 + n^2} = 60;\ 48^2 + n^2 = 60^2.$

③ $n^2 = 60^2 - 48^2 = (60 - 48) \cdot (60 + 48) = 12 \cdot 108;$

$n = \sqrt{12 \cdot 108} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 36} = 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36.$

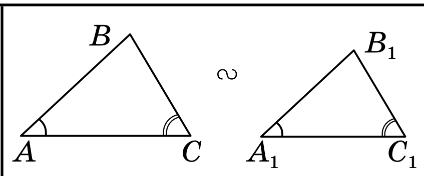
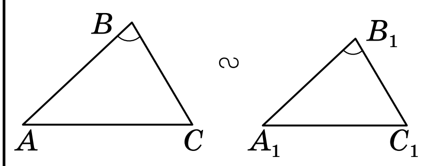
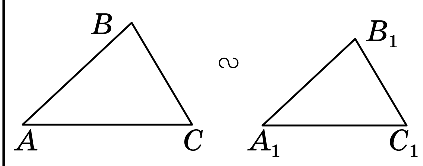
④ ***Ответ***: 36.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Абсолютная величина вектора $\bar{b}(24;\ m)$ равна 25. Найти m.
2. Найти x, если абсолютная величина вектора $\bar{a}(9;\ x)$ равна 15.
3. Абсолютная величина вектора $\bar{c}(y;\ 20)$ равна 25. Найти y.

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

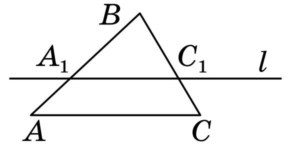
ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

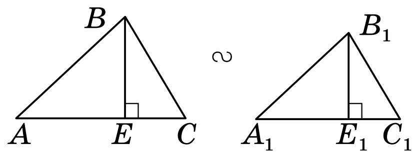
1. По двум углам: $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$	
2. По двум пропорциональным сторонам и углу между ними: $\angle B = \angle B_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$	
3. По трем пропорциональным сторонам: $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$	

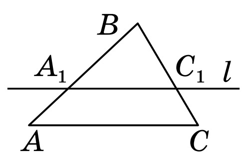
Помни!
Знак, обозначающий подобие фигур: $\backsim$.
В подобных треугольниках соответствующие углы равны.

Важно знать!
Преобразование одной фигуры в другую называется **преобразованием подобия**, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одинаковое число раз.

СВОЙСТВА ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

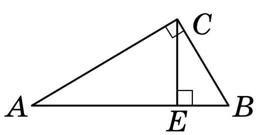
Прямая, параллельная стороне треугольника, пересекающая две его другие стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному. Если $l \parallel AC$, $l \cap AB = A_1$, $l \cap BC = C_1$, тогда $\triangle ABC \backsim \triangle A_1BC_1$	

Соответствующие высоты подобных треугольников относятся как соответствующие стороны (k — коэффициент подобия): $\frac{BE}{B_1E_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$	
Периметры подобных треугольников относятся как их соответствующие линейные измерения (стороны, высоты, медианы, биссектрисы)	$\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$
Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия	$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = k^2$

Важно знать!	
Прямая, параллельная стороне треугольника, пересекающая две его другие стороны, делит эти стороны на пропорциональные отрезки	 $l \parallel AC$ $\frac{BA_1}{AA_1} = \frac{BC_1}{CC_1}$

СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОДОБИЯ

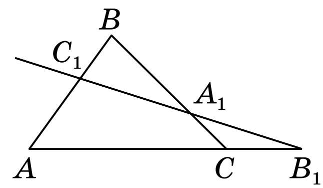
1. При преобразовании подобия точки, лежащие на одной прямой, переходят в точки, лежащие на одной прямой, порядок их взаимного расположения сохраняется.
2. При преобразовании подобия прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, а отрезки — в отрезки.
3. При преобразовании подобия сохраняются углы между полупрямыми.

Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобных данному.	 $\triangle ACB \sim \triangle AEC,\ \triangle BCA \sim \triangle BEC$

Теорема Менелая

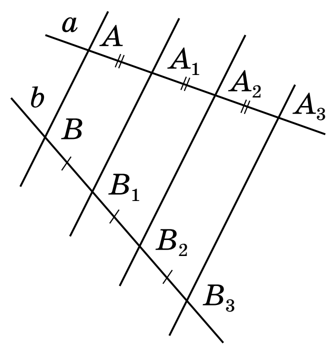
Если на сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1 и A_1, а на продолжении стороны AC — точка B_1, то для того, чтобы точки A_1, B_1, C_1 принадлежали одной данной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$



Обобщенная теорема Фалеса

Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной прямой равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой.
Если $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = A_2A_3$, тогда $B_1B_2 = B_2B_3$



38 Нахождение неизвестной стороны одного из подобных треугольников

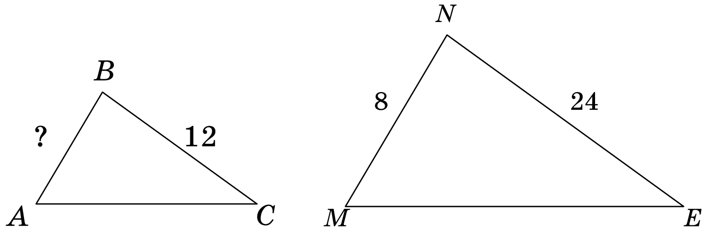
АЛГОРИТМ

1. **Выполнить рисунок к задаче.**
2. **Записать равенства отношений соответствующих сторон подобных треугольников.**
3. **Оставить то равенство отношений, которое содержит одно неизвестное — искомую сторону, и найти это неизвестное, решив полученную пропорцию.**
4. **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Треугольники ABC и MNE подобны.
Найти AB, если $MN = 8$ см, $BC = 12$ см, $NE = 24$ см.

Решение.

① 

② Так как по условию $\triangle ABC \sim \triangle MNE$, то $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NE} = \dfrac{AC}{ME}$.

③ $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NE}$; $AB = \dfrac{MN \cdot BC}{NE} = \dfrac{8 \cdot \cancel{12}}{\cancel{24}_{\,2}} = 4$ (см).

④ ***Ответ***: 4 см.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Найти BC, если $\triangle EON \sim \triangle ACB$, $EN = 3$ см, $ON = 5$ см, $AB = 48$ см.
2. Треугольники KRN и ABC подобны, $KR = 2{,}1$ см, $AB = 6{,}3$ см, $AC = 7{,}2$ см. Найти KN.
3. Известно, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, $A_1C_1 = 32$ м, $A_1B_1 = 28$ м, $AC = 4$ м. Найти AB.

ВПИСАННЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ УГЛЫ

ПЛОСКИЙ УГОЛ

Угол разбивает плоскость на две части, каждая из которых называется **плоским** углом.

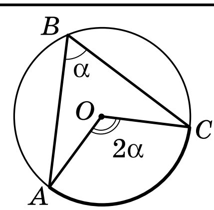
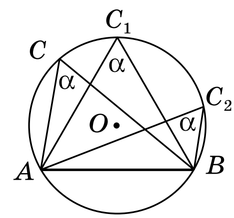
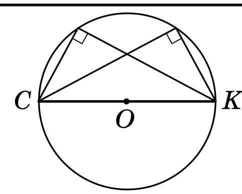
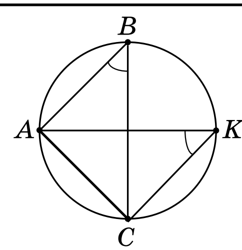
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ УГОЛ

Плоские углы с общими сторонами называются **дополнительными**.

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ И ВПИСАННЫЙ УГЛЫ

Центральным углом называется плоский угол с вершиной в центре окружности, стороны которого пересекают эту окружность.

Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность.

Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла. $\angle ABC$ — вписанный, $\angle AOC$ — центральный	
Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны	
Вписанный угол, опирающийся на диаметр, является прямым	
Вписаные углы, опирающиеся на одну хорду, равны. $\angle ABC = \angle CKA$, т. к. они опираются на хорду AC	

Нахождение центрального угла по соответствующему ему вписанному углу в окружность

39

АЛГОРИТМ

❶ **Величину данного вписанного угла умножить на 2.**

⇩

❷ **Записать ответ.**

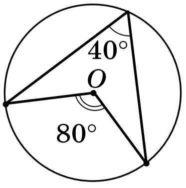
ПРИМЕР

Найти центральный угол, если вписанный угол в окружность, опирающийся на ту же дугу, равен 40°.

Решение.

① $40° \cdot 2 = 80°$.

② ***Ответ***: 80°.



ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Найти центральный угол, если вписанный угол, соответствующий ему, равен: **1)** 60°; **2)** 15°; **3)** x°.

Нахождение вписанного угла по соответствующему центральному углу

40

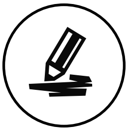
АЛГОРИТМ

❶ **Величину данного угла разделить на 2.**

⇩

❷ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

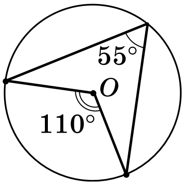


Найти величину вписанного угла, если соответствующий ему центральный угол равен 110°.

Решение.

① $110° : 2 = 55°$.

② ***Ответ***: 55°.



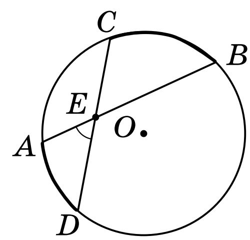
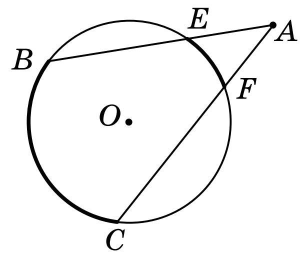
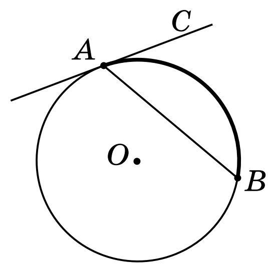
ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Найти вписанный угол, если величина соответствующего ему центрального угла, равна: **1)** 94°; **2)** 160°; **3)** $4a°$.

ДУГА ОКРУЖНОСТИ

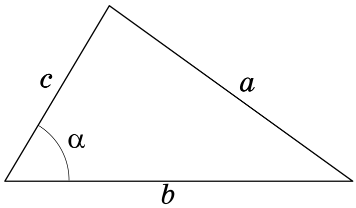
Часть окружности, расположенную между сторонами центрального угла, называют **дугой окружности:** $\cup AC$, соответствующая этому центральному углу.

Помни!
Центральный угол AOC опирается на $\cup AC$. $\angle AOC$ и $\cup AC$ имеют одинаковые градусные меры. Вписанный угол ABC опирается на $\cup AC$, тогда $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Угол с вершиной внутри окружности измеряется полусуммой дуг, на которые опирается данный угол и вертикальный ему угол. $\angle AED = \frac{\cup AD + \cup BC}{2}$	
Если вершина угла лежит за пределами окружности, а его стороны пересекают эту окружность, то величина угла равна полуразности большей и меньшей дуг, находящихся между его сторонами. $\angle BAC = \frac{\cup BC - \cup EF}{2}$	
Величина угла между касательной и хордой, которая проходит через точку касания, равна половине дуги, лежащей между его сторонами. $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup AB$	

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.
$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$.

Следствия:

1) $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

2) $\angle\alpha$ — тупой, если $-1 \le \cos\alpha < 0$ (или $a^2 > b^2 + c^2$);
$\angle\alpha$ — острый, если $0 < \cos\alpha \le 1$ (или $a^2 < b^2 + c^2$).

3) $\angle\alpha$ — прямой, если $\cos\alpha = 0$.

Определение вида треугольника, если известны его стороны

41

АЛГОРИТМ

❶ **Найти квадраты данных сторон треугольника a^2, b^2, c^2.**

❷ **Если $a^2 > b^2 + c^2$, то противолежащий стороне a угол тупой (если $a^2 < b^2 + c^2$, то противолежащий стороне a угол острый; если $a^2 = b^2 + c^2$, то противолежащий стороне a угол прямой).**

❸ **Сделать вывод.**

❹ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Определить вид треугольника, если его стороны равны 4 см, 5 см, 6 см.

Решение.

① $4^2 = 16$; $5^2 = 25$; $6^2 = 36$.

② $16 < 25 + 36$; $25 < 16 + 36$; $36 < 16 + 25$.

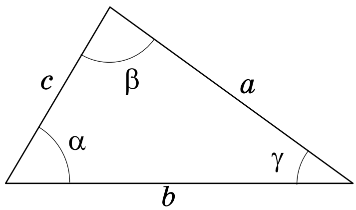
③ Значит, углы, лежащие против данных сторон, острые.

④ ***Ответ***: треугольник остроугольный.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

Определить вид треугольника, если его стороны равны:
1) 5 м, 13 м, 12 м; **2)** 8 дм, 4 дм, 7 дм; **3)** 5 мм, 8 мм, 6 мм.

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

	$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

Помни!
Если в треугольнике есть тупой угол, то противолежащая ему сторона наибольшая.

42 Нахождение неизвестной стороны треугольника с помощью теоремы синусов

АЛГОРИТМ

❶ **Выполнить чертеж к задаче.**

⇩

❷ **Записать теорему синусов.**

⇩

❸ **Из записанных равенств выбрать одно, в котором есть одна неизвестная величина — сторона треугольника, которую нужно найти.**

⇩

❹ **Найти неизвестный член полученной пропорции.**

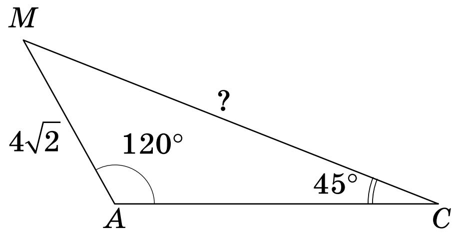
⇩

❺ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

В треугольнике AMC $AM = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45°$, $\angle A = 120°$. Найти сторону MC.

Решение.

① 

② По теореме синусов: $\dfrac{AM}{\sin\angle C} = \dfrac{MC}{\sin\angle A} = \dfrac{AC}{\sin\angle M}$.

③ Отсюда: $\dfrac{AM}{\sin\angle C} = \dfrac{MC}{\sin\angle A}$.

④ $$MC = \frac{AM\cdot\sin\angle A}{\sin\angle C} = \frac{4\sqrt{2}\cdot\sin 45°}{\sin 120°} = \frac{4\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\text{ (см).}$$

⑤ ***Ответ***: $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ (см).

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. В треугольнике EBC $EB = 4\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45°$, $\angle E = 30°$. Найти сторону BC.
2. В треугольнике MNK $NK = 6\sqrt{3}$ см, $\angle M = 120°$, $\angle N = 30°$. Найти сторону MK.
3. В треугольнике ABC $AC = 4\sqrt{3}$ см, $\angle C = 45°$, $\angle B = 60°$. Найти сторону AB.

43 Нахождение радиуса окружности, описанной около треугольника с помощью теоремы синусов

АЛГОРИТМ

❶ **Выполнить чертеж к задаче.**

❷ **Записать формулу вычисления R: $R = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.**

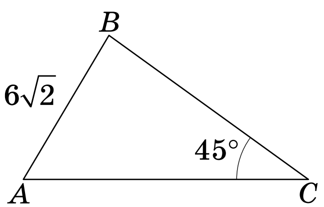
❸ **Вычислить значение R.**

❹ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

В треугольнике ABC $AB = 6\sqrt{2}$ см, $\angle C = 45°$. Найти радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Решение.

① 

② $R = \dfrac{AB}{\sin\angle C}$.

③ $R = \dfrac{6\sqrt{2}}{\sin 45°} = \dfrac{6\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6 \cdot 2 = 12$ (см).

④ ***Ответ***: 12 см.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

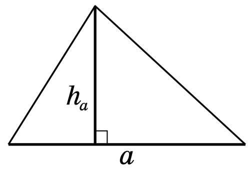
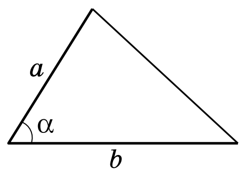
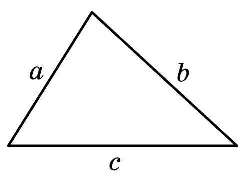
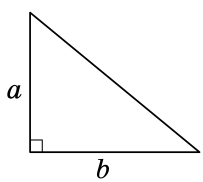
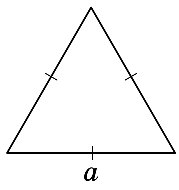
1. В треугольнике ABC $AC = 4\sqrt{3}$ см, $\angle B = 60°$. Найти радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

2. В треугольнике ABC $BC = 12$ дм, $\angle A = 30°$. Найти радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

3. В треугольнике MOP $MP = 5\sqrt{2}$ см, $\angle O = 135°$. Найти радиус окружности, описанной около $\triangle MOP$.

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

	$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$
	$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$
 **Формула Герона**	$p = \frac{a+b+c}{2}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
R — радиус описанной окружности	$S = \frac{abc}{4R}$
r — радиус вписанной окружности	$S = p \cdot r$
	$S = \frac{ab}{2}$
	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Помни!
Равновеликими называются фигуры, площади которых равны.

44 Вычисление площади треугольника

АЛГОРИТМ

❶ **Выполнить чертеж к задаче.**

⇩

❷ **По условию задачи подобрать и записать одну из формул для вычисления площади треугольника.**

⇩

❸ **Подставить в формулу данные из условия задачи и вычислить площадь данного треугольника.**

⇩

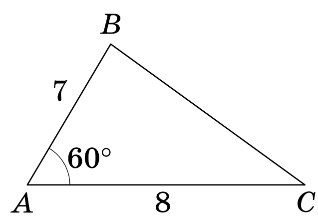
❹ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Найти площадь треугольника, две стороны которого равны 8 см и 7 см, а угол между ними 60°.

Решение.

① Пусть дан треугольник ABC, $\angle A = 60°$, $AB = 7$ см, $AC = 8$ см.



② Запишем формулу вычисления площади треугольника по двум сторонам и углу между ними.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A.$$

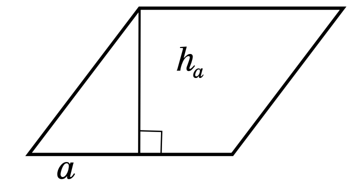
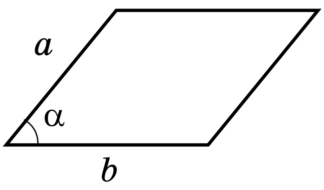
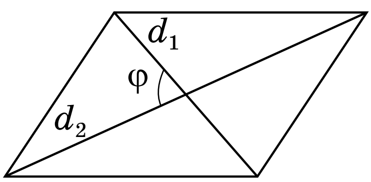
③ $$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \sin 60° = 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}\ (\text{см}^2).$$

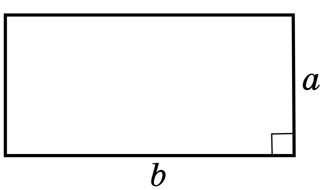
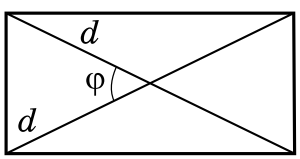
④ ***Ответ***: $14\sqrt{3}$ см^2.

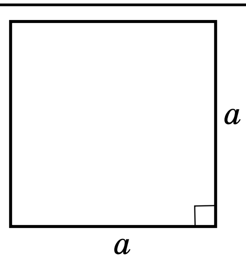
ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

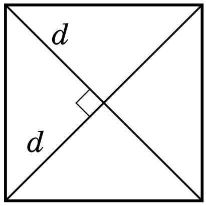
1. Найти площадь треугольника, стороны которого равны 7 дм, 8 дм и 3 дм.
2. Найти площадь треугольника, если одна из его сторон равна 16 см, а высота треугольника, проведенная к ней, — 9 см.
3. Найти площадь равностороннего треугольника, сторона которого $8\sqrt{3}$ см.

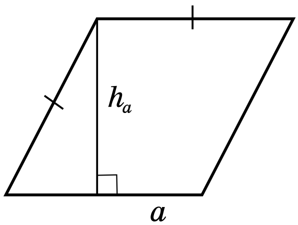
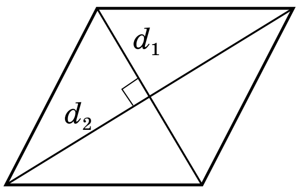
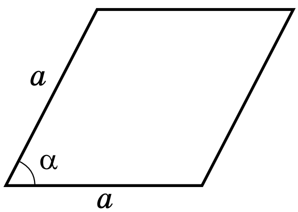
ПЛОЩАДИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

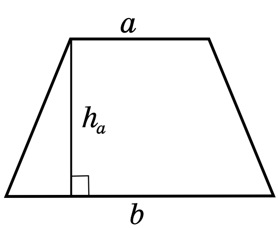
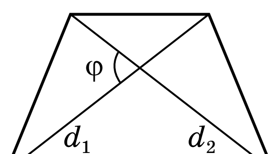
Параллелограмм	
	$S = a \cdot h_a$
	$S = ab\sin\alpha$
	$S = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi$

Прямоугольник	
	$S = ab$
	$S = \dfrac{1}{2} d^2 \sin\varphi$

Квадрат	
	$S = a^2$

	$S = \frac{1}{2} d^2$

Ромб	
	$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$
	$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$
	$3 = a^2 \sin \alpha$

Трапеция	
	$S = \frac{a+b}{2} \cdot h_a$
	$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi$

Вычисление площади четырехугольника

45

АЛГОРИТМ

❶ **Выполнить чертеж к задаче.**

⇩

❷ **Подобрать одну из формул для вычисления площади четырехугольника по условию задачи.**

⇩

❸ **Вычислить площадь четырехугольника, подставив в формулу данные из условия задачи.**

⇩

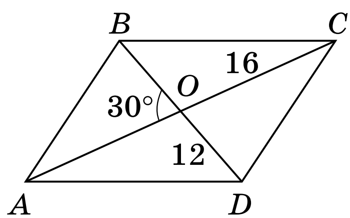
❹ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Найти площадь параллелограмма, диагонали которого равны 12 см и 16 см, а угол между ними 30°.

Решение.

① Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм, $AC = 16$ см, $BD = 12$ см, $\triangle AOB = 30°$.



② $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \angle AOB.$

③ $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 \cdot \sin 30° = 96 \cdot \dfrac{1}{2} = 48$ (см^2).

④ ***Ответ***: 48 см^2.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

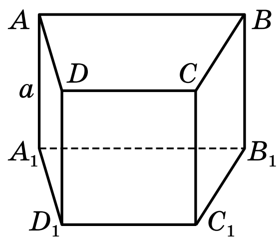
1. Найти площадь параллелограмма, две стороны которого равны 10 дм и $5\sqrt{2}$ дм, а угол между ними 45°.
2. Вычислить площадь трапеции, основания которой равны 11 см и 19 см, а высота — 12 см.
3. Найти площадь ромба, сторона которого 26 см, а высота, проведенная к ней, равна 10 см.

ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ

ПРИЗМА

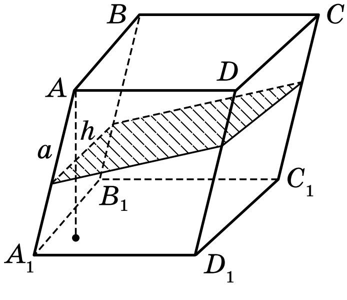
Периметр основания	$P_{осн}$
Площадь полной поверхности	S_n
Периметр перпендикулярного сечения	$P_{п.с}$
Площадь боковой поверхности	$S_б$
Площадь основания	$S_{осн}$
Площадь перпендикулярного сечения	$S_{п.с}$
Боковое ребро	a
Объем	V

Прямая призма



$h = a,$
$S_б = P_{осн} \cdot h,$
$S_п = S_б + 2S_{осн},$
$V = S_{осн} \cdot h$

Наклонная призма



Перпендикулярное сечение — заштрихованная часть.
$S_б = P_{п.с} \cdot a,$
$S_п = S_б + 2S_{осн},$
$V = S_{осн} \cdot h = S_{п.с} \cdot a$

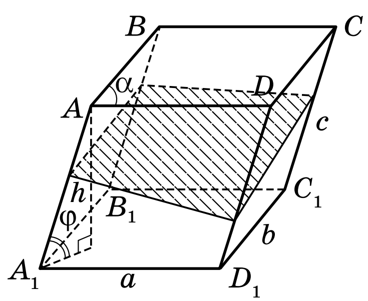
Помни!

Если некий многоугольник является перпендикулярным сечением призмы, то его внутренние углы являются линейными углами двугранных углов между соответствующими боковыми гранями.

Важно знать!
Прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник, называется правильной.
В случае прямой призмы линейными углами двугранных углов между боковыми гранями являются углы при основании.

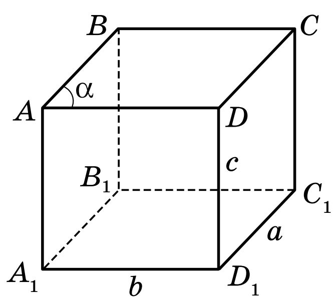
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Наклонный параллелепипед



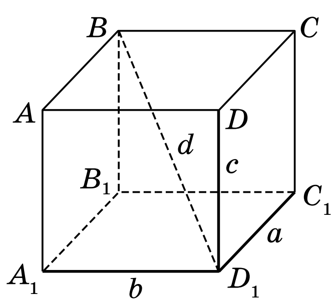
Заштрихованная часть — **перпендикулярное сечение**.
$S_б = c \cdot P_{п.с}$,
$S_п = S_б + 2S_{осн}$,
$V = S_{осн} \cdot h$,
$V = abc \cdot \sin\varphi \cdot \sin\alpha$

Прямой параллелепипед

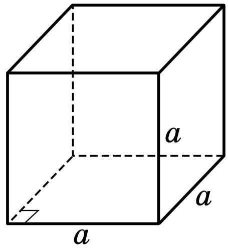


Боковые ребра перпендикулярны основаниям.
$ABCD$ — параллелограмм.
$h = c$,
$S\text{б} = 2c(a + b)$,
$V = abc \sin\alpha$

Прямоугольный параллелепипед



$ABCD$ — прямоугольник.
Высота — боковое ребро,
d — диагональ,
a, b — стороны основания,
c — боковое ребро,
$S_б = (a + b) \cdot 2c$,
$S_п = 2(ab + bc + ac)$,
$V = abc$,
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Куб	
 	a — ребро куба, $S_б = 4a^2$, $S_п = 6a^2$, $V = a^3$

46 Вычисление площади поверхности и объема многогранника

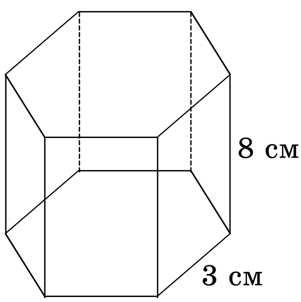
АЛГОРИТМ

1. **Выполнить чертеж к задаче.**
2. **По условию задачи выбрать необходимую формулу для вычисления площади боковой поверхности призмы, или площади полной поверхности, или объема призмы.**
3. **Подставить в эту формулу значения из условия задачи и вычислить искомую величину.**
4. **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Основанием прямой призмы является правильный шестиугольник со стороной 3 см, а боковое ребро призмы равно 8 см. Найти площадь боковой поверхности призмы.

Решение.

① 

② $S_{б.п} = P_{осн} \cdot H$, где $P_{осн}$ — периметр основания призмы, H — длина бокового ребра прямой призмы.

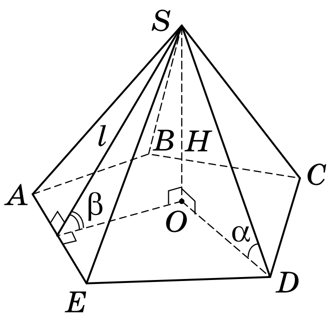
③ $S_{б.п} = 6 \cdot 3 \cdot 8 = 144$ (см^2).

④ ***Ответ***: 144 см^2.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Найти площадь поверхности и объем куба с ребром 7 см.
2. Основанием прямой призмы является треугольник со сторонами 13 см, 14 см, 15 см. Найти объем призмы и площадь ее боковой поверхности, если ее боковое ребро равно 5 см.
3. Найти площадь поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда, линейные измерения которого 10 м, 8 м, 6 м.

ПИРАМИДА



$S_б$ равна сумме площадей боковых граней,
$S_п = S_б + S_{осн}$,
$V = \dfrac{1}{3} S_{осн} \cdot H$.
Апофема — l, высота — H,
полупериметр основания — p,
полная поверхность — $S_п$,
площадь основания — $S_{осн}$,
площадь боковой поверхности — $S_б$,
объем — V

Свойства пирамиды

1. Если боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковым углом α (т. O — центр окружности, описанной около основания), тогда:

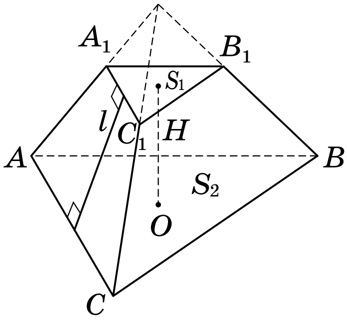
- все боковые ребра равны: $SA = SE = SD = SC = SB = b$;
- вершина проектируется в центр окружности, описанной около основания.

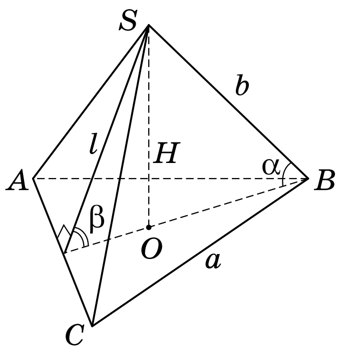
Радиус R описанной окружности: $R = b\cos\alpha$.
Высота H: $H = b\sin\alpha$ или $H = R\,\mathrm{tg}\,\alpha$

2. Если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одинаковым углом β, тогда:

- все высоты боковых граней (апофемы) равны l;
- вершина проектируется в центр окружности, вписанной в основание (т. O — центр вписанной в основание окружности).

Радиус r вписанной окружности: $r = l\cos\beta$.
Высота H: $H = r\,\mathrm{tg}\,\beta$ или $H = l\sin\beta$.
Площадь S: $S_{осн} = S_б \cdot \cos\beta$, $S_б = \pi l$, $S_{осн} = \pi r$

<table>
<tr><th colspan="2">Усеченная пирамида</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$S_п = S_б + S_1 + S_2$
S_1, S_2 — площади оснований,
H — высота,
l — апофема,
p_1, p_2 — полупериметры оснований</td></tr>
<tr><td>Для правильной усеченной пирамиды</td><td>$S_б = l(p_1 + p_2)$,
$V = \dfrac{H}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}\right)$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Правильная треугольная пирамида</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$r = l\cos\beta$, $R = b\cos\alpha$,
$a = b\sqrt{3}\cos\alpha$,
$a = 2l\sqrt{3}\cos\beta$,
$2l\sqrt{3}\cos\beta = b\cos\alpha$,
$V = \dfrac{a^2H\sqrt{3}}{12}$,
$S_б = \dfrac{3al}{r}$, $S_{осн} = S_б\cos\beta$</td></tr>
</table>

47 Вычисление площади поверхности или объема пирамиды

АЛГОРИТМ

1. **Выполнить чертеж к задаче.**
2. **Выбрать формулу для вычисления по условию задачи.**
3. **Подставить данные из условия задачи в формулу и вычислить искомую величину.**
4. **Записать ответ.**

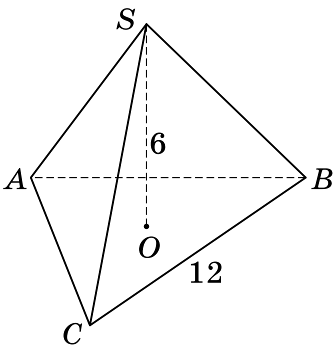
Помни!
Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники.
Пирамида называется **правильной**, если ее основание — правильный многоугольник, а основание высоты является центром этого многоугольника.

ПРИМЕР

Найти объем пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной 12 см, а высота пирамиды равна 6 см.

Решение.

①



② $SO \perp (ABC)$

$V = \dfrac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SO.$

③ $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{BC^2\sqrt{3}}{4} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 72\sqrt{3}$ (см^3).

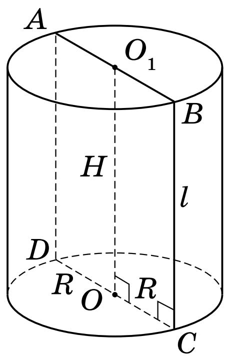
④ ***Ответ***: $72\sqrt{3}$ см^3.

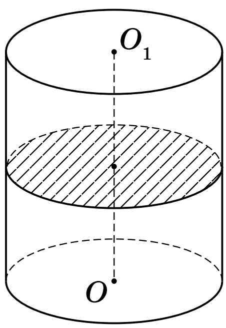
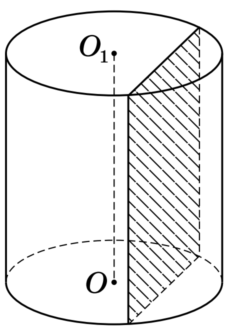
ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Найти объем пирамиды, основание которой — квадрат со стороной 6 см, а высота пирамиды равна 9 см.
2. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, в основании которой лежит равносторонний треугольник со стороной 2 см, а апофема равна 3 см.
3. Высота боковой грани пирамиды равна 4 дм, основание — квадрат со стороной 5 дм. Найти площадь поверхности пирамиды.

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

ЦИЛИНДР

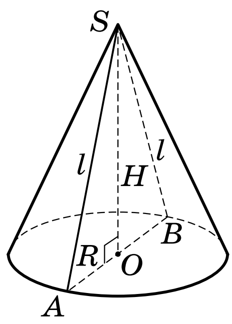
<table>
<tr><td>
</td><td>R — радиус основания,
H — высота,
$S_б$ — боковая поверхность,
$S_п$ — полная поверхность,
V — объем,
l — образующая,
OO_1 — ось цилиндра.
Прямоуголник $ABCD$ — осевое сечение.
$l = H$,
$S_б = 2\pi R \cdot H$,
$S_п = 2\pi R(R + H)$ ($S_п = 2S_{осн} + S_б$),
$S_п = 2\pi RH + 2\pi R^2$,
$V = \pi R^2 H$</td></tr>
</table>

	Сечением цилиндра плоскостью, параллельной его основанию, является окружность, равная основанию цилиндра
	Сечением цилиндра плоскостью, параллельной его оси, является прямоугольник, две стороны которого — образующая цилиндра, а две другие — параллельные хорды

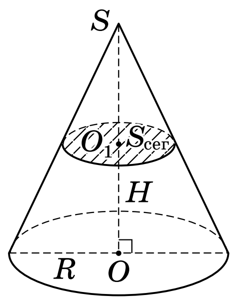
Помни!

Касательная плоскость к цилиндру — плоскость, проходящая через образующую прямого цилиндра и перпендикулярную осевому сечению, проведенному через эту образующую.

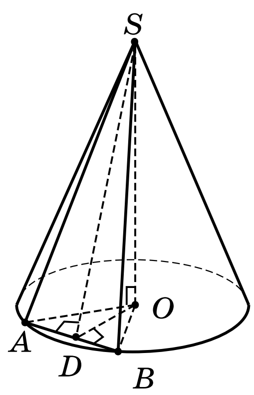
КОНУС



l — образующая,
SO — ось цилиндра.
Равнобедренный $\triangle ASB$ — осевое пересечение.
$S_б = \pi R l$,
$S_п = S_{осн} + S_б$,
$S_п = \pi R(R + l)$,
$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$



Площадь сечения конуса, параллельного основанию.
$OS = H$, $SO_1 = 1$,
$S_{сеч} = \pi R^2 \cdot \dfrac{d^2}{H^2}$,
d — диаметр основания



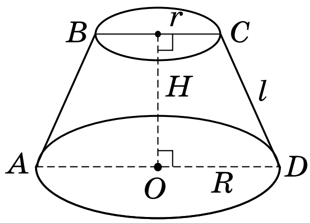
$S_{\Delta ASB} = \dfrac{S_{\Delta AOB}}{\cos \angle SDO}$,

$S_б = \dfrac{S_{осн}}{\cos \beta}$,

$S_{осн}$ — площадь основания,
β — угол наклона образующей конуса к его основанию

$\triangle ASB$ — сечение конуса, пересекающее основание конуса по хорде AB.
$\angle AOB$ — угол, под которым видно хорду AB из центра основания.
$\angle ASB$ — угол, под которым видно хорду AB из вершины конуса.
$\triangle ASB$ — равнобедренный ($SA = SB$).
$\triangle AOB$ — равнобедренный ($OA = OB = R$).
OD — биссектриса, медиана, высота $\triangle AOB$ — расстояние от т. O до AB.

SD — расстояние от точки S до хорды AB. $\angle SDO$ — линейный угол двугранного угла между плоскостью сечения (ASB) и плоскостью основания (AOB)

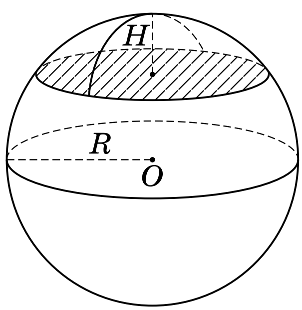
Усеченный конус	
	R, r — радиусы оснований. Равнобокая трапеция $ABCD$ — осевое сечение. $S_б = \pi l(R + r)$, $S_п = \pi(R^2 + r^2 + l(R + r))$, $V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$

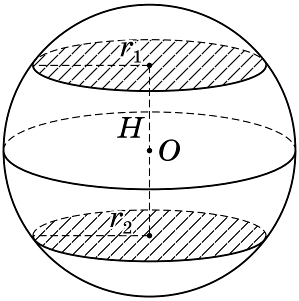
Помни!
Высота усеченного конуса — расстояние между плоскостями его оснований.

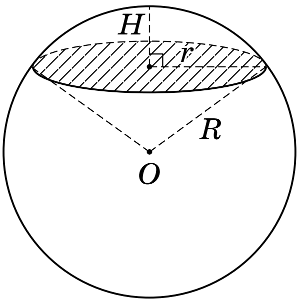
Помни!
Высота усеченного конуса равна длине отрезка оси, который находится между плоскостями оснований.

Важно знать!
Осевое сечение усеченного конуса — равнобокая трапеция, у которой основания — диаметры оснований усеченного конуса; боковые стороны — образующие; высота — высота усеченного конуса.

ШАР. СФЕРА

	R — радиус шара (сферы). H — высота сегмента. Поверхность шара — сфера. $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$ — объем шара. $S_{сф} = 4\pi R^2$ (площадь сферы — площадь поверхности шара)

Шаровой пояс	
	Высота пояса — H. Радиусы оснований r_1, r_2. R — радиус шара. $S = 2\pi RH$, $V = \frac{1}{3}\pi H^3(3R - H)$

Шаровой сектор	
	Радиус основания сегмента, входящего в сектор — r. Радиус шара — R. Высота сегмента — H. $S = \pi R(2H + r)$, $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$

Вычисление поверхностей и объемов цилиндра и конуса

48

АЛГОРИТМ

❶ **Выполнить чертеж к задаче.**

⇩

❷ **Записать формулу, необходимую для нахождения неизвестной величины по условию задачи.**

⇩

❸ **Подставить данные из условия задачи в формулу и вычислить необходимые значения.**

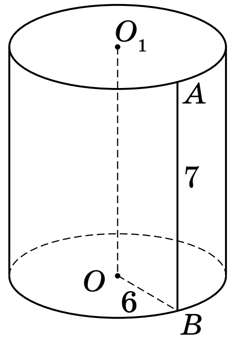
⇩

❹ **Записать ответ.**

ПРИМЕР

Радиус основания цилиндра равен 6 см, а его образующая — 7 см. Найти объем цилиндра.

Решение.

① 

② $V = S_{осн} \cdot H$, $S_{осн} = \pi r^2$, $H = AB$.

③ $V = \pi \cdot 6^2 \cdot 7 = 252\pi$ (см^3).

④ ***Ответ***: 252π см^3.

ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Найти площадь поверхности цилиндра, радиус основания которого равен 10 см, а высота — 9 см.
2. Радиус основания конуса — 12 дм, а высота конуса — 5 дм. Найти площадь поверхности и объем конуса.
3. Найти площадь поверхности и объем шара, радиус которого равен 6 см.

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ «ВЫПОЛНИ САМОСТОЯТЕЛЬНО»

АЛГОРИТМ 1

1. 11,1 дм.
2. 12,2 м.
3. 1,882 дм.
4. 820 м.

АЛГОРИТМ 2

1. 10,8 м.
2. 1,6 дм.
3. 0,4 см.
4. 11 дм.

АЛГОРИТМ 3

1. M лежит между точек K и L.
2. A лежит между точек E и B.
3. B лежит между точек A и C.

АЛГОРИТМ 4

1. 16 см и 9 см.
2. 4 м и 32 м.
3. 20 мм и 12 мм.

АЛГОРИТМ 5

1. 21 см и 33 см.
2. 56 дм и 32 дм.
3. 55 мм и 75 мм.

АЛГОРИТМ 6

1. $101°$.
2. $83°$.
3. $73°$.

АЛГОРИТМ 7

1. $47°$.
2. $23°$.
3. $36°$.

АЛГОРИТМ 8

1. $32°$ и $53°$.
2. $16°$ и $96°$.
3. $72°$ и $108°$.

АЛГОРИТМ 9

1. 33°.
2. 64°.
3. 45°.

АЛГОРИТМ 10

1. 164°.
2. 56°.
3. 90°.

АЛГОРИТМ 11

1. $MP = 12$ см, $\angle M = 83°$.
2. $KE = 54$ дм, $NG = 45$ дм, $AN = 24$ дм, $\angle G = 36°$, $\angle S = 126°$, $\angle A = 18°$.
3. 29°.

АЛГОРИТМ 12

1. 140°.
2. 64°.
3. 53°.

АЛГОРИТМ 13

1. 74°; 106°; 74°.
2. 148°; 32°; 148°.
3. 63°; 117°; 63°.

АЛГОРИТМ 14

1. 19°; 161°; 19°; 161°.
2. 80°; 100°; 80°; 100°.
3. 42°; 138°; 42°; 138°.

АЛГОРИТМ 15

1. 40 см.
2. 33 дм.
3. 51 м.

АЛГОРИТМ 16

1. 4 м; 12 м; 12 м.
2. 11 дм; 63 дм; 44 дм.
3. 14 см; 28 см; 28 см.

АЛГОРИТМ 17

1. 8 см.
2. 2,3 м.
3. 19 дм.

АЛГОРИТМ 18

1. $100°$.
2. $39°$.
3. $84°$.

АЛГОРИТМ 19

1. $79°$.
2. $126°$.
3. $162°$.

АЛГОРИТМ 20

1. $78°$.
2. $128°$.
3. $75°$.

АЛГОРИТМ 21

1. $130°$.
2. $60°$.
3. $156°$.

АЛГОРИТМ 22

1. $70°$.
2. $10°$.
3. $78°$.

АЛГОРИТМ 23

1. Три угла по $125°$ и четыре — по $55°$.
2. Три угла по $33°$ и четыре — по $147°$.
3. Три угла по $16°$ и четыре — по $164°$.

АЛГОРИТМ 24

1. 8 м.
2. 12 см.
3. $8\sqrt{2}$ см.

АЛГОРИТМ 25

1. 22 дм.
2. 8 мм.
3. 39 см.

АЛГОРИТМ 26

1. 11 см.
2. 50 см.
3. 21 дм.

АЛГОРИТМ 27

1. 68°; 112°; 68°.
2. 100°; 80°; 100°.
3. 145°; 35°; 145°.

АЛГОРИТМ 28

1. 25 см.
2. 18 см.
3. 12 дм.

АЛГОРИТМ 29

1. 10 см.
2. $\sqrt{53}$ дм.
3. 5 м.

АЛГОРИТМ 30

1. 30 м.
2. 0,8 дм.
3. $\sqrt{48}$ мм $= 4\sqrt{3}$ мм.

АЛГОРИТМ 31

1. 5.
2. 10.
3. $5\sqrt{2}$.

АЛГОРИТМ 32

1. $(-5; -3)$.
2. $(2{,}5; 4)$.
3. $(6{,}5; 3)$.

АЛГОРИТМ 33.

1. $y = -x - 1$.
2. $y = x$.
3. $y = -3\dfrac{6}{7}x - 3\dfrac{1}{7}$.

АЛГОРИТМ 34

1. $\dfrac{1}{2}$.
2. 1.
3. 0.

АЛГОРИТМ 35

1. $x^2 + y^2 = 64$.
2. $(x + 5)^2 + (y + 2)^2 = 0{,}01$.
3. $(x - 4)^2 + (y - 9)^2 = 36$.

АЛГОРИТМ 36

1. $\overline{(-2;\ -2)}$.
2. $\overline{(3;\ -9)}$.
3. $\overline{(-7;\ -14)}$.

АЛГОРИТМ 37

1. 7.
2. 12.
3. 15.

АЛГОРИТМ 38

1. 80 см.
2. 2,4 см.
3. 3,5 м.

АЛГОРИТМ 39

1. 120°.
2. 30°.
3. $2x^\circ$.

АЛГОРИТМ 40

1. 47°.
2. 80°.
3. $2a^\circ$.

АЛГОРИТМ 41

1. Прямоугольный.
2. Остроугольный.
3. Тупоугольный.

АЛГОРИТМ 42

1. 4 см.
2. 6 см.
3. $4\sqrt{2}$ см.

АЛГОРИТМ 43

1. 8 см.
2. 24 дм.
3. 10 см.

АЛГОРИТМ 44

1. $6\sqrt{3}$ дм^2.
2. 72 см^2.
3. $48\sqrt{3}$ см^2.

АЛГОРИТМ 45

1. 50 дм^2.
2. 180 см^2.
3. 260 см^2.

АЛГОРИТМ 46

1. 294 см^2; 343 см^3.
2. 420 см^3; 210 см^2.
3. 376 см^2; 480 м^3.

АЛГОРИТМ 47

1. 108 см^3.
2. 9 см^2.
3. 65 дм^2.

АЛГОРИТМ 48

1. 380π см^2.
2. 300π дм^2; 240π дм^3.
3. 144π см^2; 288π см^3.

СПИСОК АЛГОРИТМОВ

А 1. Нахождение длины отрезка, если известны длины его частей 6
А 2. Нахождение длины части отрезка, если известна длина всего отрезка и одной из его частей 7
А 3. Определение расположения точек на прямой 8
А 4. Нахождение длин частей отрезка с помощью уравнения, если в условии указано, что они сравниваются 9
А 5. Нахождение длин частей отрезка, если он делится своей точкой на части, пропорциональные данным числам 10
А 6. Нахождение величины угла, если известны его части 13
А 7. Нахождение части угла, если известна величина всего угла и другой его части . . . 14
А 8. Нахождение частей угла с помощью уравнения, если известна зависимость между ними 15
А 9. Нахождение частей угла, на которые его делит биссектриса 17
А 10. Нахождение угла, если известна его часть между стороной и биссектрисой 17
А 11. Нахождение неизвестных сторон и углов равных треугольников 19
А 12. Нахождение угла, смежного данному 21
А 13. Нахождение углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, если один из углов известен 22

А 14. Нахождение углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, если известна сумма двух из них 23
А 15. Вычисление периметра треугольника, если известны его стороны 26
А 16. Нахождение сторон треугольника, если известны зависимость между ними и периметр треугольника 27
А 17. Нахождение длины отрезка, используя признаки равенства треугольников. 28
А 18. Нахождение неизвестного угла треугольника, если два других его угла известны 30
А 19. Нахождение внешнего угла треугольника, если известен угол треугольника, смежный с ним 31
А 20. Нахождение внешнего угла треугольника, если известны два угла треугольника, не смежные с ним 32
А 21. Нахождение угла при вершине равнобедренного треугольника. 33
А 22. Нахождение угла при основании равнобедренного треугольника. 33
А 23. Нахождение углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, если известен один из них. 35
А 24. Нахождение радиуса окружности, описанной около треугольника, если известны его сторона и противолежащий ей угол 37
А 25. Нахождение углов параллелограмма, если известен один из них. 39
А 26. Вычисление средней линии трапеции 41

А 27. Нахождение средней линии
треугольника 42
А 28. Нахождение периметра треугольника,
стороны которого являются средними
линиями сторон данного треугольника 43
А 29. Нахождение гипотенузы c прямоугольного
треугольника по его катетам a и b 45
А 30. Нахождение неизвестного катета a
прямоугольного треугольника по его
гипотенузе c и другому катету b. 46
А 31. Нахождение расстояния между
точками. 48
А 32. Нахождение координат середины
отрезка 49
А 33. Составление уравнения прямой,
проходящей через две заданные точки 52
А 34. Нахождение углового коэффициента
прямой, проходящей через две точки 53
А 35. Составление уравнения окружности
по координатам ее центра и радиусу. 54
А 36. Нахождение суммы векторов,
если известны координаты их начал
и концов 56
А 37. Нахождение неизвестной координаты
вектора по второй его координате
и длине 56
А 38. Нахождение неизвестной стороны одного
из подобных треугольников 60
А 39. Нахождение центрального угла
по соответствующему ему вписанному
углу в окружность 63
А 40. Нахождение вписанного угла
по соответствующему центральному
углу 63

А 41. Определение вида треугольника, если известны его стороны 65
А 42. Нахождение неизвестной стороны треугольника с помощью теоремы синусов 66
А 43. Нахождение радиуса окружности, описанной около треугольника с помощью теоремы синусов. 68
А 44. Вычисление площади треугольника 70
А 45. Вычисление площади четырехугольника. . . 73
А 46. Вычисление площади поверхности и объема многогранника 76
А 47. Вычисление площади поверхности или объема призмы 78
А 48. Вычисление поверхностей и объемов цилиндра и конуса 83

ПРИЛОЖЕНИЯ

ТАБЛИЦА. СИНУСЫ

A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
											0,0000	90°			
0°	0,0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89°	3	6	9
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88°	3	6	9
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87°	3	6	9
3°	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86°	3	6	9
4°	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0,0872	85°	3	6	9
5°	0,0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84°	3	6	9
6°	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83°	3	6	9
7°	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82°	3	6	9
8°	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81°	3	6	9
9°	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	0,1736	80°	3	6	9
10°	0,1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79°	3	6	9
11°	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78°	3	6	9
12°	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77°	3	6	9
13°	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76°	3	6	8
14°	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	0,2588	75°	3	6	8
15°	0,2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74°	3	6	8
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	A	1′	2′	3′

КОСИНУСЫ

ТАБЛИЦА. СИНУСЫ

A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
16°	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73°	*3*	*6*	*8*
17°	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72°	*3*	*6*	*8*
18°	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71°	*3*	*6*	*8*
19°	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0,3420	70°	*3*	*5*	*8*
20°	0,3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69°	*3*	*5*	*8*
21°	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68°	*3*	*5*	*8*
22°	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67°	*3*	*5*	*8*
23°	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66°	*3*	*5*	*8*
24°	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	0,4226	65°	*3*	*5*	*8*
25°	0,4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64°	*3*	*5*	*8*
26°	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63°	*3*	*5*	*8*
27°	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62°	*3*	*5*	*8*
28°	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61°	*3*	*5*	*8*
29°	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0,5000	60°	*3*	*5*	*8*
30°	0,5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59°	*3*	*5*	*8*
	60′	**54′**	**48′**	**42′**	**36′**	**30′**	**24′**	**18′**	**12′**	**6′**	**0′**	**A**	**1′**	**2′**	**3′**

КОСИНУСЫ

ТАБЛИЦА. СИНУСЫ

A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
31°	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58°	*2*	*5*	*7*
32°	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57°	*2*	*5*	*7*
33°	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56°	*2*	*5*	*7*
34°	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	0,5736	55°	*2*	*5*	*7*
35°	0,5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	0,5878	54°	*2*	*5*	*7*
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53°	*2*	*5*	*7*
37°	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52°	*2*	*5*	*7*
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51°	*2*	*5*	*7*
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	0,6428	50°	*2*	*4*	*7*
40°	0,6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49°	*2*	*4*	*7*
41°	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48°	*2*	*4*	*7*
42°	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47°	*2*	*4*	*6*
43°	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	8909	6921	6934	6947	46°	*2*	*4*	*6*
44°	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0,7071	45°	*2*	*4*	*6*
45°	0,7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	44°	*2*	*4*	*6*
	60′	**54′**	**48′**	**42′**	**36′**	**30′**	**24′**	**18′**	**12′**	**6′**	**0′**	**A**	**1′**	**2′**	**3′**

КОСИНУСЫ

ТАБЛИЦА. СИНУСЫ

A	**0′**	**6′**	**12′**	**18′**	**24′**	**30′**	**36′**	**42′**	**48′**	**54′**	**60′**		**1′**	**2′**	**3′**
46°	7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	43°	*2*	*4*	*6*
47°	7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431	42°	*2*	*4*	*6*
48°	7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7547	41°	*2*	*4*	*6*
49°	7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	0,7660	40°	*2*	*4*	*6*
50°	0,7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	7771	39°	*2*	*4*	*6*
51°	7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880	38°	*2*	*4*	*5*
52°	7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986	37°	*2*	*4*	*5*
53°	7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090	36°	*2*	*3*	*5*
54°	8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	0,8192	35°	*2*	*3*	*5*
55°	0,8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290	34°	*2*	*3*	*5*
56°	8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387	33°	*2*	*3*	*5*
57°	8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480	32°	*2*	*3*	*5*
58°	8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572	31°	*2*	*3*	*5*
59°	8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	0,8660	30°	*1*	*3*	*4*
60°	0,8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29°	*1*	*3*	*4*
	60′	**54′**	**48′**	**42′**	**36′**	**30′**	**24′**	**18′**	**12′**	**6′**	**0′**	**A**	**1′**	**2′**	**3′**

КОСИНУСЫ

ТАБЛИЦА. СИНУСЫ

A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
61°	8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28°	*1*	*3*	*4*
62°	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27°	*1*	*3*	*4*
63°	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26°	*1*	*3*	*4*
64°	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	0,9063	25°	*1*	*3*	*4*
65°	0,9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135	24°	*1*	*2*	*4*
66°	9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	23°	*1*	*2*	*3*
67°	9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9256	9272	22°	*1*	*2*	*3*
68°	9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	9336	21°	*1*	*2*	*3*
69°	9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9383	9391	0,9397	20°	*1*	*2*	*3*
70°	9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	0,9455	19°	*1*	*2*	*3*
71°	9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18°	*1*	*2*	*3*
72°	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	17°	*1*	*2*	*3*
73°	9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	16°	*1*	*2*	*2*
74°	9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	0,9659	15°	*1*	*2*	*2*
75°	9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703	14°	*1*	*1*	*2*
	60′	**54′**	**48′**	**42′**	**36′**	**30′**	**24′**	**18′**	**12′**	**6′**	**0′**	**A**	**1′**	**2′**	**3′**

КОСИНУСЫ

ТАБЛИЦА. СИНУСЫ

A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
76°	9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	9744	13°	*1*	*1*	*2*
77°	9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	9781	12°	*1*	*1*	*2*
78°	9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	9816	11°	*1*	*1*	*2*
79°	9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	0,9848	10°	*1*	*1*	*2*
80°	0,9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	9877	9°	*0*	*1*	*1*
81°	9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	9903	8°	*0*	*1*	*1*
82°	9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925	7°	*0*	*1*	*1*
83°	9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945	6°	*0*	*1*	*1*
84°	9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	9962	5°	*0*	*1*	*1*
85°	9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976	4°	*0*	*0*	*1*
86°	9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986	3°	*0*	*0*	*0*
87°	9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	9994	2°	*0*	*0*	*0*
88°	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0,9998	1°	*0*	*0*	*0*
89°	9998	9999	9999	9999	9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0°	*0*	*0*	*0*
90°	1,0000														
	60′	**54′**	**48′**	**42′**	**36′**	**30′**	**24′**	**18′**	**12′**	**6′**	**0′**	**A**	**1′**	**2′**	**3′**

КОСИНУСЫ

ТАБЛИЦА. ТАНГЕНСЫ

A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
											0	**90°**			
0°	0,000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	**89°**	*3*	*6*	*9*
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	**88°**	*3*	*6*	*9*
2°	0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	**87°**	*3*	*6*	*9*
3°	0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	**86°**	*3*	*6*	*9*
4°	0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0,0875	**85°**	*3*	*6*	*9*
5°	0,0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	**84°**	*3*	*6*	*9*
6°	1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	**83°**	*3*	*6*	*9*
7°	1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	**82°**	*3*	*6*	*9*
8°	1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	**81°**	*3*	*6*	*9*
9°	1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	0,1763	**80°**	*3*	*6*	*9*
10°	0,1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	**79°**	*3*	*6*	*9*
11°	1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	**78°**	*3*	*6*	*9*
12°	2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	**77°**	*3*	*6*	*9*
13°	2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	**76°**	*3*	*6*	*9*
14°	2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	0,2679	**75°**	*3*	*6*	*9*
15°	0,2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	**74°**	*3*	*6*	*9*
	60′	**54′**	**48′**	**42′**	**36′**	**30′**	**24′**	**18′**	**12′**	**6′**	**0′**	**A**	**1′**	**2′**	**3′**

КОТАНГЕНСЫ

ТАБЛИЦА. ТАНГЕНСЫ

	60′	**54′**	**48′**	**42′**	**36′**	**30′**	**24′**	**18′**	**12′**	**6′**	**0′**	**A**	**1′**	**2′**	**3′**
16°	2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	**73°**	*3*	*6*	*9*
17°	3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	**72°**	*3*	*6*	*10*
18°	3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	**71°**	*3*	*6*	*10*
19°	3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	0,3640	**70°**	*3*	*7*	*10*
20°	0,3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	**69°**	*3*	*7*	*10*
21°	3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	**68°**	*3*	*7*	*10*
22°	4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	**67°**	*3*	*7*	*10*
23°	4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	**66°**	*3*	*7*	*10*
24°	4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	0,4663	**65°**	*4*	*7*	*11*
25°	0,4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	**64°**	*4*	*7*	*11*
26°	4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	**63°**	*4*	*7*	*11*
27°	5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	**62°**	*4*	*7*	*11*
28°	5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	**61°**	*4*	*8*	*11*
29°	5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	0,5774	**60°**	*4*	*8*	*12*
30°	0,5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	**59°**	*4*	*8*	*12*
	60′	**54′**	**48′**	**42′**	**36′**	**30′**	**24′**	**18′**	**12′**	**6′**	**0′**	**A**	**1′**	**2′**	**3′**

КОТАНГЕНСЫ

ТАБЛИЦА. ТАНГЕНСЫ

	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	A	1′	2′	3′
31°	6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	**58°**	*4*	*8*	*12*
32°	6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	**57°**	*4*	*8*	*12*
33°	6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	**56°**	*4*	*8*	*13*
34°	6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	0,7002	**55°**	*4*	*9*	*13*
35°	0,7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	**54°**	*4*	*8*	*13*
36°	7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	**53°**	*5*	*9*	*14*
37°	7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	**52°**	*5*	*9*	*14*
38°	7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	**51°**	*5*	*9*	*14*
39°	8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	0,8391	**50°**	*5*	*10*	*15*
40°	0,8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	0,8693	**49°**	*5*	*10*	*15*
41°	8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	**48°**	*5*	*10*	*16*
42°	9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	**47°**	*6*	*11*	*16*
43°	9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	0,9657	**46°**	*6*	*11*	*17*
44°	9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1,0000	**45°**	*6*	*11*	*17*
45°	1,0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	0355	**44°**	*6*	*12*	*18*
	60′	**54′**	**48′**	**42′**	**36′**	**30′**	**24′**	**18′**	**12′**	**6′**	**0′**	**A**	**1′**	**2′**	**3′**

КОТАНГЕНСЫ

ТАБЛИЦА. ТАНГЕНСЫ

	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	A	1′	2′	3′
46°	0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	0724	**43°**	*6*	*12*	*18*
47°	0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	1106	**42°**	*6*	*13*	*19*
48°	1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	1504	**41°**	*7*	*13*	*20*
49°	1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	1,1918	**40°**	*7*	*14*	*21*
50°	1,1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	2349	**39°**	*7*	*14*	*22*
51°	2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	2799	**38°**	*8*	*15*	*23*
52°	2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	3270	**37°**	*8*	*16*	*24*
53°	3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	3764	**36°**	*8*	*16*	*25*
54°	3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	1,4281	**35°**	*9*	*17*	*26*
55°	1,4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	4826	**34°**	*9*	*18*	*27*
56°	4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	5399	**33°**	*10*	*19*	*29*
57°	5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	6003	**32°**	*10*	*20*	*30*
58°	6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	6643	**31°**	*11*	*21*	*32*
59°	6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	1,7321	**30°**	*11*	*23*	*34*
60°	1,732	1,739	1,746	1,753	1,760	1,767	1,775	1,782	1,789	1,797	1,804	**29°**	*1*	*2*	*4*
	60′	**54′**	**48′**	**42′**	**36′**	**30′**	**24′**	**18′**	**12′**	**6′**	**0′**	**A**	**1′**	**2′**	**3′**

КОТАНГЕНСЫ

ТАБЛИЦА. ТАНГЕНСЫ

	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	A	1′	2′	3′
61°	1,804	1,811	1,819	1,827	1,834	1,842	1,849	1,857	1,865	1,873	1,881	**28°**	*1*	*3*	*4*
62°	1,881	1,889	1,897	1,905	1,913	1,921	1,929	1,937	1,946	1,954	1,963	**27°**	*1*	*3*	*4*
63°	1,963	1,971	1,980	1,988	1,997	2,006	2,014	2,023	2,032	2,041	2,05	**26°**	*1*	*3*	*4*
64°	2,050	2,059	2,069	2,078	2,087	2,097	2,106	2,116	2,125	2,135	2,145	**25°**	*2*	*3*	*5*
65°	2,145	2,154	2,164	2,174	2,184	2,194	2,204	2,215	2,225	2,236	2,246	**24°**	*2*	*3*	*5*
66°	2,246	2,257	2,267	2,278	2,289	2,3	2,311	2,322	2,333	2,344	2,356	**23°**	*2*	*4*	*5*
67°	2,356	2,367	2,379	2,391	2,402	2,414	2,426	2,438	2,450	2,463	2,475	**22°**	*2*	*4*	*6*
68°	2,475	2,488	2,5	2,513	2,526	2,539	2,552	2,565	2,578	2,592	2,605	**21°**	*2*	*4*	*6*
69°	2,605	2,619	2,633	2,646	2,66	2,675	2,689	2,703	2,718	2,733	2,747	**20°**	*2*	*5*	*7*
70°	2,747	2,762	2,778	2,793	2,808	2,824	2,840	2,856	2,872	2,888	2,904	**19°**	*3*	*5*	*8*
71°	2,904	2,921	2,937	2,954	2,971	2,989	3,006	3,024	3,042	3,06	3,078	**18°**	*3*	*6*	*9*
72°	3,078	3,096	3,115	3,133	3,152	3,172	3,191	3,211	3,230	3,251	3,271	**17°**	*3*	*6*	*10*
73°	3,271	3,291	3,312	3,333	3,354	3,376							*3*	*7*	*10*
							3,398	3,42	3,442	3,465	3,487	**16°**	*4*	*7*	*11*
74°	3,487	3,511	3,534	3,558	3,582	3,606							*4*	*8*	*12*
							3,630	3,655	3,681	3,706	3,732	**15°**	*4*	*8*	*13*
75°	3,732	3,758	3,785	3,812	3,839	3,867							*4*	*9*	*13*
							3,895	3,923	3,952	3,981	4,011	**14°**	*5*	*10*	*14*
	60′	**54′**	**48′**	**42′**	**36′**	**30′**	**24′**	**18′**	**12′**	**6′**	**0′**	**A**	**1′**	**2′**	**3′**

КОТАНГЕНСЫ

СВОЙСТВА СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
$\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$

ЗНАЧЕНИЯ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Справочное издание
анықтамалық баспа

Для старшего школьного возраста
мектеп жасындағы ересек балаларға арналған

В ПОМОЩЬ СТАРШЕКЛАССНИКУ. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Виноградова Татьяна Михайловна

ГЕОМЕТРИЯ

7—11 классы

(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *И. Успенский*

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел.: 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru
Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел.: 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.
Тауар белгісі: «Эксмо»
Интернет-магазин : www.book24.ru
Интернет-дүкен : www.book24.kz
Импортёр в Республику Казахстан ТОО «РДЦ-Алматы».
Қазақстан Республикасындағы импорттаушы «РДЦ-Алматы» ЖШС.
Дистрибьютор и представитель по приему претензий на продукцию,
в Республике Казахстан: ТОО «РДЦ-Алматы»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша арыз-талаптарды
қабылдаушының өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС,
Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.
Тел.: 8 (727) 251-59-90/91/92; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ
о техническом регулировании можно получить на сайте Издательства «Эксмо»
www.eksmo.ru/certification

Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

Продукция соответствует требованиям ТР ТС 007/2011

Дата изготовления / Подписано в печать 19.12.2018. Формат 70x100$^1/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,07.
Тираж экз. Заказ

ISBN 978-5-04-093534-5

9 785040 935345 >

Знак информационной продукции 6+ согласно Федеральному закону от 29.12.2010 г. N 436-ФЗ

EKSMO.RU
новинки издательства

BOOK24.RU
ИНТЕРНЕТ-МАГАЗИН

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Геометрия
7-11 классы

Решать задачи – это просто!

Изучите краткую теорию по теме

Внимательно прочитайте предложенный алгоритм

Проанализируйте решение задачи-примера

Решите задачу самостоятельно

Проверьте ответ

С помощью этой книги вы:

- научитесь решать задачи разных типов;
- разовьёте математическое мышление;
- подготовитесь к урокам, контрольным, экзаменам;
- поймёте, что решать задачи интересно и несложно.

#эксмодетство
ISBN 978-5-04-093534-5
www.vk.com/eksmo_kids