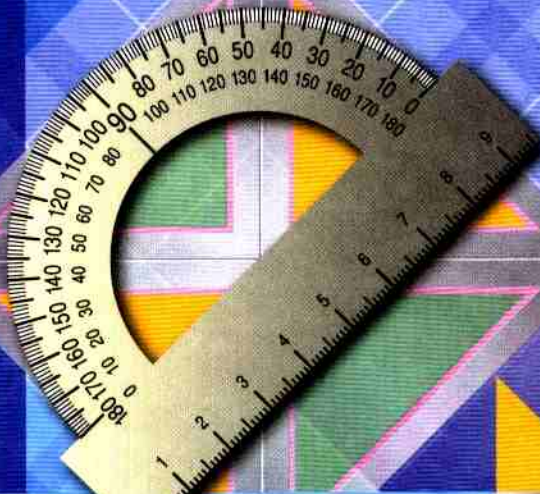
Геометрия

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ



8

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ПУНКТАМИ УЧЕБНИКА И ЗАДАЧАМИ ТЕТРАДИ

Номера пунктов учебника	Тема	Номера задач тетради
39, 40	Многоугольник. Выпуклый многоугольник	1—5
41	Четырехугольник	6, 7
42	Параллелограмм	8—14
43	Признаки параллелограмма	15
44	Трапеция	16—18
	Задачи на построение	19, 20
45	Прямоугольник	21—23
46	Ромб и квадрат	24
47	Осевая и центральная симметрии	25, 26
48	Понятие площади многоугольника	27
49, 50	Площадь квадрата. Площадь прямоугольника	28—32
51	Площадь параллелограмма	33—35
52	Площадь треугольника	36—41
53	Площадь трапеции	42—44
54	Теорема Пифагора	45—48
55	Теорема, обратная теореме Пифагора	49, 50
56, 57	Пропорциональные отрезки. Определение подобных треугольников	51—53
58	Отношение площадей подобных треугольников	54
59	Первый признак подобия треугольников	55—58
60	Второй признак подобия треугольников	59
61	Третий признак подобия треугольников	60
62	Средняя линия треугольника	61—65
63	Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике	66—68
64	Практические приложения подобия треугольников	69, 70
66	Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника	71—73
67	Значения синуса, косинуса и тангенса для углов $30°$, $45°$ и $60°$	74—77
68	Взаимное расположение прямой и окружности	78, 79
69	Касательная к окружности	80—84
70	Градусная мера дуги окружности	85, 86
71	Теорема о вписанном угле	87—94
72	Свойства биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку	95—102
73	Теорема о пересечении высот треугольника	103
74	Вписанная окружность	104—108
75	Описанная окружность	109—111
76, 77	Понятие вектора. Равенство векторов	112
78	Откладывание вектора от данной точки	113, 114
79	Сумма двух векторов	115, 116
80, 81	Законы сложения векторов. Правило параллелограмма.	
	Сумма нескольких векторов	117—121
82	Вычитание векторов	122—128
83	Произведение вектора на число	129—133
84	Применение векторов к решению задач	134
85	Средняя линия трапеции	135—137

ГЕОМЕТРИЯ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

8 КЛАСС

Пособие
для учащихся
общеобразовательных
организаций

16-е издание

Москва
«Просвещение»
2014

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Г36

6+

Авторы:
Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, И. И. Юдина

Рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Геометрия, 7—9» авторов Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова и др. и предназначена для организации решения задач учащимися на уроке после их ознакомления с новым учебным материалом. На этом этапе учащиеся делают первые шаги по осознанию нового материала, освоению основных действий с изучаемым материалом. Поэтому в тетрадь включены только базовые задачи, обеспечивающие необходимую репродуктивную деятельность в форме внешней речи. Наличие текстовых заготовок облегчает ученику выполнение действий в развернутой письменной форме, а учителю позволяет осуществлять во время урока оперативный контроль и коррекцию деятельности учащихся. Использование данной тетради для организации других видов деятельности (самостоятельных работ, повторения, контроля и т. д.) малоэффективно.

Учебное издание

Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Федорович
Глазков Юрий Александрович
Юдина Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая тетрадь
8 класс
Пособие для учащихся
общеобразовательных организаций

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редактор *Л. В. Кузнецова*. Младший редактор *Н. В. Ноговицина*. Художники *В. А. Андрианов, В. В. Костин, О. П. Богомолова*. Художественный редактор *О. П. Богомолова*. Компьютерная верстка *Е. А. Стрижевской, О. С. Ивановой*. Технический редактор *Е. Н. Зелянина*. Корректор *Н. Д. Цухай*.

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000.
Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 03.03.14. Формат $70\times100^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 3,27.
Доп. тираж 70 000 экз. Заказ № 7714.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Тверской полиграфический комбинат»
170024, г. Тверь, пр-т. Ленина, д. 5,
телефон: +7(4822)44-43-60, факс: +7(4822)44-98-42,
E-mail: tpk@tverpk.ru; sales@tverpk.ru

ISBN 978-5-09-031784-9

Глава V

Четырехугольники

§ 1 Многоугольники

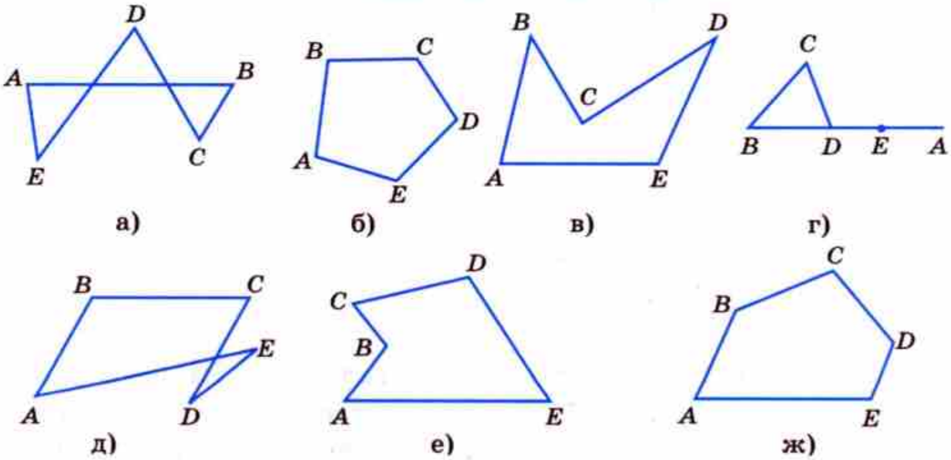
1

На рисунках *а — ж* изображены фигуры, составленные из отрезков *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*. Укажите, какие из них являются: а) многоугольниками; б) выпуклыми многоугольниками.

Ответ.

а) Фигуры, изображенные на рисунках ______________

б) Многоугольники, изображенные на рисунках _______

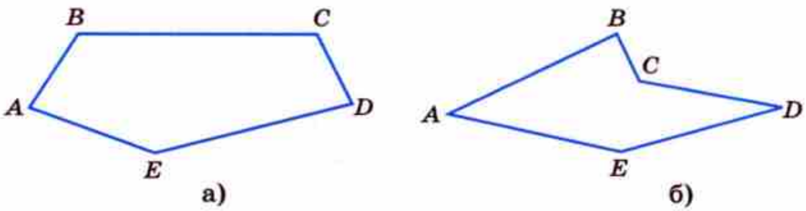


а) б) в) г) д) е) ж)

2

Проведите все диагонали в многоугольниках, изображенных на рисунках *а*, *б*, и выпишите их.

Ответ. а) ________________________ ; б) ________________________



а) б)

3

Начертите выпуклый семиугольник и из какой-нибудь его вершины проведите все возможные диагонали.

а) Сколько при этом образовалось треугольников?

б) Найдите сумму углов семиугольника.

Ответ.

а) ____

б) ______°.

4

Используя формулу для вычисления суммы углов выпуклого многоугольника $S_n = 180°(n - 2)$, найдите сумму углов выпуклого:

а) одиннадцатиугольника: $S_{11} = 180° \cdot$ _____ = _______

б) двадцатидвухугольника: $S_{22} = 180° \cdot$ _____ = _______

Ответ.

а) _______°;

б) _______°.

5

Найдите число сторон выпуклого многоугольника, каждый угол которого равен: а) 135°; б) 150°.

Решение.

а) Сумма всех углов выпуклого n-угольника, каждый угол которого равен 135°, равна $135° \cdot n$; с другой стороны, она равна $(n - 2) \cdot 180°$. Таким образом, $135° \cdot n = (n - 2) \cdot 180°$, или $135° \cdot n = 180° \cdot n - 360°$, откуда $45° \cdot n = 360°$, $n = 8$.

б) ____

____

____

____

Ответ.

а) $n = 8$;

б) $n =$ _____

6

Найдите сторону BC четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен 22 см, сторона AB на 2 см больше стороны BC и на 2 см меньше каждой из сторон DA и CD.

Решение.

По условию $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 22$ см, $BC = AB -$ $-$ ________, $CD = DA = AB +$ ________

Итак, 22 см = ______________________ = ________,
откуда AB = ________, а BC = ________

Ответ. BC = ________

7

Найдите углы B, C и D выпуклого четырехугольника $ABCD$, если $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$ и $\angle A = 35°$.

Решение.

Так как по условию $\angle A = \angle B$ и $\angle A = 35°$, то $\angle A + \angle B = 35° \times$ $\times\, 2 = 70°$. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна _____°, поэтому $\angle C + \angle D$ = _____ − _____ = _____

По условию $\angle C = \angle D$, значит, каждый из них равен _____

Ответ. $\angle B$ = _____, $\angle C$ = _____, $\angle D$ = _____

§ 2 Параллелограмм и трапеция

8

В параллелограмме $ABCD$ найдите: а) стороны, если BC на 8 см больше стороны AB, а периметр равен 64 см; б) углы, если $\angle A = 38°$.

Решение.

а) По свойству параллелограмма AB = _____, BC = _____ и $\angle A =$ $= \angle$ _____, $\angle B = \angle$ _____. По условию $P_{ABCD} = 64$ см, следовательно, $2(AB + BC)$ = ________, откуда $AB + BC$ = ________, но BC на ________ больше AB, поэтому AB + ____________ = 32 см, откуда AB = ________, BC = ________ + 8 см = ________

б) По условию $\angle A = 38°$, а так как $\angle A + \angle B$ = _____°, то $\angle B =$ = _____° − 38° = _____°.

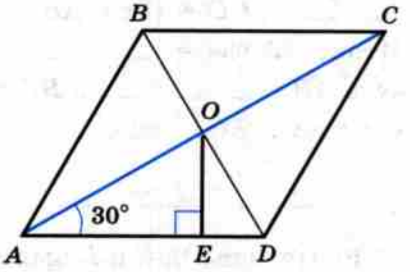
Ответ. а) AB = _____ = _____ см, BC = _____ = _____ см;
б) $\angle C$ = _____°, $\angle B = \angle$ _____ = _____°.

9

В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC, равная 24 см, образует со стороной AD угол в $30°$, O — точка пересечения диагоналей AC и BD, $OE \perp AD$. Найдите длину отрезка OE.

Решение.

Диагонали параллелограмма точкой пересечения ______________________, поэтому AO = ____ = ____ см. Треугольник AOE — прямоугольный с гипотенузой _____ и острым углом A, равным _____°. Поэтому катет OE, лежащий против угла в ____°, равен ______, т. е. OE = ____ см = ____ см.



Ответ. ____ см.

10

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке P, причем $BP = PC$. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 54 см.

Решение.

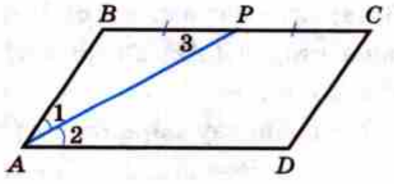
1) $\angle 1 = \angle 2$, так как луч AP — ______________________, $\angle 2 = \angle 3$, так как эти углы ________________ при пересечении параллельных прямых __________ секущей ____. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.

2) Треугольник ABP — __________________________, так как его углы 1 и 3 равны, поэтому AB = ____

3) По условию $BP = PC$, следовательно, BC = ____ BP = ____ AB.

Итак, $P_{ABCD} = 2(AB +$ ____$)$ = ____ AB.

Так как периметр параллелограмма равен 54 см, то ____ AB = 54 см, откуда AB = ____ см и BC = ____ см.

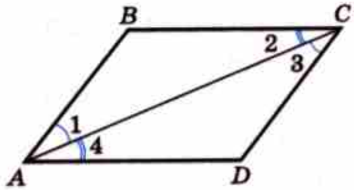


Ответ. $AB = DC$ = ____ см,
$BC = AD$ = ____ см.

11

На рисунке в четырехугольнике $ABCD$ $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.



Доказательство.

1) Так как $\angle 1 = \angle 3$, а эти углы — ____________________ при пересечении прямых ____ и ____ секущей _____ , то прямые ____ и ____ параллельны.

2) Так как $\angle 2 = \angle 4$, то прямые ___ и ___ также параллельны.

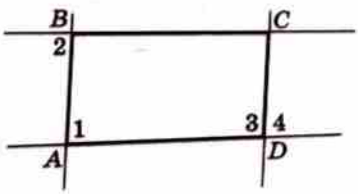
Итак, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, так как его стороны ______________________________

12

Является ли четырехугольник $ABCD$ на рисунке параллелограммом, если:

а) $\angle 1 = 75°$, $\angle 3 = 105°$, $\angle 2 \neq \angle 4$;

б) $\angle 1 = \angle 2 = 70°$, $\angle 3 = 105°$?



Решение.

а) В четырехугольнике $ABCD$ две стороны AB и CD параллельны, так как $\angle 1 + \angle 3 = 75° + 105° = 180°$, а эти углы — односторонние при пересечении прямых AB и DC секущей AD. Поскольку $AB \parallel DC$, то $\angle 1 = \angle 4$ (как соответственные углы). Две другие стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ не параллельны, так как накрест лежащие углы 1 и 2 не равны ($\angle 1 = \angle 4 \neq 2$). Следовательно, четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом.

б) ____

____

____

____

____

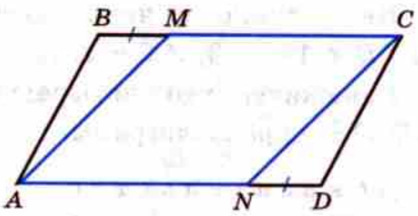
____

____

Ответ. а) Нет; б) _____

13

На рисунке в параллелограмме $ABCD$ на сторонах BC и AD отмечены точки M и N так, что $BM = DN$. Докажите, что четырехугольник $AMCN$ — параллелограмм.



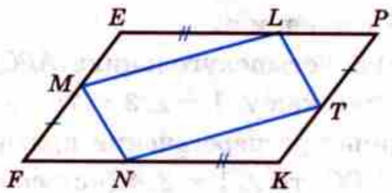
Доказательство.

Так как по условию $ABCD$ — параллелограмм, то его противоположные стороны BC и AD ______________________ и ______________, т. е. ____ ∥ ____ , ____ = ____ . Так как MC = = ____ – ____ , AN = ____ – ____ , и так как $BM = DN$, то MC = ____

Таким образом, в четырехугольнике $AMCN$ две противоположные стороны ______________________ и ______________ (____ ∥ ____ , ____ = ____), следовательно, $AMNC$ — ____________________________

14

На сторонах параллелограмма $EFKP$ отмечены точки M, N, T, L так, как показано на рисунке, причем $FM = PT$, $EL = KN$. Докажите, что четырехугольник $MLTN$ — параллелограмм.



Доказательство.

1) Так как $EFKP$ — параллелограмм, то по свойствам параллелограмма $\angle F = \angle$ ____ , $\angle E = \angle$ ____ и EF = ____ , EP = ____ . По условию $FM = PT$, $EL = KN$ и $EM = EF -$ ____ , $KT = PK -$ ____ , поэтому EM = ____ , PL = ____

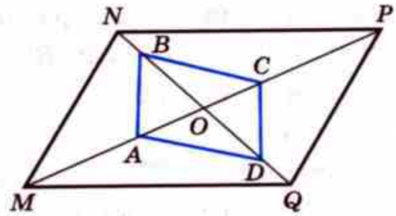
2) $\triangle MEL = \triangle$ ____ по ______________________ ______________________. Из равенства этих треугольников следует равенство сторон ML и ____

3) Аналогично $\triangle MFN = \triangle$ ____ , откуда MN = ____

Итак, в четырехугольнике $MLTN$ противоположные стороны ____ и ____ , ____ и ____ попарно ______________ , следовательно, $MLTN$ — параллелограмм.

15

На рисунке диагонали параллелограмма $MNPQ$ пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если $OA = \frac{1}{3} OM$, $OB = \frac{2}{3} ON$, $OC = \frac{1}{3} OP$, $OD = \frac{2}{3} OQ$.



Доказательство.

По свойству параллелограмма диагонали MP и NQ точкой пересечения O ____________________, т. е. ____ = ____ и ____ = ____, поэтому $OA =$ ____ $= \frac{1}{3}$ ____, аналогично $OB =$ ____ $= \frac{2}{3}$ ____

Итак, в четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD точкой пересечения O ____________________________, поэтому $ABCD$ —
____

16

Найдите углы M и P трапеции $MNPQ$ с основаниями MQ и NP, если $\angle N = 109°$, а $\angle Q = 37°$.

Решение.

Углы M и N, P и Q — ________________ при пересечении параллельных прямых MQ и NP секущими ____ и ____, поэтому $\angle M + \angle N =$ ____°, $\angle P + \angle Q =$ ____°. Так как по условию $\angle N = 109°$, $\angle Q = 37°$, то $\angle M =$ ____° $- \angle N =$ ____°, $\angle P =$ ____° $- \angle Q =$ ____°.

Ответ. $\angle M =$ ____°, $\angle P =$ ____°.

17

Один из углов равнобедренной трапеции равен 115°. Найдите остальные углы трапеции.

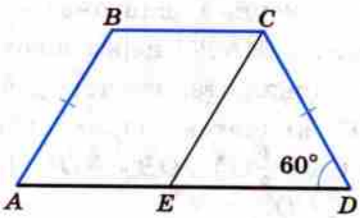
Решение.

Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$, где AD и BC — основания, $\angle B = 115°$. Так как углы при каждом основании равнобедренной трапеции __________, то $\angle C = \angle$ ____ $=$ ____°, а так как сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна ____°, то $\angle A = \angle D =$ ____° $- \angle B =$ ____° $- 115° =$ ____°.

Ответ. $\angle A = \angle D =$ ___°, $\angle C =$ ___°.

18

Найдите основание AD равнобедренной трапеции $ABCD$, если $BC = 10$ см, $AB = 12$ см, $\angle D = 60°$.



Р е ш е н и е.

В трапеции $ABCD$ основания AD и BC параллельны, а боковые стороны AB и CD равны.

Проведем прямую CE, параллельную стороне AB. Полученный четырехугольник $ABCE$ — ____________________, так как его стороны попарно ______________. Поэтому AE = ___ = ___ см, CE = ___ = ___ см, и так как $CD = AB$, то $CE = CD$ = ___ см.

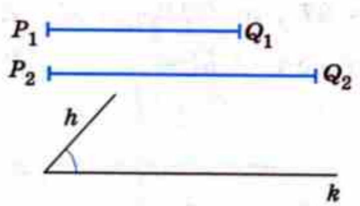
Треугольник CDE — ____________________ (___ = ___) с углом при основании в $60°$, следовательно, этот треугольник — ____________________ и ED = ___ = ___ см. Значит, AD = $= AE$ + ___ = 10 см + ___ см = ___ см.

О т в е т. AD = ___ см.

Задачи на построение

19

Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы его смежные стороны AB и AD были равны соответственно данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2, а угол A был равен данному углу hk (рисунок *а*).



а)

Р е ш е н и е.

1) На рисунке *б* построим треугольник ABD по ____________________ ____________________ так, что $AB = P_1Q_1$, $AD = P_2Q_2$ и $\angle A = \angle hk$.

2) Построим треугольник BCD по трем сторонам (сторона BD построена, $BC = AD = P_2Q_2$, $CD = AB = P_1Q_1$) так, чтобы точки A и C лежали по разные стороны от прямой BD.

б)

Четырехугольник $ABCD$ — искомый. Действительно, так как по построению AB = ____ и BC = ____ , то $ABCD$ — ________________________ ____________ . А так как $AB = P_1Q_1$, AD = ____ и $\angle A = \angle$ ____ по построению, то параллелограмм $ABCD$ отвечает всем условиям задачи.

20

Разделите данный на рисунке отрезок AB на 5 равных частей.

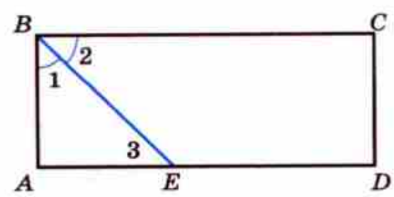
Решение.

На рисунке проведем луч AX, не лежащий на прямой AB, и на нем от точки A отложим пять ________________ друг другу отрезков AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5. Проведем прямую A_5B и построим прямые, проходящие через точки A_1, A_2, A_3, A_4 и параллельные прямой ____ . Эти прямые пересекают отрезок AB в точках B_1, B_2, B_3, B_4, которые по теореме Фалеса (задача 385) делят отрезок ____ на ________________

§ 3 Прямоугольник, ромб, квадрат

21

Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, изображенного на рисунке, если биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке E и делит ее на отрезки AE = 17 см и ED = 21 см.



Решение.

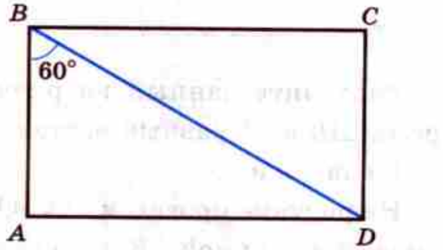
1) Так как $ABCD$ — прямоугольник, то $AD \parallel$ ____ и поэтому $\angle 2 =$ $= \angle$ ____ . Но $\angle 2 = \angle$ ____ по условию, следовательно, $\angle 1 = \angle$ ____ и $\triangle ABE$ — ____________________________ с основанием ____ . Значит, AB = ______ = ____ см.

2) $AD = AE + ED$ = ______ + ______ = ______ ; P_{ABCD} = 2(______ + + ______) = 2(____ см + ____ см) = 2 · ____ см = ____ см.

Ответ. P_{ABCD} = ____ см.

22

В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB равна 12 см, а диагональ BD образует со стороной AB угол в $60°$. Найдите диагональ AC.



Решение.

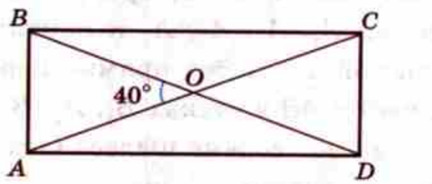
1) В прямоугольном треугольнике ABD $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, поэтому $\angle D$ = ____°, и по свойству катета, лежащего ______________________________ ,
имеем: $BD = 2 \cdot$ ____ = ____ см.

2) Так как в прямоугольнике диагонали __________ , то AC = ____ = ____ см.

Ответ. AC = ____ см.

23

На рисунке в прямоугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O, причем $\angle AOB = 40°$. Найдите $\angle DAO$.



Решение.

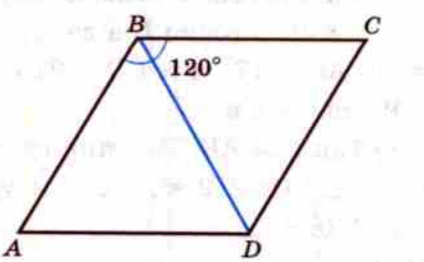
1) Так как $ABCD$ — прямоугольник, то его диагонали __________ и точкой пересечения ____________________ , откуда следует, что $\triangle AOB$ — ____________________ и $\angle BAO$ = ____ $\cdot$ (180° – ____°) = ____°.

2) $\angle DAO = \angle A - \angle$ ____ = 90° – ____° = ____°.

Ответ. $\angle DAO$ = ____°.

24

Найдите периметр ромба $ABCD$, изображенного на рисунке, если $\angle B = 120°$, а диагональ $BD = 15$ см.



Решение.

1) Так как диагонали ромба делят ______________________________ , то $\angle ABD$ = $\angle$ ____ = ____°.

2) В треугольнике ABD сторона AB = ____ (так как стороны ромба __________) и $\angle ABD$ = ____°, следовательно, этот треугольник ______________________________ и AB = ____ = ____ = ____ см.

3) $P_{ABCD} = 4 \cdot$ ____ см = ____ см.

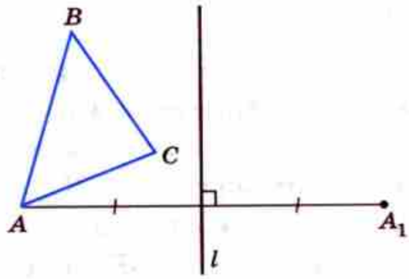
Ответ. $P_{ABCD} =$ ____ см.

25

На рисунке изображены треугольник ABC и прямая l. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, симметричный треугольнику ABC относительно прямой l.

Решение.

Точка A_1, изображенная на рисунке, симметрична точке A относительно прямой l, так как прямая l — серединный перпендикуляр к отрезку AA_1. Через точки B и C проведем прямые, ____________________ к прямой l, и отметим на них точки B_1 и C_1 так, чтобы прямая l была ____________ ____________ к отрезкам BB_1 и ____ . Проведем отрезки A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 и получим искомый треугольник $A_1B_1C_1$.



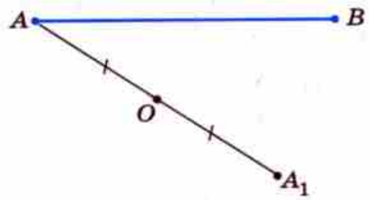
26

На рисунке изображены отрезок AB и точка O. Постройте отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно точки O.

Решение.

Проведем прямую AO и отметим на ней точку A_1 так, чтобы точка O была ____________ отрезка AA_1 (см. рисунок). Точка A_1 ____________________ точке A относительно точки O.

Аналогичным образом построим точку B_1, ____________________ точке B относительно ____________ . Отрезок A_1B_1 — искомый.



Глава VI

Площадь

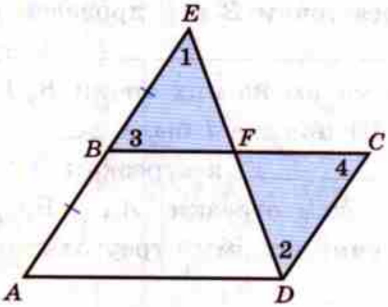
§ 1 Площадь многоугольника

27

На рисунке четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, точка E симметрична точке A относительно точки B. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{ADE}$.

Доказательство.

1) $\triangle BEF = \triangle CDF$ по стороне и двум прилежащим к ней углам ($AB =$ $=$ ____ $=$ ____ , $\angle 1 =$ ____ , $\angle 3 =$ ____ , так как эти углы ______________ ______________ при пересечении параллельных прямых ____ и ____ секущими ____ и ____), поэтому $S_{BEF} =$ ____



2) $S_{ABCD} = S_{ABFD} +$ ____ , $S_{ADE} = S_{ABFD} +$ $+$ ____ , поэтому $S_{ABCD} =$ ____

28

Найдите площадь квадрата, если его сторона равна:

а) 3,2 см;

б) $2\sqrt{3}$ дм.

Решение.

Так как площадь S квадрата со стороной a равна a^2, то:

а) $S = ($____ см$)^2 =$ __________ см^2;

б) $S = ($____ дм$)^2 =$ ____ дм^2.

Ответ.

а) __________ см^2;

б) ____ дм^2.

29

Найдите сторону a квадрата, если его площадь S равна: а) 64 см^2; б) 1,69 дм^2.

Решение.

Так как площадь S квадрата со стороной a равна a^2, то $a = \sqrt{\_\_\_\_}$

а) $a = \sqrt{\_\_\_\_ \text{ см}^2} = \_\_\_\_$ см; б) $a = \sqrt{\_\_\_\_ \text{ дм}^2} = \_\_\_\_$ дм.

Ответ. а) ____ см; б) ____ дм.

30

Смежные стороны прямоугольника равны 4,2 см и 3,5 см. Найдите площадь S этого прямоугольника.

Решение.

$S =$ ____ см · ____ см = ____ см^2.

Ответ. ____ см^2.

31

Пусть a и b — смежные стороны прямоугольника, а S — его площадь. Найдите сторону b, если $a = 12$ см, а $S = 192$ см^2.

Решение.

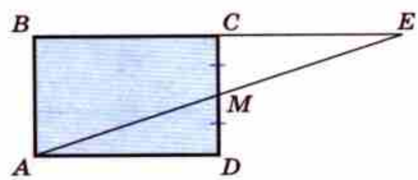
192 см^2 = ____ см · b, откуда b = ____ см^2 : ____ см = ____ см.

Ответ. b = ____ см.

32

Площадь прямоугольника $ABCD$, изображенного на рисунке, равна Q, точка M — середина стороны DC. Найдите площадь треугольника ABE.

Решение.



1) $\triangle ADM = \triangle ECM$ по ____________

____

____________ (DM = ____ по условию, $\angle D$ = ____ = ____°, $\angle AMD$ = ____, так как эти углы ____________

____________), поэтому S_{ADM} = ____

2) $S_{ABE} = S_{ABCM} +$ ______ $= S_{ABCM} +$
$+$ ______ = ______ = ____

Ответ. S_{ABE} = ____

§ 2 Площади параллелограмма, треугольника и трапеции

33

Пусть a — основание, h — высота, S — площадь параллелограмма. Найдите:

а) S, если $a = 16$ см, $h = 9$ см;

б) a, если $h = 4{,}8$ см, $S = 48$ см^2;

в) h, если $a = 3{,}5$ дм, $S = 14$ дм^2.

Решение.

а) S = ______ · ______ = ______ см^2;

б) 48 см^2 = a · _____ см, откуда a = _____ см^2 : _____ см = _____ см;

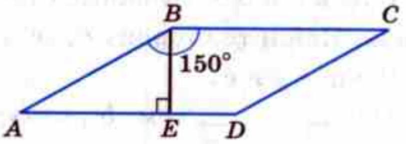
в) 14 дм^2 = 3,5 дм · h, откуда h = ______ : ______ = ______ дм.

Ответ. а) S = _____ см^2; б) a = _____ см; в) h = _____ дм.

34

На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$ с высотой BE.

Найдите S_{ABCD}, если $AB = 13$ см, $AD = 16$ см, $\angle B = 150°$.



Решение.

1) $\angle A$ = _____° − 150° = _____°, так как сумма углов, _______

____,

равна _____°.

2) $\triangle ABE$ — прямоугольный с острым углом A, равным _____, поэтому BE = _____ = _____ см.

3) S_{ABCD} = ______ · ______ = _____ см^2.

Ответ. S_{ABCD} = _____ см^2.

35

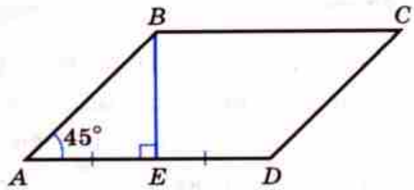
На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$ с высотой BE. Найдите S_{ABCD}, если $AE = ED$, $BE = 3{,}2$ см, $\angle A = 45°$.

Решение.

1) $\triangle ABE$ — прямоугольный и $\angle A = 45°$, следовательно, $\angle B$ = _____° и $\triangle ABE$ — ______________________________. Поэтому _____ = BE = 3,2 см.

2) Так как по условию $AE = ED$, то $AD = 2$ ______ = ________

3) S_{ABCD} = ________ · ________ = = ________



О т в е т. S_{ABCD} = ________

36

Пусть a — основание, h — высота, S — площадь треугольника. Найдите:

а) S, если $a = 5{,}4$ см, $h = 6$ см;

б) h, если $a = 12$ см, $S = 42$ см^2;

в) a, если $h = 2{,}4$ дм, $S = 4{,}32$ дм^2.

Р е ш е н и е.

а) $S = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}$ ________ · ________ = ______ см^2;

б) h = ______ : a = ________ : ________ = ______ см;

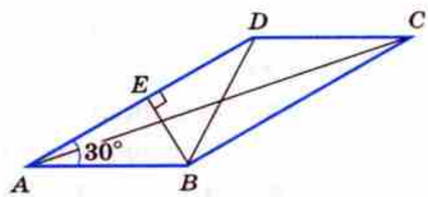
в) $a = 2S$: ______ = ________ : ________ = ______ дм.

О т в е т.

а) S = ______ см^2; б) h = ______ см; в) a = ______ дм.

37

На рисунке смежные стороны параллелограмма $ABCD$, равные 6 см и 10 см, образуют угол в 30°. Найдите площадь треугольника ABC.



Р е ш е н и е.

1) Пусть $AB = 6$ см, $AD = 10$ см, $\angle A = 30°$. Так как диагональ параллелограмма делит его на два ________________________, то $\triangle ABC = \triangle$ ______, и поэтому S_{ABC} = ______ = ______ S_{ABCD}.

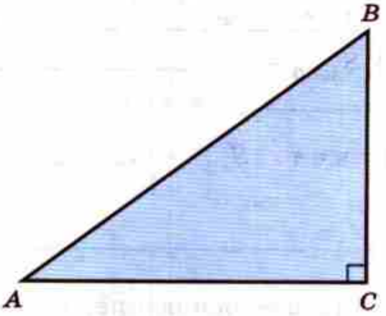
2) $S_{ABCD} = AD \cdot BE$, где BE — ____________ параллелограмма. Остается найти BE. $\triangle ABE$ — прямоугольный и $\angle A = 30°$, поэтому катет ______, лежащий ________________________, равен ________________________, т. е. $BE = \frac{1}{2}$ ______ = ______ см,

$S_{ABCD} = 10$ см · ____ см = ____ см^2, а $S_{ABC} = \frac{1}{2}$ · ________ = ______ см^2.

О т в е т. S_{ABC} = _____ см^2.

38

Площадь прямоугольного треугольника равна 96 см². Найдите катеты этого треугольника, если известно, что один из них составляет $\frac{3}{4}$ другого.



Решение.

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC, изображенном на рисунке, $BC = \frac{3}{4}\,AC$.

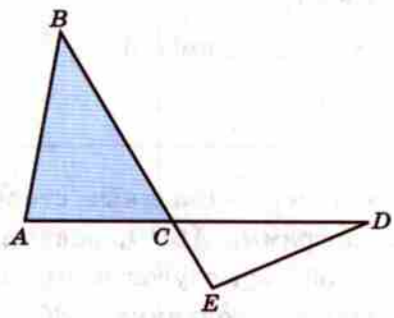
Так как площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, то $S_{ABC} = \frac{1}{2}$____ · ____ $= \frac{1}{2}$____ × × $\frac{3}{4}$____ = ______

По условию $S_{ABC} = 96$ см², поэтому 96 см² = ______, откуда $AC^2 =$ _____ см² и $AC =$ _____ см, а $BC =$ _____ см.

Ответ. _____ см и _____ см.

39

На рисунке $AC = 8$ см, $BC = 12$ см, $CD = 10$ см, $CE = 4$ см, $S_{ABC} = 48$ см². Найдите S_{CDE}.



Решение.

Треугольники ABC и CDE имеют по равному углу ($\angle ACB = \angle DCE$, так как эти углы вертикальные), поэтому по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, получаем $S_{CDE} : S_{ABC} =$ = _____ см · _____ см : _____ см · _____ см = _____, откуда $S_{CDE} =$ = _____ S_{ABC}. Так как по условию $S_{ABC} = 48$ см², то $S_{CDE} =$ _____ × × _____ см² = _____ см².

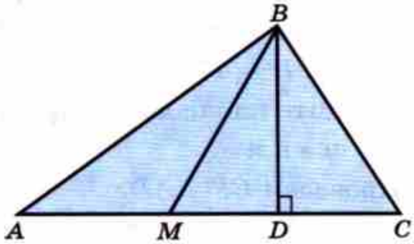
Ответ. $S_{CDE} =$ _____ см².

40

На рисунке точка M делит сторону AC треугольника ABC в отношении $AM : MC = 2 : 3$. Площадь треугольника ABC равна 180 см². Найдите площадь треугольника ABM.

Р е ш е н и е.

Треугольники ABM и ABC имеют общую высоту BD, поэтому их площади относятся как основания _____ и _____ . Так как по условию $AM : MC = 2 : 3$, то $AM : AC =$ _____ : _____ и $S_{ABM} : S_{ABC} =$ _____ : _____ , откуда $S_{ABM} =$ _____ $S_{ABC} =$ _____ $\cdot$ 180 см^2 = _____ см^2.

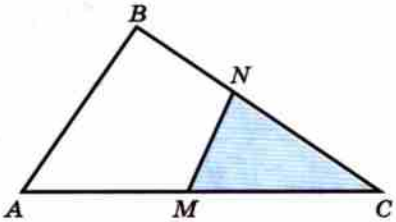


О т в е т. _____ см^2.

41

На рисунке $CN = \frac{1}{2}AC$, $CM = \frac{2}{3}BC$, $S_{MNC} = 18$ см^2.

Найдите S_{ABC}.



Р е ш е н и е.

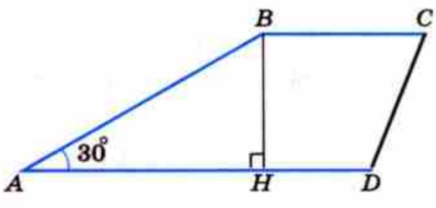
По теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, $S_{ABC} : S_{MNC} =$ _______ : _______

Так как по условию $CM = \frac{2}{3}BC$, $CN = \frac{1}{2}AC$ и $S_{MNC} = 18$ см^2, то $S_{ABC} = 18$ см^2. $\dfrac{AC \cdot BC}{\frac{2}{3}BC \cdot \frac{1}{2}AC} = 18$ см$^2 \cdot$ _____ = _____ см^2.

О т в е т. $S_{ABC} =$ _____ см^2.

42

В трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, $AB = 12$ см, $AD = 15$ см, $BC = 7$ см, $\angle A = 30°$. Найдите площадь S трапеции.



Р е ш е н и е.

Проведем высоту BH трапеции $ABCD$.

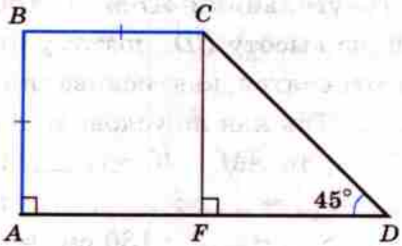
1) $\triangle ABH$ — прямоугольный, $\angle H = 90°$ по построению, $\angle A = 30°$ по условию, поэтому $BH = \frac{1}{2}$ _____ = _____ см.

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC +$ _____ $) \cdot$ _____ = ____________ см^2 = _____ см^2.

О т в е т. _____ см^2.

43

В прямоугольной трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, $AB = BC = 9$ см, $\angle D = 45°$.



Найдите площадь трапеции.

Решение.

Проведем $CF \perp AD$.

1) $ABCF$ — квадрат, так как у прямоугольника $ABCF$ смежные стороны AB и ________________, поэтому $AF = CF =$ _____ см.

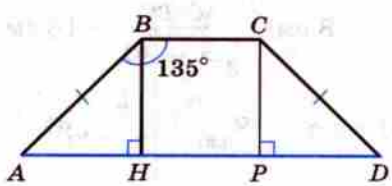
2) $\triangle CFD$ — прямоугольный, $\angle F = 90°$ по построению, $\angle D = 45°$ по условию, поэтому $\angle DCF =$ _____° и, следовательно, $\triangle CFD$ — ________________________ и $DF =$ _____ $=$ _____ см.

3) $AD = AF +$ _____ $=$ _____ см $+$ _____ см $=$ _____ см и $S_{ABCD} =$ ______________________ $=$ ______________________ $=$ _____ см².

Ответ. _____ см².

44

В равнобедренной трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, BH — высота, $\angle B = 135°$, $AH = 2{,}8$ см, $HD = 6{,}8$ см.



Найдите площадь трапеции.

Решение.

Проведем $CP \perp AD$.

1) Так как трапеция $ABCD$ — равнобедренная, то $DP =$ _____ $=$ _____ см, поэтому $HP = HD -$ _____ $= 6{,}8$ см $-$ _____ см $=$ _____ см; $AD = AH +$ _____ $=$ _____ см $+$ _____ см $=$ _____ см.

2) Четырехугольник $HBCP$ — прямоугольник, поэтому $BC =$ _____ $=$ _____ см.

3) $\angle HBC = 90°$, а так как $\angle ABC = 135°$, то $\angle ABH = \angle ABC -$ _____ $=$ _____. $\triangle ABH$ — прямоугольный ($\angle H = 90°$, $\angle B = 45°$) и ________________________________, поэтому $BH =$ _____ $=$ _____ см.

4) $S_{ABCD} =$ ______________ $=$ ______________ см $\cdot$ _____ см $=$ _____ см².

Ответ. _____ см².

§ 3 Теорема Пифагора

45

В прямоугольном треугольнике a и b — катеты.

Найдите: а) b, если $a = 8$, $c = 12$; б) c, если $a = 4\sqrt{2}$, $b = 7$;

в) a, если $b = 3\sqrt{3}$, $c = 5\sqrt{3}$.

Решение. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$.

а) $b^2 = c^2 - \_\_$, откуда $b = \sqrt{c^2 - \_\_} = \sqrt{144 - \_\_} = \sqrt{\_\_} = \_\_\_$

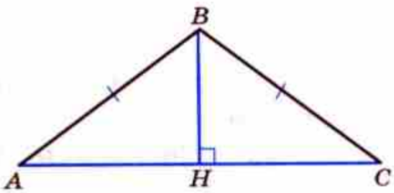
б) $c^2 = \_\_ + \_\_$, откуда $c = \sqrt{\_\_ + \_\_} = \sqrt{\_\_ + \_\_} = \sqrt{\_\_} = \_\_$

в) $a^2 = c^2 - \_\_$, откуда $a = \sqrt{\_\_ - \_\_} = \sqrt{\_\_ - \_\_} = \_\_\_$

Ответ. а) _____ ; б) _____ ; в) _____

46

На рисунке в равнобедренном треугольнике ABC основание $AC = 16$ см, высота $BH = 6$ см. Найдите боковую сторону.



Решение.

1) Так как $\triangle ABC$ — равнобедренный с основанием AC, то $AB = BC$ и высота BH является ______________, значит, $AH = \frac{1}{2}\_\_ = \_\_$ см.

2) Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора находим: $AB = \sqrt{\_\_\_ + \_\_\_} = \sqrt{\_\_\_ + \_\_\_}$ см $= \_\_\_$ см.

Ответ. ____ см.

47

По гипотенузе $c = 14$ и катету $b = 7$ прямоугольного треугольника найдите высоту h, проведенную к гипотенузе.

Решение.

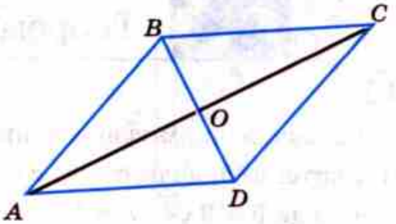
1) Пусть a — второй катет прямоугольного треугольника, тогда по теореме Пифагора $a = \sqrt{\_\_ - \_\_} = \sqrt{\_\_ - \_\_} = \sqrt{\_\_\_} = \_\_\_\_\_$

2) Площадь S прямоугольного треугольника равна $\frac{1}{2}a\ \_\_$, а с другой стороны, $S = \frac{1}{2}c\ \_\_$, поэтому $a\ \_\_ = c\ \_\_$, откуда $h = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Ответ. __________

48

На рисунке диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, $AB = 13$ см, $BD = 10$ см. Найдите AC и S_{ABCD}.



Решение.

1) Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то $BD \perp$ _____ и $\triangle ABO$ — ____________________, причем гипотенуза _____ $= 13$ см по условию, а катет $BO = \frac{1}{2}$ _____ $= \frac{1}{2} \cdot$ _____ см $=$ _____ см. По теореме Пифагора находим: $AO = \sqrt{\_\_\_ - \_\_\_} = \sqrt{\_\_\_ - \_\_\_}$ см $=$ _____ см, $AC = 2$ _____ $= 2 \cdot$ _____ см $=$ _____ см.

2) Площадь ромба можно вычислить по формуле $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ (задача 476 учебника), откуда $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot$ _____ см $\cdot$ _____ см $=$ _____ см^2.

Ответ. _____ см^2.

49

Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами 15, 20 и 25.

Решение.

Так как $25^2 = 20^2 + 15^2$ $(625 = 400 + 225)$, то по теореме, обратной ______________________________, данный треугольник — ______________________. Гипотенуза является наибольшей стороной этого треугольника, а высота h, проведенная к гипотенузе, ______________

Так как $h \cdot 25 = 15 \cdot 20$, то $h =$ ____________________ $=$ _____

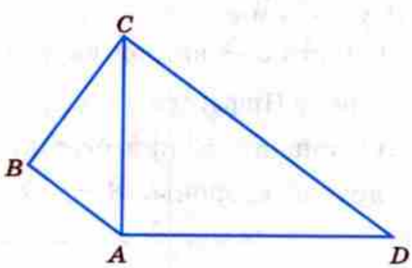
Ответ. _____

50

Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, $CD = 25$ см, $AD = 20$ см, $AC = 15$ см.

Решение.

1) Так как $15^2 = 12^2 + 9^2$ и $25^2 = 20^2 + 15^2$, то по теореме, обратной ______________________________, треугольники ABC и DAC — ______________________



2) $S_{ABCD} = S_{ABC} +$ _____ $= \frac{1}{2}$ _____ $\cdot$ _____ $+ \frac{1}{2}$ _____ $\cdot$ _____ $=$ _____ (см^2).

Ответ. _____ см^2.

Глава VII

Подобные треугольники

§ 1 Определение подобных треугольников

51

Даны отрезки: $AB = 12$ см, $CD = 8$ см, $EF = 15$ см, $KL = 30$ см, $MN = 16$ см, $PQ = 20$ см. Найдите среди них пары пропорциональных отрезков.

Решение.

1) Так как $\frac{AB}{EF} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, $\frac{MN}{PQ} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$, то $\frac{AB}{EF} = \frac{MN}{PQ}$, т. е. отрезки AB и MN пропорциональны отрезкам EF и PQ.

2) Так как $\frac{CD}{MN} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, $\frac{EF}{\_\_} = \frac{15}{\_\_} = \_\_\_\_$, то $\frac{CD}{MN} = \_\_\_\_$, т. е. отрезки CD и ____ пропорциональны отрезкам MN и ____

3) Так как $\frac{AB}{CD} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, $\frac{KL}{\_\_} = \frac{30}{\_\_} = \frac{3}{2}$, то $\frac{\_\_}{\_\_} = \frac{\_\_}{\_\_}$, т. е. отрезки ____ и ____ пропорциональны отрезкам ____ и ____

Ответ. ____

____

____

52

Подобны ли треугольники ABC и DEF, в которых $\angle A = 98°$, $\angle B = 44°$, $\angle F = 38°$, $\angle D = 98°$, $AB = 12$, $AC = 21$, $BC = 30$, $DF = 7$, $EF = 10$, $DE = 4$?

Решение.

1) $\angle A = \angle D = 98°$ по условию. В треугольнике ABC имеем: $\angle C = 180° - (\_\_\_\_° + \_\_\_\_°) = \_\_\_\_°$, поэтому $\angle C = \angle \_\_\_\_ = \_\_\_\_°$. В треугольнике DEF имеем: $\angle E = 180° - (\_\_\_\_° + \_\_\_\_°) = \_\_\_\_°$, поэтому $\angle B = \angle \_\_\_\_ = \_\_\_\_°$.

Итак, углы треугольников ABC и DEF соответственно равны.

2) Рассмотрим отношения сходственных сторон треугольников ABC и DEF: $\frac{AB}{DE} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1}$, $\frac{AC}{DF} = \frac{21}{7} = \frac{3}{1}$, $\frac{BC}{EF} = \frac{30}{10} = \frac{3}{1}$, поэтому $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, т. е. стороны треугольника ABC ______________

____

Итак, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ по ______________

Ответ.

Треугольники ABC и DEF ______________

53

В подобных треугольниках ABC и EDF стороны AB и ED, BC и DF являются сходственными. Найдите стороны AB и AC треугольника ABC, если $ED = 3$ см, $DF = 5$ см, $EF = 7$ см, $BC = 15$ см.

Решение.

В подобных треугольниках ABC и EDF стороны BC и DF являются сходственными по условию, поэтому коэффициент k подобия этих треугольников равен $\frac{BC}{DF}$, т. е. $k =$ _____ : _____ = _____

Следовательно, $AB = k \cdot$ _____ = _____ · _____ см = _____ см, $AC = k \cdot$ _____ = _____ · _____ см = _____ см.

Ответ.

$AB =$ _____ см, $AC =$ _____ см.

54

Площади двух подобных треугольников равны 35 дм^2 и 315 дм^2. Одна из сторон первого треугольника равна 14 дм. Найдите сходственную ей сторону второго треугольника.

Решение.

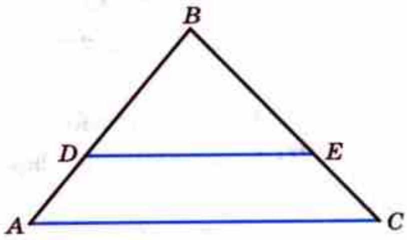
Пусть k — коэффициент подобия треугольников, тогда по теореме об отношении площадей подобных треугольников получим: $k^2 =$ _____ дм^2: _____ дм^2 = _____, откуда $k =$ _____. Искомая сторона a второго треугольника в ____ раза больше сходственной ей стороны первого треугольника, т. е. $a =$ _____ · 14 дм = _____ дм.

Ответ. _____ дм.

§ 2 Признаки подобия треугольников

55

На рисунке $DE \parallel AC$. Докажите, что треугольники ABC и DBE подобны, и найдите коэффициент подобия k, если $AB = 21$ см, $AD = 7$ см.



Решение.

1) $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ по двум углам ($\angle$ ___ — общий, $\angle A =$ ____, так как эти углы — ____________________ при пересечении параллельных прямых ____ и ____ секущей ____).

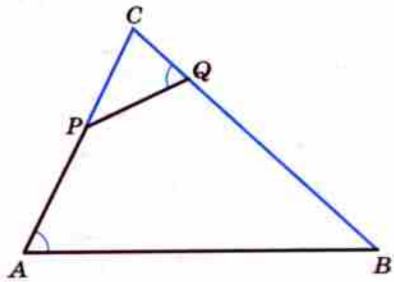
2) Так как коэффициент k подобия треугольников ABC и DBE равен отношению сходственных сторон, то $k = AB :$ ____

$DB = AB -$ ____ $=$ ____ см $-$ ____ см $=$ ____ см, и поэтому $k =$ ____ см : ____ см $=$ ____

Ответ. ____

56

На рисунке $\angle PQC = \angle A$, $BC = 18$ см, $CP = 6$ см, $CQ = 4$ см. Найдите сторону AC.



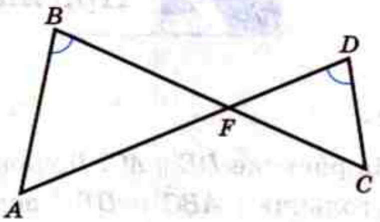
Решение.

$\triangle CPQ \sim \triangle CBA$ по ______________ ($\angle$ ____ — общий, $\angle PQC = \angle$ ____ по условию). Стороны CP и CB, CQ и ______ — сходственные стороны этих подобных треугольников, поэтому коэффициент k подобия равен $CP:$ ____ $=$ ____ см : ____ см $=$ ____ и $CQ : AC =$ ____, откуда $AC =$ ____ $CQ =$ $=$ ____ см.

Ответ. ____ см.

57

На рисунке $\angle B = \angle D$, $\frac{AF}{CF} = \frac{3}{2}$, $BF = 15$ см. Найдите DF.



Решение.

1) $\triangle ABF \sim \triangle CDF$ по ______________

($\angle$ ____ = $\angle$ ____ по условию, $\angle AFB$ = = $\angle$ _____, так как эти углы _________ ____________).

2) AF и FC — сходственные стороны подобных треугольников ABF и CDF, поэтому коэффициент k подобия равен ____ : ____ = = ____

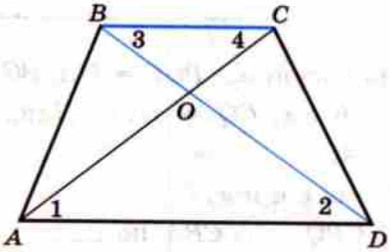
3) Так как BF и DF тоже являются сходственными сторонами, то $BF : DF$ = _____ , откуда DF = _____ BF = ________________ см = = _____ см.

Ответ.

_____ см.

58

Диагонали трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, пересекаются в точке O, $BO = 3{,}2$ см, $OD = 6{,}4$ см, $BC = 4{,}8$ см. Найдите AD.



Доказательство.

1) $\triangle AOD \sim \triangle COB$ по ____________ ____________________ ($\angle 1$ = $\angle$ _____ , $\angle 2$ = $\angle$ _____ , так как эти углы — ________________________________ при пересечении параллельных прямых _____ и _____ секущими _____ и _____).

2) OD и OB — сходственные стороны подобных треугольников AOD и COB, поэтому k = ___________ = _____ см : _____ см = _____

3) AD и BC также сходственные стороны этих треугольников, поэтому $AD : BC = k$, откуда AD = _____ · _____ = _____ · _____ см = = _____ см.

Ответ.

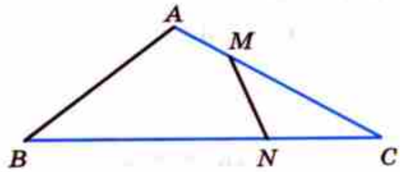
_____ см.

59

На рисунке $BC = 18$ см, $CM = 9$ см, $CN = 6$ см, $AC = 12$ см. Докажите, что треугольники ABC и MNC подобны.

Доказательство.

$\angle C$ — ____________ угол треугольников ________ и ________ . Рассмотрим отношения сторон, заключающих этот угол: $AC : CN =$ = _____ см : _____ см = _____ , $BC : CM$ = _____ см : _____ см = _____ . Эти отношения ____________________ , поэтому стороны _____ и _____ треугольника ABC пропорциональны сторонам _____ и _____ треугольника MNC. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle$ ________ по ____________ признаку подобия треугольников.



60

Докажите, что треугольники MNP и CDE подобны, если стороны $MN = 7{,}5$ см, $MP = 4{,}5$ см, $PN = 6$ см, $DE = 24$ см, $EC = 18$ см, $CD = 30$ см.

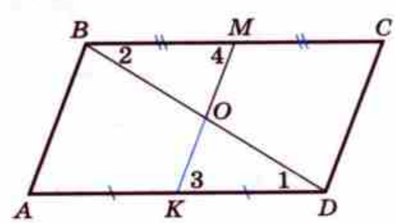
Доказательство.

Так как $MN : CD$ = _____ см : _____ см = _____ , $MP : CE$ = = _____ см : _____ см = _____ и $NP : DE$ = _____ см : _____ см = = _____ , то стороны MN, _____ и _____ треугольника MNP ______________________________ сторонам _____ , _____ и _____ треугольника ________ . Следовательно, по ______________________ ____ $\triangle MNP \sim \triangle CDE$.

§ 3 Применение подобия к решению задач и доказательству теорем

61

Точки K и M — середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$, изображенного на рисунке. Отрезки KM и BD пересекаются в точке O. Докажите, что KO — средняя линия треугольника ABD.



Доказательство.

Докажем, что точка O — середина стороны ______ треугольника ABD. По условию задачи $DK = \frac{1}{2}$______ и BM = ________ . Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, следовательно, AD = = ______ , поэтому и KD ______ BM.

Так как $AD \parallel$ _____ , то $\angle 1 = \angle$ ___ и $\angle 3 = \angle$ ___ . Следовательно, $\triangle OKD = \triangle$ _____ . Отсюда получаем: OD = _____

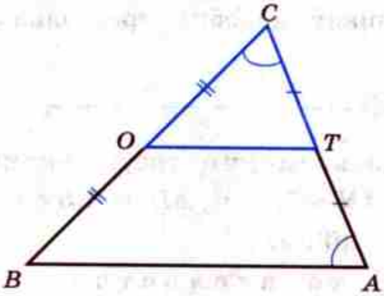
Итак, точки K и O — ________________ сторон AD и _____ треугольника ABD, поэтому KO — его ________________ линия, что и требовалось доказать.

62

В треугольнике ABC отрезок OT — средняя линия, $\angle A = \angle C$.

а) Докажите, что треугольник COT равнобедренный.

б) Найдите периметр треугольника COT, если периметр треугольника ABC равен 18 см.



Решение.

а) Так как OT — ________________ линия треугольника ABC, то $OT \parallel$ _____ , поэтому $\angle CTO = \angle$ _____ $= \angle C$. Следовательно, треугольник COT — ____________________________

б) Так как OT — средняя ________________ треугольника ABC, то $OT = \frac{1}{2}$_____ , CO = ____ BC и CT = _______ . Следовательно,

$P_{COT} = OT + CO +$ _____ $= \frac{1}{2} AB +$ _______ + _______ =

= ____ (AB + _____ + _____) = ____ P_{ABC} = _____ см.

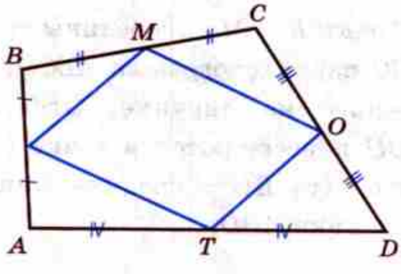
Ответ. ____

63

Точки K, M, O, T — середины сторон четырехугольника $ABCD$.

а) Докажите, что четырехугольник $KMOT$ — параллелограмм.

б) Найдите периметр четырехугольника $KMOT$, если AC = 12 см, BD = = 16 см.



Р е ш е н и е.

а) Проведем диагональ AC четырехугольника $ABCD$. В треугольнике ABC точки K и M — ______________________ сторон AB и _____ , поэтому отрезок KM — его средняя ______________________ , и следовательно, $KM \parallel$ _____ и $KM =$ _____ AC.

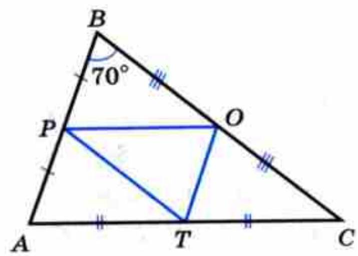
Аналогично отрезок OT — ______________________ линия треугольника ADC, поэтому OT ____ AC и $OT =$ ____ AC. Отсюда следует, что $KM \parallel OT$ и KM ____ OT, а значит, четырехугольник $KMOT$ является ______________________

б) По доказанному $KM =$ ____ $AC =$ ____ $\cdot\, 12 =$ ____ (см) и OT ____ $KM =$ ____ см. Проведем диагональ BD. В треугольниках ABD и BCD отрезки KT и MO — средние ______________________ , следовательно, $KT =$ ____ $BD =$ ____ см и $MO =$ ____ $BD =$ ____ см. Итак, $KT = MO =$ ____ см и $KM = OT =$ ____ см, следовательно, $P_{KMOT} = 2 \cdot$ ____ $+ 2 \cdot$ ____ $=$ ____ см.

О т в е т . ______________________

64

Площадь треугольника ABC равна 20 см^2, $\angle B = 70°$, точки P, T и O — середины сторон. Найдите: а) $\angle PTO$; б) площадь треугольника OTP.



Р е ш е н и е.

а) Так как точки P, T, O — ______________________ сторон, то отрезки PT, TO и PO — средние ______________________ треугольника ABC, следовательно, $PT \parallel$ _____ и $TO \parallel$ _____ . Так как противоположные стороны четырехугольника $BPTO$ попарно ______________________ , то этот четырехугольник является ______________________ , поэтому $\angle PTO = \angle$ _____ $=$ _____

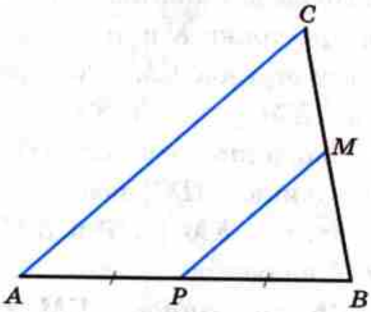
б) Так как отрезки PT, TO и PO — средние ______________________ треугольника ABC, то $PT =$ ____ BC, $TO =$ ____ AB и $PO =$ ____ AC,

т. е. $\dfrac{PT}{BC} = \dfrac{TO}{\_\_\_} = \dfrac{\_\_\_}{AC} = \dfrac{1}{2}$, поэтому $\triangle OTP$ ____ $\triangle ABC$ с коэффициентом подобия $k =$ ____ . Следовательно, $S_{OTP} : S_{ABC} = 1 :$ ____ , откуда получаем: $S_{OTP} =$ ____ $S_{ABC} =$ ____ $\cdot\, 20 =$ ____ (см^2).

О т в е т . а) $\angle PTO =$ ________ ; б) $S_{OTP} =$ ____ см^2.

65

Точка P — середина стороны AB треугольника ABC, $PM \parallel AC$. Докажите, что отрезок PM — средняя линия треугольника ABC.



Доказательство.

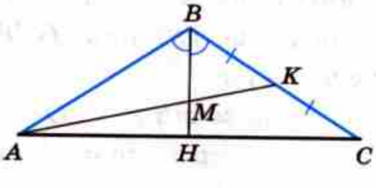
Предположим, что отрезок PM не является средней ________________ треугольника ABC, тогда точка M не будет серединой стороны ________.
Пусть точка O — середина ______________ BC, тогда отрезок PO есть ______________ линия треугольника ABC, и поэтому PO ___ AC.

Итак, через точку P проходят ___ прямые (_____ и _____), параллельные прямой ______, что противоречит аксиоме ________________________________ прямых.

Следовательно, исходное предположение неверно, т. е. отрезок PM является ________________ линией треугольника ABC, что и требовалось ______________________.

66

В треугольнике ABC стороны $AB = BC = 5$ м, $AC = 8$ м, медиана AK и биссектриса BH пересекаются в точке M. Найдите BM и AK.



Решение.

Так как $AB = BC$, то треугольник ABC — ____________________,
а потому биссектриса BH является также его высотой и ________________, следовательно, BH ___ AC и AH ___ HC = ____ м.

Медианы треугольника пересекаются в ______________ точке и делятся ею в отношении ____ : ____, считая от вершины, т. е. BM = ____ MH и AM = ____ MK. В прямоугольном треугольнике ABH имеем: $BH^2 = AB^2 -$ ____ = ____ − ____ = ____ (м²), откуда BH = ____ м. Поэтому MH = ____ BH = ____ м, BM = ____ м.

В треугольнике AMH имеем: AM^2 = ____ + ____ = ____ + ____ = = ____ (м²), откуда AM = ____ м. Следовательно, $AK = \frac{3}{2}$ ____ м.

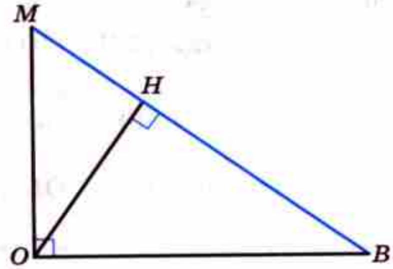
Ответ. BM = ____ м, AK = ______ м.

67

В треугольнике OBM, изображенном на рисунке, $\angle BOM = 90°$, $OH \perp BM$, $BM = 26$ дм, $BH = 18$ дм. Найдите OH и OB.

Р е ш е н и е.

Так как OH — ______________ прямоугольного треугольника OBM, проведенная из вершины ________ угла, то $OB = \sqrt{BM \cdot \_\_\_} = \sqrt{\_\_\_ \cdot \_\_\_} =$ $=$ ________ (дм). Далее, $MH = BM -$ $-$ _____ $=$ _____ дм, поэтому $OH =$ $= \sqrt{\_\_\_ \cdot \_\_\_} = \sqrt{\_\_\_ \cdot \_\_\_} =$ ____ (дм).



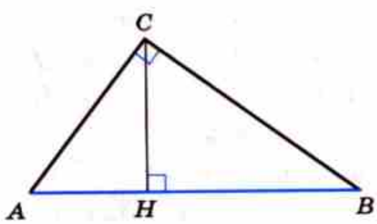
О т в е т. $OB =$ ________ дм,
$OH =$ _____ дм.

68

Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 30 м, а отношение катетов равно 3 : 4. Найдите отрезки, на которые гипотенуза делится высотой треугольника.

Р е ш е н и е.

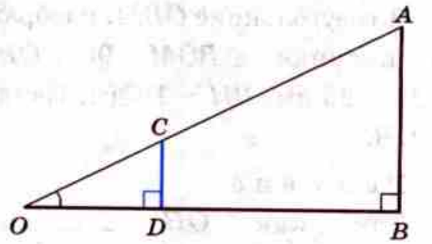
Пусть $AC = 3x$, тогда $BC = 4x$ и $(3x)^2 + (\_\_\_\_\_)^2 = 30^2$. Отсюда ___ $x^2 =$ $=$ _____, $x^2 =$ _____ и $x =$ _____. Следовательно, $AC =$ _____ м и $BC =$ $=$ _____ м. Но $AC = \sqrt{AB \cdot \_\_\_}$, поэтому $AC^2 =$ _____ $\cdot$ _____, или $18^2 =$ $= 30 \cdot$ _____, откуда $AH =$ _____ м, а $BH = 30 -$ _____ $=$ _____ (м).



О т в е т. $AH =$ ____ м,
$BH =$ ____ м.

69

Длина тени столба равна 10 м, а длина тени человека, рост которого равен 1,8 м, равна 3,6 м. Найдите высоту столба.



Р е ш е н и е.

Изобразим отрезками AB и OB столб и его тень, отрезками CD и OD покажем человека и его тень. В треугольниках OCD и OAB угол O — общий, $\angle ODC = \angle$ ______ $= 90°$, следовательно, $\triangle OCD$ ___ $\triangle OAB$. Отсюда получаем, что $OD : CD = OB :$ ______ , а значит, $AB = \dfrac{OB \cdot \_\_\_\_}{OD} =$

$=$ ________________ $=$ ______ (м).

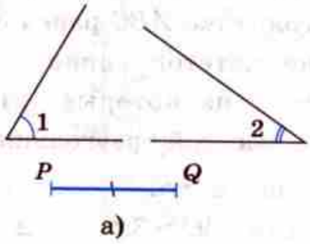
О т в е т. Высота ____________ равна ______ м.

70

Постройте треугольник по двум углам и медиане, проведенной из вершины третьего угла.

Р е ш е н и е.

Пусть даны углы 1 и 2 и отрезок PQ. Требуется построить треугольник ABC, у которого $\angle A = \angle 1$, $\angle B$ ___ $\angle 2$, а медиана CM равна ______________ PQ.

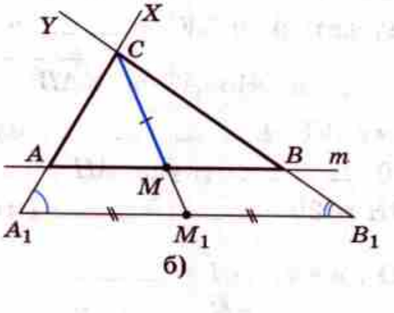


а)

Построим сначала треугольник, подобный искомому. Для этого:

1) Проведем отрезок A_1B_1.

2) От луча A_1B_1 отложим угол B_1A_1X, равный углу 1, и от луча B_1A_1 — угол A_1B_1Y, равный углу ______ , как показано на рисунке. Точку пересечения лучей A_1X и B_1Y обозначим буквой C.



б)

3) Проведем медиану CM_1 полученного треугольника ____________

4) На луче CM_1 от точки ______ отложим отрезок CM, равный данному отрезку ________

5) Через точку M проведем прямую m, параллельную прямой A_1B_1. Точки пересечения прямой m и лучей CA_1 и _____ обозначим буквами A и B.

Треугольник ABC — искомый. Действительно, так как AB ___ A_1B_1, то $\angle BAC = \angle$ _______, $\angle AMC = \angle$ _______, следовательно, $\triangle AMC \sim \triangle A_1M_1C$, а потому $AM : A_1M_1 = CM :$ _____. Аналогично $\triangle BMC$ ___ $\triangle B_1M_1C$, а потому $BM :$ _____ $= CM : CM_1$. Следовательно, $AM : A_1M_1 = BM :$ _____, но $A_1M_1 =$ _____, поэтому AM ___ BM, т. е. отрезок CM — медиана треугольника _____ и она равна данному отрезку _____. Как было доказано, $\angle BAC =$ $= \angle$ _______, но $\angle$ _______ $= \angle 1$, следовательно, $\angle BAC$ ___ $\angle 1$. Аналогично $\angle ABC$ ___ $\angle 2$. Поэтому треугольник ABC удовлетворяет всем требованиям задачи.

§ 4 Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

71

Найдите синус, косинус и тангенс угла M треугольника MPT, если $\angle P = 90°$, $MP = 8$, $PT = 15$.

Решение.

Синусом острого ____________ прямоугольного треугольника называется отношение __________________________ катета к _________________________. Против угла M лежит катет _____.

По теореме ______________________ найдем гипотенузу: $MT^2 =$ $= 8^2 +$ _____ = _____, откуда $MT =$ _____. Следовательно,

$\sin M = \frac{PT}{\_\_} = \frac{15}{\_\_}$.

Косинусом острого угла ________________________ треугольника называется отношение _______________________________ ____________ к ______________________. К углу M прилежит катет _____, следовательно, $\cos M = \frac{MP}{\_\_} = \frac{\_\_}{17}$.

Тангенсом _____________ угла прямоугольного треугольника называется ______________________ противолежащего катета к ___________________________, т. е. $\operatorname{tg} M =$ _____ = _____

Ответ. ____

72

Докажите, что в треугольнике BCH с прямым углом H выполняются следующие равенства:

а) $\sin B = \cos C$;

б) $\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B}$;

в) $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$.

Доказательство.

а) $\sin B = \frac{CH}{\_\_\_}$, $\cos C = \frac{\_\_\_}{BC}$, следовательно, $\sin B$ ____ $\cos C$.

б) $\sin B = \frac{CH}{\_\_\_}$, $\cos B = \frac{\_\_\_}{BC}$, $\operatorname{tg} B = \frac{CH}{\_\_\_}$, поэтому $\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{CH \cdot \_\_\_}{\_\_\_} = \operatorname{tg} B$.

в) $\sin C = \frac{\_\_\_}{BC}$, $\cos C = \frac{\_\_\_}{BC}$, $\sin^2 C + \cos^2 C = (\_\_\_\_\_)^2 + (\_\_\_\_\_)^2 =$

$= \frac{BH^2 + \_\_\_}{BC^2} = \frac{\_\_\_}{BC^2} = 1.$

73

Гипотенуза AC прямоугольного треугольника ACE равна 50, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите площадь треугольника.

Решение.

Синусом острого ____________ прямоугольного треугольника называется отношение ________________________________ ____________________ к ____________________. Против угла A лежит катет ______, следовательно, $\sin A = \frac{\_\_\_}{AC}$, откуда $CE = AC \cdot$ ______ $=$ $= 50 \cdot$ ______ $=$ ______

Второй катет ______ найдем, используя теорему ____________:

$AE = \sqrt{AC^2 - \_\_\_\_} = \sqrt{50^2 - \_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_$

Площадь прямоугольного треугольника равна ________________ произведения катетов, поэтому $S_{ACE} =$ ________ $AE \cdot$ ________ $=$ $=$ ________________ $=$ ________

Ответ.

____

74

В треугольнике ABC даны $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, $AC = 9$. Найдите сторону AB.

Решение.

По условию задачи $\angle A =$ ______, следовательно, отрезок AC — катет, противолежащий углу ____, и требуется найти катет, прилежащий к углу ____

Отношение катета, противолежащего углу B, и катета, прилежащего к этому углу, есть ____________________ угла B, следовательно, $\dfrac{AC}{AB} =$ ______. Отсюда $AB = AC :$ ________ $=$ ______ $: \operatorname{tg} 60° =$ $=$ ______

Ответ.

____

75

В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а один из острых углов равен α. Выразите катеты через c и α и найдите их длины, если:

а) $c = 12$ дм, $\alpha = 30°$;

б) $c = 16$ дм, $\alpha = 45°$.

Решение.

Обозначим длину катета, противолежащего углу α, буквой a и длину __________________, прилежащего к углу α, буквой b. Тогда $\sin\alpha = \dfrac{\_\_}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{\_\_}{\_\_}$. Отсюда получаем: $a = c \cdot$ ________, $b =$ ________. Подставляя числовые данные, получим:

а) $a =$ _____ $\cdot \sin 30° =$ _____ $\cdot$ _____ $=$ _____ (дм);

$b =$ ____ (дм).

б) $a =$ ____ (дм);

$b =$ ____ (дм).

Ответ.

а) ______________

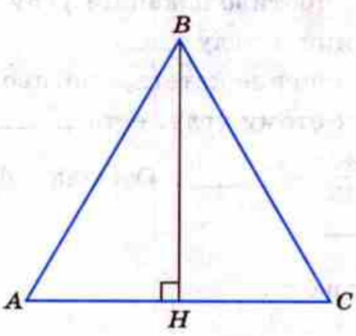
б) ______________

76

Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной a.

Решение.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot$ _____, где отрезок BH — ____________________ треугольника. В прямоугольном треугольнике ABH гипотенуза AB равна ______, $\angle A =$ = ______, BH — ______________________, противолежащий углу A. Следовательно, $\sin A = \frac{BH}{\_\_\_}$, откуда $BH =$ ______ × $\times \sin A =$ ______ $\cdot \sin 60° =$ ______ $\cdot$ ______ = = ______



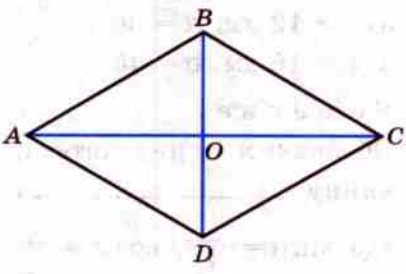
Итак, $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot$ ______ = ______ a^2.

Ответ.

____

77

Найдите углы ромба $ABCD$, если его диагонали AC и BD равны $4\sqrt{3}$ м и 4 м.



Решение.

Пусть $\angle BAO = \alpha$. Диагонали ромба делят его углы _______________________, значит, $\angle DAO = \angle$ ________ $= \alpha$.

Диагонали ромба взаимно __________________________________ и точкой пересечения делятся __________________, следовательно, в прямоугольном треугольнике ABO катет AO равен _______ м, а катет _______ равен ______ м. Поэтому $\operatorname{tg} \alpha =$ _______ = _______, откуда $\alpha =$ ______, а $\angle BAD = 2 \cdot$ ______ = ______, $\angle ADC = \angle$ ______ = ______

Ответ.

____

Глава VIII

Окружность

§ 1 Касательная к окружности

78

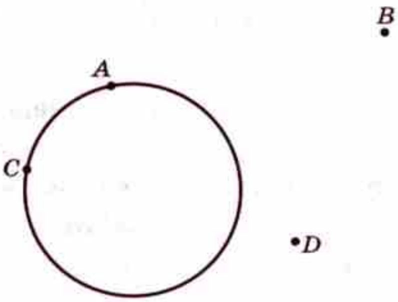
Проведите прямые через каждые две точки. Сколько общих точек имеет каждая из прямых с окружностью?

Ответ.

Прямая ______ и окружность не имеют общих точек.

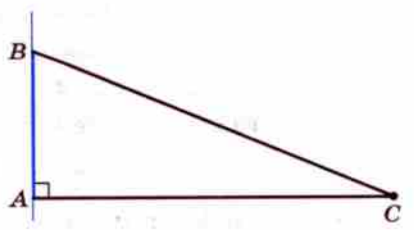
Прямая ______ и окружность имеют только одну ______________ точку.

Прямые ______, ______, ______, ______ и окружность имеют две общие точки.



79

В треугольнике ABC, изображенном на рисунке, $\angle A = 90°$, $AB = 5$ см, $BC = 13$ см. Найдите радиус окружности с центром C, если она имеет с прямой AB только одну общую точку.



Решение.

По условию задачи окружность и прямая _____ имеют только _________ общую точку.

Если бы радиус окружности был меньше расстояния от _________________ окружности — точки ____ — до прямой AB, то окружность и прямая имели бы _________ общие точки.

Если бы радиус ___________________ был больше расстояния от точки ___ до _____________ AB, то окружность и прямая ___________________ общих точек.

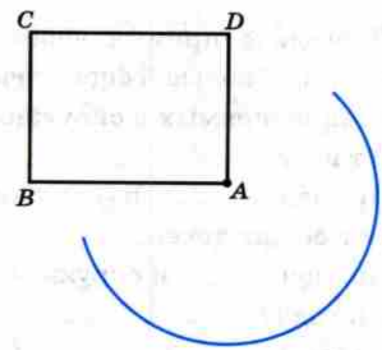
Следовательно, радиус R окружности ______________ расстоянию от точки C до ________________ AB, т. е. равен катету ______

Итак, $R = AC = \sqrt{\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_$ (см).

Ответ. Радиус окружности равен _____ см.

80

Дан прямоугольник $ABCD$, где $AB = 8$ см, $AD = 6$ см. Какие из прямых AC, BC, CD и BD являются секущими по отношению к окружности с центром A радиуса 6 см?



Решение.

Прямая AC проходит через центр ________________________ — точку A, следовательно, прямая AC является ________________ по отношению к окружности с ____________ A.

Так как $\angle B = 90°$, то AB ___ BC, поэтому расстояние от точки A до _____________ BC равно _____ см, т. е. больше _______________ окружности. Следовательно, прямая BC ______________________ секущей по отношению к данной окружности.

Так как $\angle D = 90°$, то AD ___ CD, поэтому расстояние от _____ A до ________________ CD равно _____ см, т. е. ________________ радиусу окружности. Следовательно, прямая CD ____________ ________________________ по отношению к данной окружности.

Чтобы найти расстояние от точки A до _______________ BD, проведем из точки ___ перпендикуляр AH к прямой BD и вычислим его _________________. Находя двумя способами площадь треугольника ABD, получим: $\frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} BD \cdot \_\_\_\_\_$. По теореме Пифагора $BD = \sqrt{\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_$ см. Поэтому $AH = \_\_\_\_\_$ см.

Итак, расстояние от точки A до прямой BD _______________ радиуса окружности, следовательно, прямая BD _____________ секущей по отношению к данной __________________

Ответ. Секущими являются прямые _____ и _____

81

Какая из прямых AC, BC, CD и BD из предыдущей задачи является касательной к окружности с центром A радиуса 6 см?

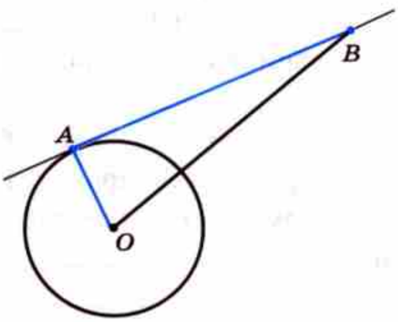
Решение.

Касательной к ________________ называется ______________ , имеющая с окружностью только ________________ точку. Прямая и окружность имеют только одну __________ точку, если расстояние от центра ________________ до прямой равно ______________ окружности. Это условие выполняется для прямой _____ , значит, касательной к данной ________________ является прямая _____

Ответ. Касательной является прямая _____

82

Прямая AB — касательная в точке A к окружности с центром O. Найдите длину отрезка OB, если $AB = 24$ дм, а радиус окружности равен 7 дм.



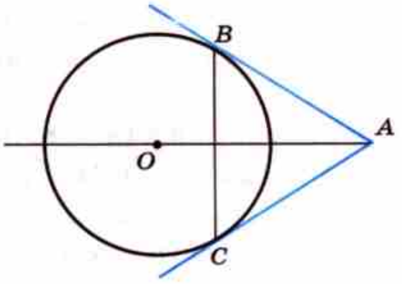
Решение.

По условию задачи прямая AB является ________________ к данной окружности, следовательно, прямая AB ____________________ к радиусу OA, проведенному в __________ касания. Поэтому треугольник AOB — ______________________ . По теореме Пифагора $OB^2 = OA^2 +$ _____ , отсюда $OB =$ _____ дм.

Ответ. $OB =$ _____ дм.

83

Прямые AB и AC касаются окружности с центром O в точках B и C. Найдите угол BAO, если $AB = BC$.



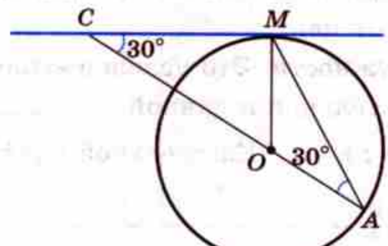
Решение.

Так как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, ____________ , то $AB =$ _____ , следовательно, треугольник ABC — ___________________________ , поэтому $\angle BAC =$ _____

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной ____________, составляют ____________________ углы с прямой, проходящей через эту точку и ____________________ окружности, следовательно, $\angle BAO = \angle$ _____ $= \frac{1}{2} \angle$ _____ $=$ _____

Ответ. $\angle BAO =$ _____

84



Прямая AC проходит через центр O окружности, $\angle MAO = \angle OCM = 30°$. Докажите, что прямая CM является касательной к данной окружности.

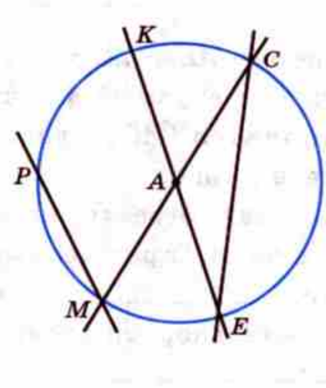
Доказательство.

Так как в треугольнике AOM $AO =$ $=$ _____, то $\angle AMO = \angle$ _____ $=$ _____.
В треугольнике AMC $\angle AMC = 180° - (\angle MAC + \angle$ _____ $) = 180° -$ $-$ (_____ + _____) = _____. Поэтому $\angle OMC = \angle AMC - \angle$ _____ $=$ $= 120° -$ _____ $=$ _____, т. е. CM ___ OM.

Итак, прямая CM проходит через конец радиуса _______, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу. Поэтому она является ____________________ к данной окружности, что и требовалось ____________________

§ 2 Центральные и вписанные углы

85



Какие углы являются центральными углами окружности с центром A?

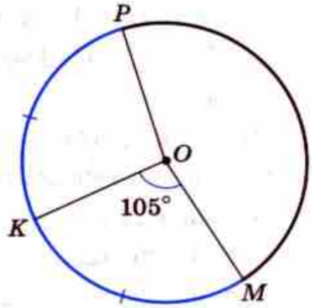
Решение.

Центральным __________ окружности называется угол с вершиной в ____________________. На рисунке центр окружности — точка ____ служит вершиной углов MAE, _____, _____, _____, _____, _____. Эти углы являются центральными углами данной ______________

Ответ. ____________________

86

Точка O — центр окружности, $\angle MOK = 105^\circ$, $\smile PK = \smile MK$. Найдите градусную меру угла MOP.



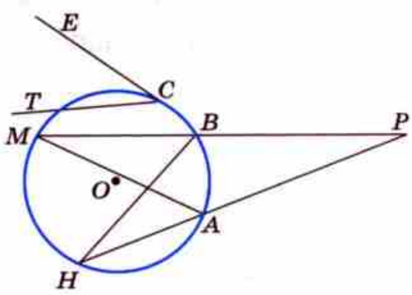
Решение.

Угол MOK является ______ ______ углом окружности, а дуга MK меньше полуокружности, поэтому $\smile MK = \angle$ ______ $=$ ______. По условию задачи $\smile PK = \smile$ ______, и, значит, градусная мера дуги PK равна ______. $\smile MKP = \smile MK +$ ______ $=$ $=$ ______ $> 180^\circ$, т. е. дуга MKP больше полуокружности, поэтому $\smile MKP =$ ______ $- \angle MOP$, поэтому $\angle MOP =$ ______ $- \smile MKP =$ $=$ ______ $-$ ______ $=$ ______

Ответ. $\angle MOP =$ ______

87

Какие из углов HAM, HBM, TCE и HPM являются вписанными?



Решение.

Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на ______ ______, а стороны ______ окружность.

Точка A лежит на окружности, а стороны угла HAM ______ окружность. Следовательно, угол ______ ______ вписанным.

Точка B лежит на ______, а стороны угла HBM пересекают ______, следовательно, угол HBM ______

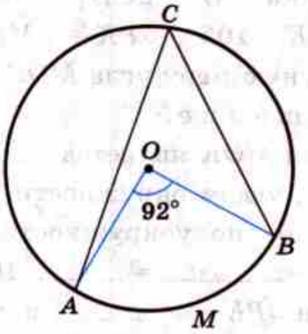
Точка C ______, а сторона CE угла TCE не пересекает ______, следовательно, угол TCE ______ вписанным.

Точка P ______ на окружности, следовательно, угол HPM ______ вписанным.

Ответ. Вписанными являются углы ______ и ______

88

На рисунке точка O — центр окружности, $\angle AOB = 92°$. Найдите $\angle ACB$.



Решение.

Угол AOB является ______________ углом данной окружности и равен ______, следовательно, $\smile AMB =$ ______

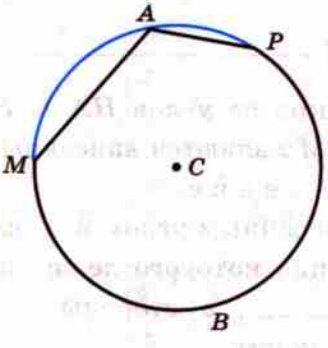
Угол ACB является ________________ и опирается на дугу _______, поэтому

$\angle ACB = \frac{1}{2}$ _______ = _______

Ответ. $\angle ACB =$ _______

89

На рисунке $\smile MAP = 120°$. Найдите $\angle MAP$.



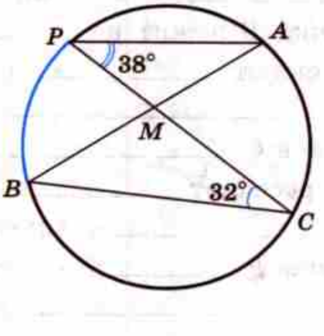
Решение.

Угол MAP является _____________ углом окружности и опирается на дугу _______ . $\smile MBP = 360° - \smile$_______ = $= 360° -$ _______ = _______ , $\angle MAP$ = $= \frac{1}{2}$ _______ = _______

Ответ. $\angle MAP =$ _______

90

На рисунке $\angle APM = 38°$, $\angle BCM = 32°$. Найдите $\angle AMP$.



Решение.

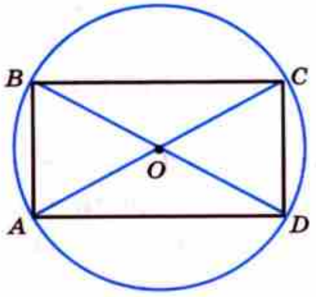
Вписанные углы PAB и BCP _______ ____________________ на одну и ту же __________________ BP, следовательно, $\angle PAB = \angle$ _______ = _______

Из треугольника AMP получим: $\angle AMP = 180° - (\angle$_______ $+ \angle$ _______$) =$ $= 180° - ($_______ + _______$) =$ _______

Ответ. $\angle AMP =$ _______

91

Дана окружность с диаметрами AC и BD. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.



Доказательство.

Отрезок AC — ________________ окружности, следовательно, дуга ADC — полуокружность. Вписанный угол ABC опирается на ____________ ________, поэтому он ______________

Аналогично углы ADC, ________ и ________ прямые. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ является ______________________

92

Точки A, B, C лежат на одной окружности, $\angle ABC = 80°$. Лежит ли центр окружности на отрезке AC?

Решение.

Если центр окружности лежит на отрезке AC, то отрезок AC является ______________ этой окружности, а дуга AC является ______________________. Тогда вписанный угол ABC опирается на полуокружность, а потому он равен ________, но по условию задачи $\angle ABC =$ ________. Следовательно, центр окружности ______________ на отрезке AC.

Ответ. ______________________

93

Хорды KM и PT пересекаются в точке C, $KC = 7$ см, $CM = 4$ см, $PT = 16$ см. Найдите отрезки PC и CT.

Решение.

Хорды KM и PT пересекаются, следовательно, произведение ______________ хорды KM равно ______________ отрезков хорды _____, т. е. $PC \cdot$ _____ $= KC \cdot$ _____. Обозначим длину отрезка PC буквой x, тогда $CT =$ _______, следовательно, $x \cdot ($_______$) = 7 \cdot$ _____. Корни полученного квадратного уравнения $x^2 -$ ____ $x +$ ____ $= 0$ равны ____ и ____. Итак, либо $PC =$ $=$ ____, и тогда $CT =$ ____, либо $PC =$ ____, и тогда $CT =$ ____

Ответ. $PC =$ ___ см, $CT =$ ___ см или $PC =$ ___ см, $CT =$ ___ см.

94

Точки A, B и C лежат на одной окружности. Отрезки AB и CH пересекаются в точке M. Лежит ли точка H на данной окружности, если $AM = 5$ м, $MB = 6$ м, $CM = 8$ м, $MH = 4$ м?

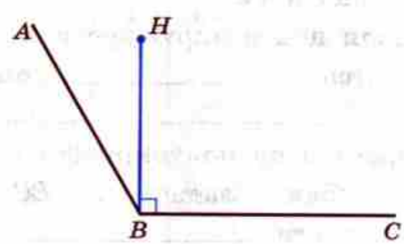
Решение.

Если точка H лежит на данной окружности, то отрезки AB и CH являются хордами этой ________________, пересекающимися в точке ____ . Поэтому должно быть верным равенство $AM \cdot$ ____ $=$ $= MH \cdot$ ______ . Но так как $5 \cdot 6$ ____ $8 \cdot 4$, то точка H ________ ________________ на данной окружности.

Ответ. ________________________

§ 3 Четыре замечательные точки треугольника

95



На рисунке $\angle ABC = 120°$, $HB \perp BC$, $BH = 4$ см. Вычислите расстояние от точки H до стороны BA угла ABC.

Решение.

Проведем из точки ____ перпендикуляр HM к прямой BA, тогда расстояние от точки H до прямой _____ равно длине отрезка _____ . По условию задачи $\angle ABC =$ _____ , HB ___ BC, т. е. $\angle$ _____ $= 90°$. Значит, $\angle ABH = 120° -$ _____ $=$ _____

В треугольнике HBM $\angle MBH =$ _____ , $\angle HMB =$ _____ , следовательно, $HM = \frac{1}{2}$ _____ $=$ _____ $\cdot 4 =$ _____ (см), т. е. расстояние от точки ____ до прямой _____ равно ____ см.

Ответ. _____

96

Луч ME является биссектрисой угла TMP. Верно ли, что:

а) точка A равноудалена от сторон угла TMP;

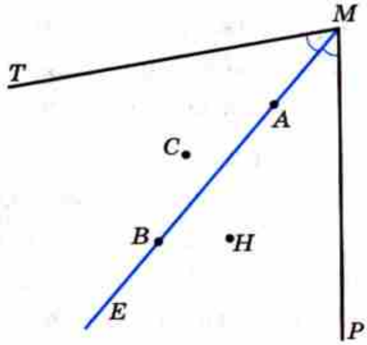
б) точка B не равноудалена от сторон угла TMP;

в) точка H равноудалена от сторон угла TMP;

г) точка C не равноудалена от сторон угла TMP?

Р е ш е н и е.

а) Точка A лежит на биссектрисе ME угла ______, поэтому она ________________________ от сторон этого угла. Следовательно, данное утверждение о точке A ________________



б) Точка B лежит на ____________ ________ ME угла TMP, поэтому она ______________________ от ____________ этого угла. Следовательно, данное утверждение о точке B ______________

в) Если бы точка H была равноудалена от ____________ угла TMP, то она лежала бы на ______________________ этого угла. Но точка H ________________________ на биссектрисе угла ______ . Следовательно, данное утверждение о точке H ____________________

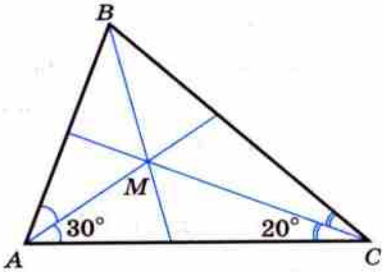
г) Если бы точка C была равноудалена от ________________ ______, то она __________________ на биссектрисе этого ______ . Следовательно, данное утверждение о точке C ____________________

97

Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle ABM$, если $\angle MAC = 30°$, $\angle MCA = 20°$.

Р е ш е н и е.

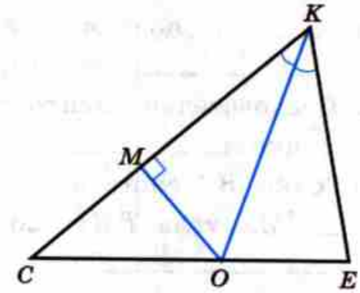
Биссектрисы треугольника пересекаются в __________________ точке, следовательно, луч BM — ____________ ______________________ угла ABC, т. е. $\angle ABM = \frac{1}{2}\angle$ ________ . По условию задачи лучи AM и CM ____________ ______________ углов A и ____ , поэтому $\angle A = 2 \cdot$ _____ = _____ , $\angle C = 2 \cdot$ _____ = = _____ . Следовательно, $\angle B = 180° -$ $- (\angle$ _____ $+ \angle$ _____ $) = 180° - ($_____ + + _____$) =$ ______ , значит, $\angle ABM =$ $= \frac{1}{2}\angle$ _____ = _____



О т в е т. $\angle ABM =$ _____

98

На рисунке даны $\angle OKC = \angle EKO$, $OM \perp KC$, $OM = 7$ см. Найдите расстояние от точки O до прямой KE.



Решение.

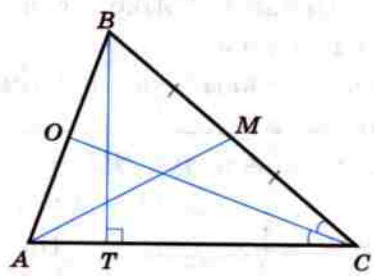
По условию задачи луч KO является ____________ угла ______, поэтому точка O ____________ от сторон этого угла, т. е. от прямых ______ и ______.

Расстоянием от точки O до прямой CK является длина ____________ OM, проведенного из точки ____ к этой прямой, т. е. расстояние от точки ____ до ____________ CK равно ________ см. Поэтому расстояние от ________ O до ____________ KE равно ______ см.

Ответ. ____________

99

В треугольнике ABC, изображенном на рисунке, $AC = BC \neq AB$, $BM = MC$, $BT \perp AC$, $\angle ACO = \angle BCO$. Какая из прямых AM, CO, BT является серединным перпендикуляром к стороне треугольника ABC?



Решение.

Прямая называется серединным перпендикуляром к отрезку, если она проходит через ____________ этого отрезка и ____________ к нему.

По условию задачи $BM =$ ______, но прямая AM не перпендикулярна к ____________ BC, так как в противном случае отрезок AM был бы медианой и ____________ треугольника ABC, а тогда были бы равны стороны AB и ______, что неверно. Следовательно, прямая AM ____________ серединным ____________ к стороне BC.

По условию задачи $BT \perp$ ______ , но AT ___ CT, так как в противном случае отрезок BT был бы высотой и ______________ треугольника ABC, а тогда были бы ________ стороны AB и BC, что неверно. Следовательно, прямая BT ______________ серединным ______________ к стороне AC.

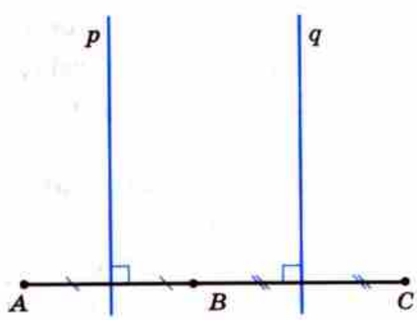
По условию задачи $\angle ACO = \angle$ ______ и $AC =$ ____ , т. е. отрезок CO является ______________ равнобедренного треугольника, а потому он является также его медианой и ______________ . Следовательно, прямая CO проходит через ______________ отрезка AB и ______________ к этому отрезку, т. е. ______________ серединным ______________ к стороне ____

Ответ.

Серединным ______________ к стороне треугольника ABC является прямая ______

100

Точки A, B и C не лежат на одной прямой; прямые p и q — серединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC. Докажите, что прямые p и q пересекаются.



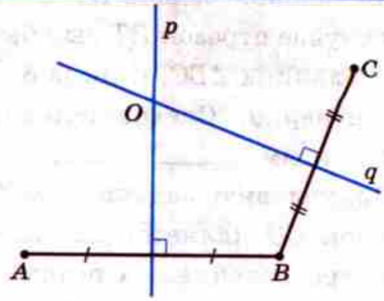
Доказательство.

Предположим, что прямые p и q не пересекаются. По условию задачи p ___ AB, а из предположения следует, что $p \parallel q$, значит, по свойству параллельных прямых AB ___ q. Итак, через точку B проходят ______________ прямые AB и ______ , перпендикулярные к прямой q, что невозможно.

Следовательно, наше предположение неверно, а значит, серединные ______________ к отрезкам AB и BC ______________ ______________

101

Прямые p и q — серединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC. Докажите, что $AO = OC$.

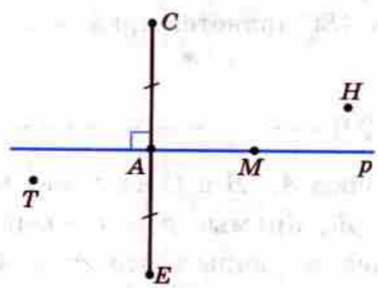


Доказательство.

Так как прямая p — ______________ ______ перпендикуляр к ______________ AB, то AO = ______ . Аналогично, так как прямая q — серединный ______________________ к отрезку BC, то OB = ______ . Итак, $AO = OB$ = ______ , поэтому AO = ______ , что и требовалось доказать.

102

Прямая p — серединный перпендикуляр к отрезку CE. Верно ли, что: а) точка A равноудалена от концов отрезка CE; б) расстояния от точки M до точек C и E не равны; в) точка H равноудалена от точек C и E; г) точка T удалена на разные расстояния от концов отрезка CE?



Решение.

а) Точка A лежит на ______________________ перпендикуляре к отрезку CE, следовательно, она ______________________ от концов этого отрезка, т. е. данное утверждение о точке A ______________

б) Точка M лежит на серединном ______________________ к отрезку ______ , поэтому она ______________________ от концов отрезка CE, а значит, расстояния от нее до точек C и ______ ______________ , т. е. данное утверждение о точке M ______________

в) Если бы точка H была равноудалена от точек C и E, то она лежала бы на серединном ______________________ к отрезку ______ , но это не так, и поэтому данное утверждение о точке H ______________

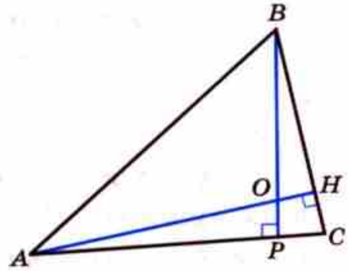
г) Если бы точка T была удалена на равные расстояния от точек C и E, то она лежала бы на серединном ______________________ к отрезку ______ , что в данном случае не выполняется. Следовательно, данное утверждение о точке T ______________

103

Отрезки AH и BP — высоты треугольника ABC. Проведите с помощью одной линейки (без делений) высоту из вершины C.

Решение.

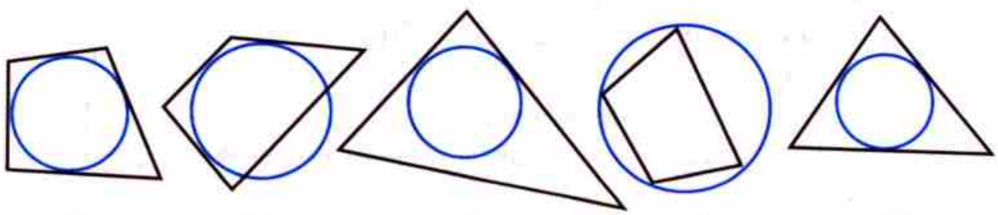
Высоты треугольника пересекаются в ________________ точке, поэтому третья высота треугольника проходит через точку ___ . С помощью линейки проведем прямую _____ и обозначим буквой T точку пересечения этой прямой с прямой AB. Отрезок _____ — искомая ____________________ треугольника ABC.



§ 4 Вписанная и описанная окружности

104

На каких рисунках a — ∂ изображены многоугольник и вписанная в него окружность?



а) б) в) г) д)

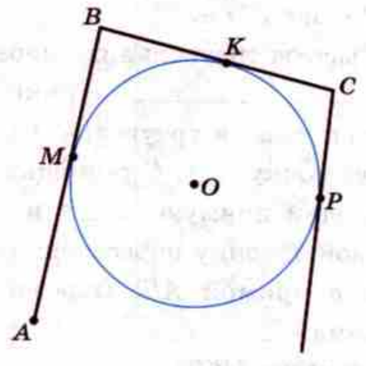
Решение.

Окружность называется вписанной в ____________________ , если ______ стороны многоугольника ____________________ окружности. Все ________________ многоугольника касаются окружности на рисунках ___ и ___ , следовательно, многоугольник и ____________________________ в него окружность изображены на рисунках ___ и ___

Ответ. ___ и ___

105

Достройте четырехугольник $ABCD$ так, чтобы он был описан около данной окружности.

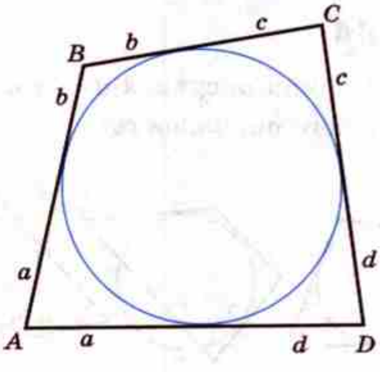


Р е ш е н и е.

Многоугольник описан около окружности, если ________ его стороны касаются ____________. Проведем через точку A ____________ к данной окружности, отличную от AM, и обозначим буквой D ________ пересечения этой касательной и прямой CP. Четырехугольник ________ — искомый.

106

Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Докажите, что $AB + CD = BC + AD$.

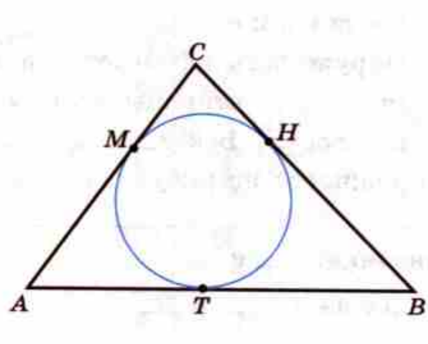


Д о к а з а т е л ь с т в о.

Используя свойство отрезков касательных к ____________, проведенных из одной точки, получаем: $AB + CD = a + b +$ ____ $+$ ____, $BC + AD =$ ____________. Следовательно, $AB +$ ______ $= BC +$ ______, что и требовалось ____________

107

Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках H, M и T. Найдите периметр треугольника ABC, если $AM = 5$ м, $CH = 3$ м, $BT = 6$ м.



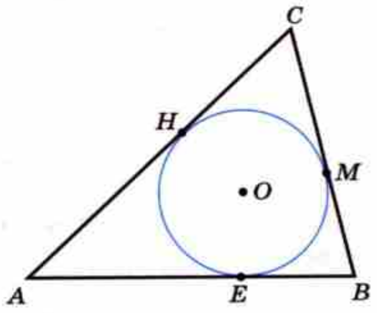
Р е ш е н и е.

Отрезки касательных к ________ ____________, проведенные из одной ___________, равны. Поэтому AT = ______ = 5 м, CM = ______ = = _____ м, BH = ______ = _____ м. Следовательно, $P_{ABC} = AM + MC +$ $+ CH +$ ____________________ = 2 · (AM + ____________________) = = ___ · (5 + _________) = ______ (м).

Ответ. P_{ABC} = ______ м.

108

Найдите площадь треугольника ABC, если его периметр равен 60 см, а радиус r вписанной окружности равен 4 см.



Решение.

Соединим центр окружности с вершинами треугольника и точками H, M и E касания сторон треугольника и окружности. Так как радиус, проведенный в точку ____________________, перпендикулярен к касательной, то $OH \perp$ _____, следовательно, отрезок OH — ____________ треугольника AOC. Аналогично отрезок OM — высота ____________________ BOC, отрезок OE — ____________ треугольника ________. Поэтому $S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot$ _____.

Аналогично $S_{BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot$ _____ и $S_{AOC} = \frac{1}{2} AC \cdot$ _____

Итак, $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} +$ ________ $= \frac{1}{2}$ ($AB \cdot OE + BC \cdot$ _____ + + ______) = ___ ($AB \cdot r + BC \cdot r +$ ______) = ___ (AB + ___ + AC)r = = ___ $P_{ABC} \cdot$ _____ $= \frac{1}{2}$ ____________ = _____ (см²).

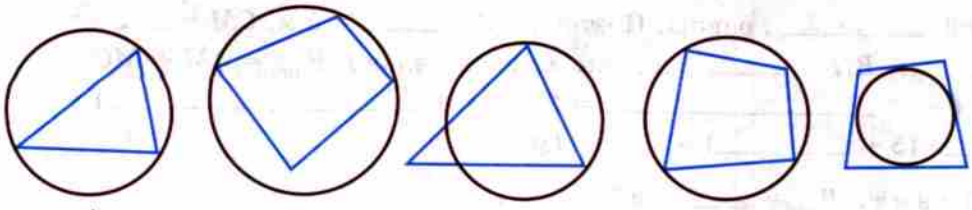
Ответ. ______________

109

На каких рисунках *а* — *д* изображены многоугольник и описанная около него окружность?

Решение.

Окружность называется ________________ около многоугольника, если ______ вершины многоугольника ________ на окружности.



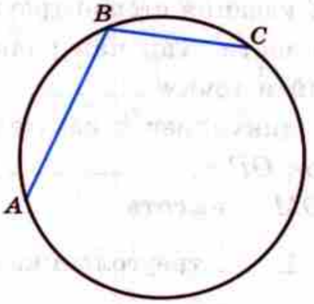
а) б) в) г) д)

Все вершины многоугольника __________ на окружности на рисунках ____ и ____, следовательно, многоугольник и описанная ______________ него окружность изображены на рисунках ____ и ____

Ответ. ________________

110

Достройте четырехугольник $ABCD$ так, чтобы он был вписан в окружность.



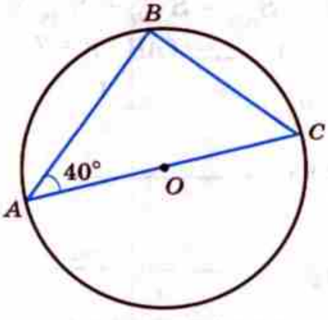
Решение.

Многоугольник вписан в окружность, если __________ его вершины лежат на ____________________________

Отметим на дуге AC точку D и проведем отрезки AD и ______. Четырехугольник ____________ искомый.

111

В треугольнике ABC $\angle A = 40°$. Найдите остальные углы треугольника, если центр описанной около него окружности лежит на стороне AC.



Решение.

Так как точки A, B и ____ лежат на данной ______________________, а ее центр — точка O — лежит на отрезке ______, то отрезок AC — __________ данной окружности, а угол B является ________________________ в эту окружность и опирается на ее ______________. Поэтому $\angle B =$ ______, а $\angle C = 180° - (40° +$ ______$)$ = ______

Ответ. $\angle B =$ ______, $\angle C =$ ______

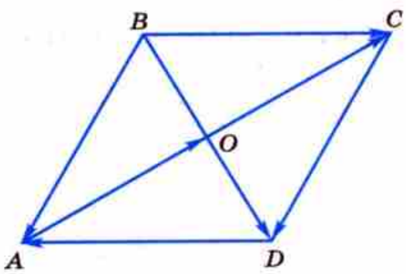
Глава IX

Векторы

§ 1 Понятие вектора

112

На рисунке изображен ромб $ABCD$, где $AB = 4$, $\angle BAD = 60°$.



а) Началом каких ненулевых векторов служит точка B?

б) Концом каких данных ненулевых векторов служит точка A?

в) Как называется и обозначается вектор с началом и концом в точке C?

г) Найдите длины (модули) векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

д) Какой ненулевой вектор коллинеарен вектору $\overrightarrow{BA}$?

е) Какие данные ненулевые векторы сонаправлены и какие противоположно направлены?

ж) Равны ли векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$?

з) Какой вектор, равный вектору $\overrightarrow{CD}$, отложен от точки B?

О т в е т. а) $\overrightarrow{BA}$, ______ , ______ ; б) ____________________

в) вектор с началом и концом в ______________ C называется ____________________ и обозначается ______ или ______

г) $|\overrightarrow{BC}|$ = ________ , ____________________

д) вектору $\overrightarrow{BA}$ ____________________ вектор ______

е) сонаправлены ненулевые векторы ______ и ______ , ______ и ______ , противоположно ____________________ векторы ______ и ______

ж) $\overrightarrow{BA}$ ___ $\overrightarrow{CD}$, так как $|\overrightarrow{BA}|$ ___ $|\overrightarrow{CD}|$ и $\overrightarrow{BA} \uparrow\uparrow$ ___ ; $\overrightarrow{BC}$ ___ $\overrightarrow{DA}$, так как $\overrightarrow{BC}$ и ______ не сонаправлены; $\overrightarrow{BA}$ ___ $\overrightarrow{BD}$, так как $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BD}$ ____________________ ; $\overrightarrow{AO}$ ___ $\overrightarrow{AC}$, так как $|\overrightarrow{AO}|$ ___ $|\overrightarrow{AC}|$; __________

____

з) ______

113

а) Постройте ненулевой вектор с началом в точке O:

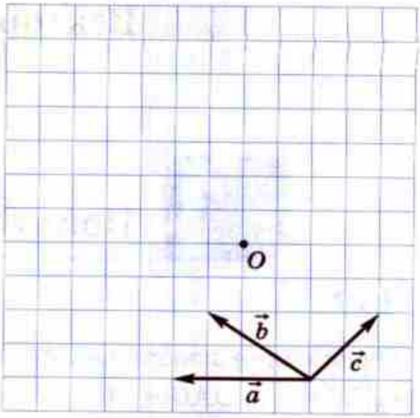
коллинеарный вектору $\vec{a}$;

сонаправленный с вектором $\vec{b}$;

противоположно направленный вектору $\vec{c}$.

б) Отложите от точки O вектор, равный вектору $\vec{c}$.

в) Сколько векторов, равных вектору $\vec{c}$, можно отложить от точки O?



О т в е т. в) От точки O можно отложить только ____________ вектор, равный вектору $\vec{c}$.

114

Стороны прямоугольника $ABCD$ равны 3 дм и 4 дм. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

Р е ш е н и е.

Длина вектора $\overrightarrow{AC}$ — это длина ____________ AC. Отрезок AC является ________________________ прямоугольника $ABCD$, следовательно, $AC = \sqrt{3^2 + \_\_\_\_} = \_\_\_\_$ (дм), т. е. $|\overrightarrow{AC}| = \_\_\_\_$ дм.

О т в е т. ________________

§ 2 Сложение и вычитание векторов

115

Используя правило треугольника, найдите сумму векторов:
а) $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{MT}$; б) $\overrightarrow{CH}$ и $\overrightarrow{HC}$; в) $\overrightarrow{AB} + \vec{0}$; г) $\vec{0} + \overrightarrow{CE}$.

Р е ш е н и е.

а) $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MT} = \_\_\_\_\_\_$

б) $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HC} = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_$

в) $\overrightarrow{AB} + \vec{0} = \_\_\_\_\_\_ + \overrightarrow{BB} = \_\_\_\_\_\_$

г) $\vec{0} + \overrightarrow{CE} = \_\_\_\_\_\_ + \overrightarrow{CE} = \_\_\_\_\_\_$

О т в е т. а) ______ ; б) ______ ; в) ______ ; г) ______

116

Используя правило треугольника, постройте векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{a} + \vec{b}$. Определите вид четырехугольника $OABC$.

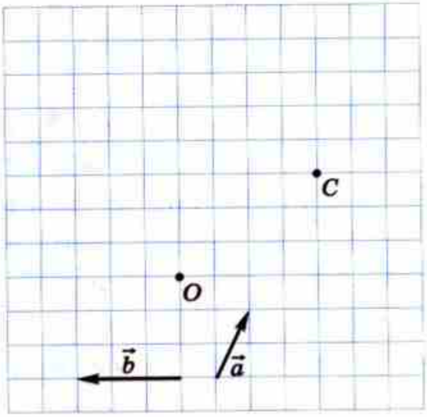
Решение.

Отложим от точки O вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ и от точки M вектор $\overrightarrow{MA} =$ ______, тогда $\overrightarrow{OA} =$ ______ + ______. Аналогично строим $\overrightarrow{CK} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{KB} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{CB} =$ ______________. Так как $\overrightarrow{OA} =$ ______ + ______ и $\overrightarrow{CB} =$ ______ + ______, то $\overrightarrow{OA}$ ___ $\overrightarrow{CB}$, следовательно, $OA \parallel$ ______ и $OA =$ ______, поэтому четырехугольник $OABC$ —

____

Ответ. Четырехугольник $OABC$ —

____

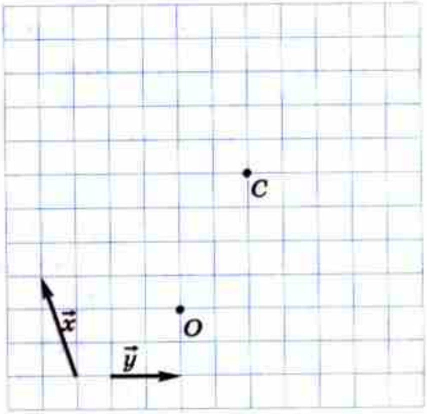


117

Используя правило параллелограмма, постройте векторы $\overrightarrow{OP} = \vec{x} + \vec{y}$ и $\overrightarrow{CT} = \vec{y} + \vec{x}$. Докажите, что $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{PT}$.

Решение.

Отложим от точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{x}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{y}$. Построим точку P так, чтобы четырехугольник $OAPB$ был ______________________________, тогда по правилу параллелограмма $\overrightarrow{OP} =$ ______ + ______. Отложим от точки C векторы $\overrightarrow{CM} = \vec{y}$ и $\overrightarrow{CE} =$ ______. Построим ______________________________ $CMTE$, тогда по правилу ______________________________ $\overrightarrow{CT} =$ ______ + ______



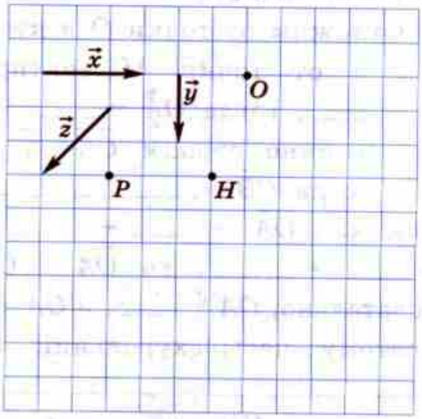
Так как $\overrightarrow{OP} =$ ______ + ______, $\overrightarrow{CT} =$ ______ + ______ и $\vec{x} + \vec{y} =$ ______ + ______ (переместительный закон ______________ векторов), то $\overrightarrow{OP}$ ___ $\overrightarrow{CT}$. Следовательно, четырехугольник $OPTC$ — ______________________________, а потому $\overrightarrow{OC} =$ ______, что и требовалось доказать.

118

а) Постройте векторы $\overrightarrow{OT} = \vec{x} + \vec{y}$ и $\overrightarrow{PM} = \vec{y} + \vec{z}$.

б) Отложите от точки H векторы $\vec{m} = \overrightarrow{OT} + \vec{z}$ и $\vec{n} = \vec{x} + \overrightarrow{PM}$.

в) Докажите, что $\vec{m} = \vec{n}$.



Доказательство.

Так как $\overrightarrow{OT} = \vec{x} +$ ____, то $\vec{m} = \overrightarrow{OT} + \vec{z} =$ (____ $+ \vec{y}) + \vec{z}$. Так как $\overrightarrow{PM} = \vec{y} +$ ____, то $\vec{n} =$ ____ $+ \overrightarrow{PM} = \vec{x} +$ (____ $+ \vec{z}$).

В соответствии с сочетательным __________ сложения векторов выполняется равенство:

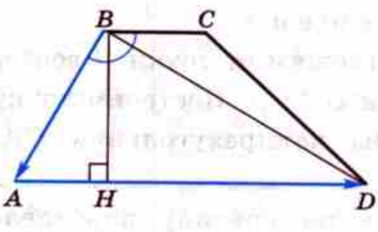
$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} =$ ____ + (____ + ____),

а значит, $\vec{m}$ ____ $\vec{n}$, что и требовалось __________

119

В трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 120°$, $AD = 6$ см, $AB = 3$ см.

Найдите $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}|$.



Решение.

По правилу треугольника имеем: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} =$ ______, следовательно, $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}| = |$ ______ $|$. Длина вектора $\overrightarrow{BD}$ — это __________ отрезка ______. Так как $AD \parallel$ ______, то $\angle BAD = 180° - \angle$ ______ = ______

Проведем высоту BH трапеции. В прямоугольном треугольнике ABH имеем: $BH = AB \cdot \sin$ ____ $= 3 \cdot$ ______ = ____________ (см), $AH =$ ____ $\cdot \cos$ ____ = ____ $\cdot$ ______ = ______ (см).

Из треугольника BHD по теореме Пифагора получаем: $BD^2 =$ ______ + ($AD -$ ______$)^2 =$ ______ + ______ = ______ (см^2), откуда $BD =$ ______ см.

Ответ. ____________

120

Пользуясь правилами и законами сложения векторов, упростите выражение $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CT}$.

Решение.

$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CT} =$
$= (\overrightarrow{MC} +$ ______ $) + \overrightarrow{CT} =$
$= (\overrightarrow{AM} +$ ______ $) + \overrightarrow{CT} =$
$=$ ______ $+ \overrightarrow{CT} =$ ______

Ответ. ______

Обоснование.

______________________ закон
______________________ закон
______________________ треугольника
правило ______________________

121

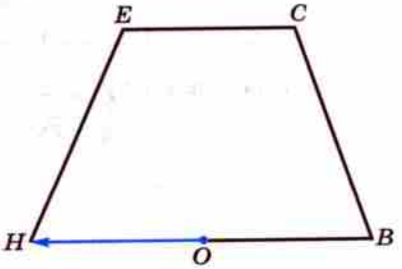
Пользуясь правилом многоугольника и законами сложения векторов, упростите выражение $\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{KM}$.

Решение.
$\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} +$ ______ $=$ ______ $+ \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} +$ ______ $=$
$= \overrightarrow{BK} +$ ______ $+ \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} =$ ______ $+ \overrightarrow{MT} +$ ______ $=$ ______ $+ \overrightarrow{TP} =$
$=$ ______

Ответ. ______

122

В трапеции $BCEH$, изображенной на рисунке, $BH = 2CE$, точка O — середина BH. Какие векторы с концом и началом в отмеченных точках являются противоположными вектору $\overrightarrow{OH}$?



Решение.

По определению противоположным вектору $\overrightarrow{OH}$ является вектор, направление которого ______________________ направлению вектора ______, а длина ______________ длине вектора $\overrightarrow{OH}$.

Противоположно направлены вектору $\overrightarrow{OH}$ векторы $\overrightarrow{HB}$, ______, ______, ______. Из них имеют длину, равную ______________ вектора $\overrightarrow{OH}$, векторы ______, ______, ______.

Итак, ______________________ вектору $\overrightarrow{OH}$ являются векторы ______, ______, ______.

Ответ. ______________

123

Какой из векторов $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PC}$ равен разности векторов $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MP}$?

Решение.

По определению разностью векторов $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MP}$ является вектор $\vec{x}$, такой, что ______ $+ \vec{x} =$ ______

Проверим, какой из данных векторов удовлетворяет этому условию:

$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{CM}$ ___ $\overrightarrow{MC}$, следовательно, $\overrightarrow{CM} \neq \overrightarrow{MC} -$ ______

$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{CP}$ ___ $\overrightarrow{MC}$, следовательно, $\overrightarrow{CP}$ ___ $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$.

$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM}$ ______, т. е. $\overrightarrow{PM}$ ___ $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$.

$\overrightarrow{MP} +$ ______________, т. е. $\overrightarrow{PC}$ ___ $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MP}$.

Ответ. ________

124

Докажите, что для любых трех точек X, Y, Z верно равенство $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}$.

Доказательство.

По теореме о разности векторов $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} +$ (______), поэтому $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} =$ ______ + (______). Запись «$-\overrightarrow{ZY}$» означает «вектор, противоположный вектору ______», т. е. $-\overrightarrow{ZY} =$ ______. Следовательно, $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} =$ ______ $+ (-\overrightarrow{ZY}) = \overrightarrow{XY} +$ ______, что и требовалось ____________________

125

Упростите выражение $(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{TA}) - (\overrightarrow{PX} - \overrightarrow{TX})$.

Решение.

$(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{TA}) - (\overrightarrow{PX} -$ ________$) = ($________ $- \overrightarrow{TA}) -$

$- (\overrightarrow{PX} + (-$ ________$)) = (\overrightarrow{HA} + (-$ ________$)) - (\overrightarrow{PX} +$ ________$) =$

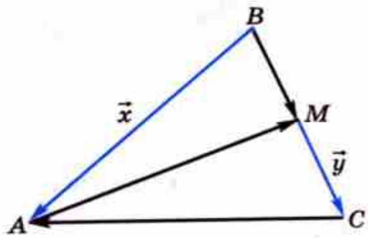
$= (\overrightarrow{HA} +$ ________$) -$ ________ $=$ ________ $+ (-$ ________$) =$

$= \overrightarrow{HT} +$ ________ $=$ ________

Ответ. ________

126

Отрезок AM — медиана треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{CA}$ через векторы $\overrightarrow{BA} = \vec{x}$ и $\overrightarrow{MC} = \vec{y}$.



Ответ.

$\overrightarrow{BM} =$ ______

$\overrightarrow{AM} =$ ______ – ______

$\overrightarrow{CA} = -\vec{y} -$ ______ + ______

127

Найдите вектор x, если:

а) $\overrightarrow{PO} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$; б) $\vec{x} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{PM}$; в) $\overrightarrow{CM} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$.

Решение.

а) $\overrightarrow{PO} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$, следовательно, $\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PM} +$ ______ , откуда $\vec{x} =$ $= \overrightarrow{PO} -$ ______ $= \overrightarrow{PO} +$ ______ = ______

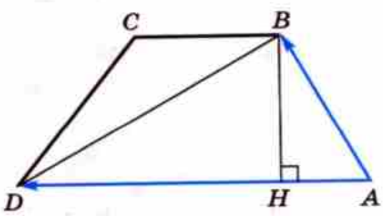
б) $\vec{x} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{PM}$, отсюда $\vec{x} =$ ______ + ______ = ______

в) $\overrightarrow{CM} - \vec{x} = \overrightarrow{PM}$, поэтому $\vec{x} = \overrightarrow{CM} -$ ______ $= \overrightarrow{CM} +$ ______ = ______

Ответ. а) ______ ; б) ______ ; в) ______

128

В трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 120°$, $AD = 6$ м, $AB = 3$ м. Найдите $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$.



Решение.

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} =$ ______ , следовательно, $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |$______$| =$ ______ . Так как $AD \parallel$ ______ , то $\angle BAD = 180° - \angle$ ______ = = ______

Проведем высоту BH трапеции. В треугольнике ABH имеем: $BH = AB \cdot \sin$ ___ = ___ · ______ = ________ (м), $HA = AB$ · __________ = = ______ · ______ = ______ (м). Тогда $DH = AD -$ ______ = ______ (м).

Из треугольника BHD по теореме Пифагора находим:

$BD^2 =$ ______ + ______ = (______ + ______) = ______ (м²),

откуда $BD =$ ______ м.

Итак, $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| =$ ______ = ______ м.

Ответ. ____________

§ 3 Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач

129

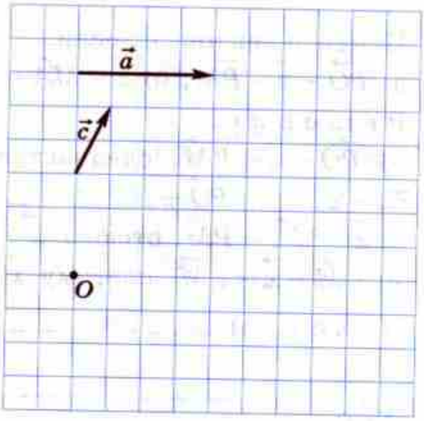
Отложите от точки O векторы $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{y} = 2\vec{c}$, $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{c}$.

Р е ш е н и е.

Так как $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}$, то, согласно определению произведения вектора на число, $\vec{x} \uparrow\uparrow$ ___ и $|\vec{x}| =$ ___ $|\vec{a}|$. Отложим от точки O вектор $\vec{x}$.

Аналогично $\vec{y}$ ___ $\vec{c}$ и $|\vec{y}| =$ ___ . Отложим от точки O вектор ___

$\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{a} +$ ___ $= \vec{x} +$ ___ . Так как векторы $\vec{x}$ и ___ отложены от точки ___ , строить вектор $\vec{z} = \vec{x} +$ ___ удобно по правилу ______________________ .
Строим вектор ___



130

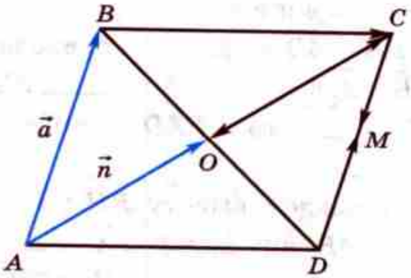
На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$, где $DM = CM$, $\overrightarrow{AO} = \vec{n}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

Выразите:

а) векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CO}$ через вектор $\vec{n}$;

б) векторы $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{CM}$ через вектор $\vec{a}$;

в) вектор $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$.



Р е ш е н и е.

а) Так как точка O является точкой пересечения ______________ параллелограмма, то $AO =$ _____ , и, значит, $|\overrightarrow{AC}| =$ __ $|\overrightarrow{AO}|$. Кроме того, $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow$ _____ , следовательно, согласно определению произведения вектора на число, $\overrightarrow{AC} =$ ___ $\overrightarrow{AO} =$ ___ $\vec{n}$. Далее, $|\overrightarrow{CO}|$ ___ $|\overrightarrow{AO}|$ и $\overrightarrow{CO}$ ___ $\overrightarrow{AO}$, поэтому $\overrightarrow{CO} =$ ___ $\overrightarrow{AO} =$ _____

б) Противоположные стороны параллелограмма ______________ и ______________________________, поэтому $\overrightarrow{DC}$ ___ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Далее, $\overrightarrow{DM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{DM}| =$ ___ $|\overrightarrow{DC}|$, следовательно, согласно определению ____________________ вектора на __________, $\overrightarrow{DM} =$ ___ $\overrightarrow{DC} =$ ___ $\vec{a}$. Так как $\overrightarrow{CM} \uparrow\downarrow \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{CM}| =$ ___ $|\overrightarrow{DC}|$, то $\overrightarrow{CM} =$ ___ $\overrightarrow{DC} =$ _____

в) По правилу треугольника $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} +$ _____ . Но $\overrightarrow{BA} = -$ _____ $= -\vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = 2\vec{n}$, следовательно, $\overrightarrow{BC} =$ _____ $+$ _____

Ответ.

а) ____________________________

б) ____________________________

в) _____________

131

Упростите выражение:

а) $-0{,}5(12\vec{a})$;

б) $2{,}5\vec{b} - 1{,}7\vec{b}$;

в) $3(\vec{c} + \vec{p}) - 5\vec{p}$;

г) $2(5\vec{p} - 3\vec{q}) - 3(3\vec{p} - 2\vec{q})$.

Решение.

а) $-0{,}5(12\vec{a}) =$ (_____ $\cdot$ _____) $\vec{a} =$ _____

б) $2{,}5\vec{b} - 1{,}7\vec{b} =$ (_____________) $\vec{b} =$ _____

в) $3(\vec{c} +$ ___ $) - 5\vec{p} =$ _____ $+$ _____ $-$ _____ $=$ _____ $+$ (__________) $=$ $=$ _____ $+$ (_____) $\vec{p} =$ _____ $-$ _____

г) $2(5\vec{p} -$ _____ $) - 3($ _____ $- 2\vec{q}) =$ _____ $\vec{p} -$ _____ $\vec{q} -$ _____ $\vec{p} +$ $+$ _____ $=$ _____ $+$ _____ $=$ _____

Ответ. а) _______ ; б) _______ ; в) __________ ; г) _____

132

Докажите, что векторы $\vec{c} = 2(\vec{a} + 1{,}5\vec{p}) - 3\vec{p}$ и $\vec{a}$ коллинеарны.

Доказательство.

$\vec{c} = 2(\vec{a} +$ _____ $) - 3\vec{p} = 2\vec{a} +$ _____ $- 3\vec{p} = 2\vec{a} +$ (_______) $\vec{p} = 2\vec{a} +$ $+$ _____ $\vec{p} =$ _____ $\vec{a}$. По определению произведения вектора на _______________ векторы $\vec{a}$ и $2\vec{a}$ ____________________________, что и требовалось ___________________

133

Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливы равенства:
а) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; б) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

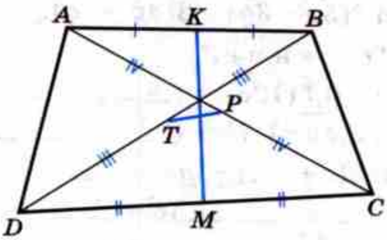
Доказательство.

Если $\vec{a} = \vec{0}$, то обе части каждого равенства — нулевые векторы, поэтому равенства справедливы. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$.

а) По определению произведения вектора на ______________ $|1 \cdot \vec{a}| = |\_\_| \cdot |\_\_| = 1 \cdot |\_\_| = |\_\_|$, а так как число 1 положительно, то векторы $1 \cdot \vec{a}$ и $\vec{a}$ ______________________________.
Следовательно, по определению равных векторов $1 \cdot \vec{a}$ __ $\vec{a}$.

б) По определению ______________________________ вектора на число $|(-1) \cdot \vec{a}| = |\_\_\_| \cdot |\_\_| = \_\_ \cdot |\_\_| = |\_\_|$, а так как -1 __ 0, то векторы $(-1) \cdot \vec{a}$ и $\vec{a}$ противоположно ______________ ____________. По определению противоположного вектора $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$ и $-\vec{a} \uparrow\downarrow$ __ . Следовательно, $|(-1)\vec{a}|$ __ $|-\vec{a}|$ и $(-1)\vec{a} \uparrow\uparrow$ __ , т. е. $(-1) \cdot \vec{a}$ __ $-\vec{a}$.

134



Точки K и M — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, изображенного на рисунке, точки P и T — середины диагоналей AC и BD. Докажите, что середины отрезков KM и PT совпадают.

Доказательство.

Пусть точка X — середина отрезка KM, точка Y — середина отрезка PT. Тогда для произвольной точки O имеем:

$$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OK} \_\_ \overrightarrow{OM}) \quad (1)$$

и

$$\overrightarrow{OY} = \_\_ (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OT}). \quad (2)$$

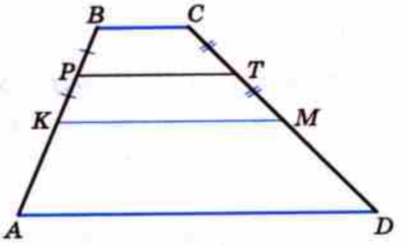
По условию задачи точки K и M — середины отрезков AB и _____ , следовательно, $\overrightarrow{OK} = \_\_ (\overrightarrow{OA} + \_\_\_\_)$ и $\overrightarrow{OM} = \_\_ (\overrightarrow{OC} + \_\_\_\_)$.
Аналогично $\overrightarrow{OP} = \_\_ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ и $\overrightarrow{OT} = \_\_ (\overrightarrow{OB} + \_\_\_\_)$.

Подставляя найденные выражения в формулы (1) и (2), получим:
$\overrightarrow{OX} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \_\_ (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \_\_\_\_)$,
$\overrightarrow{OY} = \_\_ (\_\_ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \_\_ (\overrightarrow{OB} + \_\_\_\_)) = \_\_ (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \_\_\_\_ +$
$+ \_\_\_\_)$.

Отсюда следует, что $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY}$. Так как от точки O можно отложить только ________________ вектор, равный данному, то точки X и ___ совпадают, следовательно, совпадают середины отрезков _____ и _____ , что и требовалось доказать.

135

В трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, $AK = KB$, $CM = MD$, $BP = PK$, $CT = TM$, $BC = 2$ м, $AD = 8$ м. Найдите PT.



Решение.

Так как AK = _____ и CM = _____ , то отрезок KM — средняя __________ трапеции, следовательно, KM ___ BC и KM = ___(BC + _____) = ___(2 + ___) = = ___ (м).

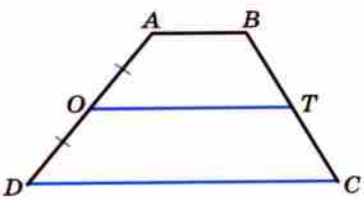
В четырехугольнике $BCMK$ стороны BC и KM ______________________ , а стороны BK и _____ не параллельны, следовательно, $BCMK$ — ______________ . По условию задачи BP = = _____ и CT = _____ , поэтому отрезок PT — средняя __________ трапеции $BCMK$, и, следовательно, PT = ____ (BC + ______) = = ____________________ = _____ (м).

Ответ.

____

136

Прямая OT параллельна основанию CD трапеции $ABCD$, причем $AO = OD$. Докажите, что отрезок OT — средняя линия трапеции.



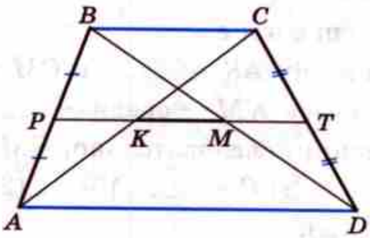
Доказательство.

В соответствии с определением средней ________________ трапеции нужно доказать, что точка T является ______________________ стороны BC.

Предположим, что это не так, и пусть серединой стороны BC является точка X. Тогда отрезок OX — ________________ линия трапеции, поэтому OX ___ CD. Но по условию задачи OT ___ CD.

Итак, через точку O проходят ______ прямые, параллельные прямой ______ , что противоречит ______________ параллельных прямых. Следовательно, точка T — ______________________________ BC, т. е. отрезок OT — __________________________ трапеции, что и требовалось ______________________

137



В трапеции $ABCD$ отрезок PT — средняя линия, $AD = 9$ м, $BC = 5$ м. Найдите длину отрезка KM.

Решение.

По свойству средней __________ трапеции PT ___ BC и $PT =$ ___ $(AD +$ $+$ _____). В треугольнике ABC отрезки AP и PB равны и прямая PK параллельна стороне _____ , следовательно, отрезок PK — ________________ линия треугольника ABC (задача 65). Поэтому $PK =$ ___ BC. Аналогично в треугольнике BCD $TM = \frac{1}{2}$ _____

Итак, $KM = PT - (PK +$ _____$) =$ ___$(BC +$ _____$) - (\frac{1}{2}$ _____ $+$ $+$ ___ $BC) =$ ___ $BC +$ ___ $AD -$ _____ $= \frac{1}{2}(AD -$ _____$) =$ ___ $(9 -$ ___$) =$ $=$ ___ (м).

Ответ. ______________________

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебно-методический
комплект по геометрии
для 7 – 9 классов:

В. Ф. Бутузов
РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
к учебнику Л. С. Атанасяна и др.

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов,
С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина
УЧЕБНИК

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, И. И. Юдина
РАБОЧИЕ ТЕТРАДИ

Б. Г. Зив, В. М. Мейлер
ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

М. А. Иченская
САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Т. М. Мищенко, А. Д. Блинков
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов,
Ю. А. Глазков, В. Б. Некрасов, И. И. Юдина
ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ
в 7 – 9 классах

Б. Г. Зив, В. М. Мейлер, А. Г. Баханский
ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ
для 7 – 11 классов

ISBN 978-5-09-031784-9
9 785090 317849

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО