МГУ – ШКОЛЕ

В. Ф. Бутузов Ю. А. Глазков
И. И. Юдина

Геометрия

11

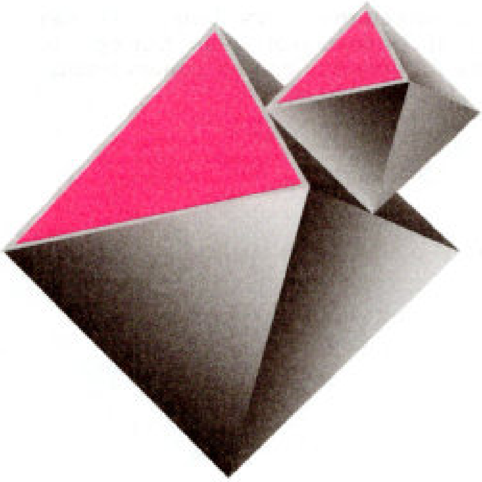
Рабочая тетрадь

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВНИ

МГУ – ШКОЛЕ

В. Ф. Бутузов
Ю. А. Глазков И. И. Юдина

Геометрия



Рабочая тетрадь

11 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

Базовый и углублённый уровни

3-е издание

Москва «Просвещение» 2021

УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721
Б93

12+

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Геометрия, 10—11» Л. С. Атанасяна и др. и предназначена для организации решения задач учащимися на уроке после их ознакомления с новым учебным материалом.

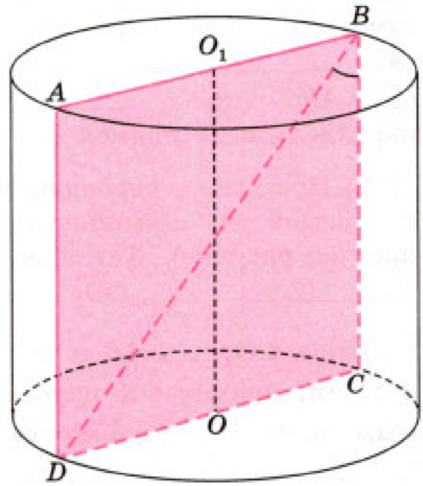
ISBN 978-5-09-080067-9

Глава IV

Цилиндр, конус и шар

§ 1 Цилиндр

1



Диагональ осевого сечения цилиндра равна 48 см. Угол между этой диагональю и образующей цилиндра равен 60°. Найдите:

а) высоту цилиндра;

б) радиус цилиндра;

в) площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение.

Осевое сечение цилиндра представляет собой ________________, стороны BC и AD которого являются ________________ цилиндра, а две другие стороны — ________________ оснований цилиндра. По условию задачи $BD =$ ______ см, $\angle DBC =$ ______

а) Высота цилиндра равна его ________________________, а $BC = BD \cdot \cos$ ________ $=$ ________ $\cdot \frac{1}{2} =$ ________ (см), т. е. высота ______________ равна ______ см.

б) Радиус цилиндра — это ________________ основания цилиндра: $OC = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} BD \cdot$ ________ $= \frac{1}{2} \cdot$ ___ $\cdot \frac{\sqrt{3}}{\_\_}$ $=$ ________ (см).

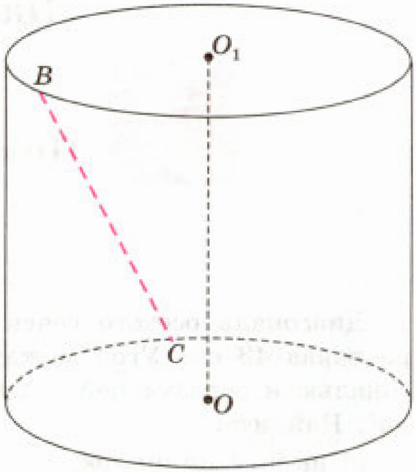
в) Площадь боковой ________________ цилиндра равна произведению __________ окружности ________________________ цилиндра на ______________ цилиндра, т. е. $S_{бок} = 2\pi$ ___ $h =$ ___ $\cdot 2\sqrt{3} \cdot$ ___ $=$ ______ $\sqrt{3}\pi$ (см^2).

Ответ.

а) __________ см; б) ______________ см; в) ________________ см^2.

2

Концы отрезка BC лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус цилиндра равен 10 дм, $BC = 13$ дм, а расстояние между прямой BC и осью цилиндра равно 8 дм. Найдите высоту цилиндра. (Задача **326** учебника.)



Решение.

1) Проведём образующую AB цилиндра (выполните построение на рисунке). Так как $OO_1 \parallel AB$, то прямая OO_1 ________________ плоскости ABC (по ________________ параллельности прямой и плоскости).

2) Проведём перпендикуляр OK к прямой AC (выполните построение на рисунке). Так как OK лежит в плоскости AOC основания ______________, OO_1 ____ ABC, то OO_1 ____ OK.

Итак, OO_1 ____ AB и OO_1 ____ OK, следовательно, OK ____. Таким образом, прямая OK перпендикулярна к двум пересекающимся прямым AC и ______ плоскости ______, следовательно, OK ____ ABC (по ________________________________ прямой и плоскости). Поэтому расстояние между прямыми AB и OO_1 равно ________, т. е. $OK =$ ______ дм.

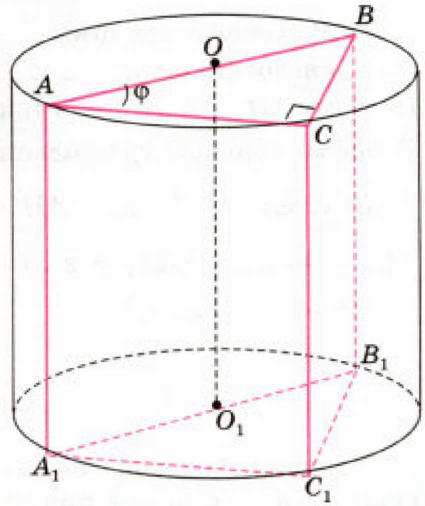
3) По условию задачи $AO =$ ______ дм (радиус ______________). В прямоугольном треугольнике AKO катет $AK = \sqrt{AO^2 - \underline{\qquad}} = \sqrt{\underline{\qquad} - 8^2} =$ ______ (дм), поэтому $AC =$ ______ дм.

4) В треугольнике ABC катет $AB = \sqrt{\underline{\qquad} - AC^2} = \sqrt{13^2 - \underline{\qquad}} =$ ______ (дм).

Ответ. ______ дм.

3

Через образующую AA_1 цилиндра проведены две секущие плоскости, одна из которых проходит через ось цилиндра. Найдите отношение площадей сечений цилиндра этими плоскостями, если угол между ними равен φ. (Задача **331** учебника.)



Решение.

На рисунке изображены образующая AA_1 и секущие ______________ CAA_1C_1 и BAA_1B_1, причём плоскость BAA_1B_1 проходит через ось ______________

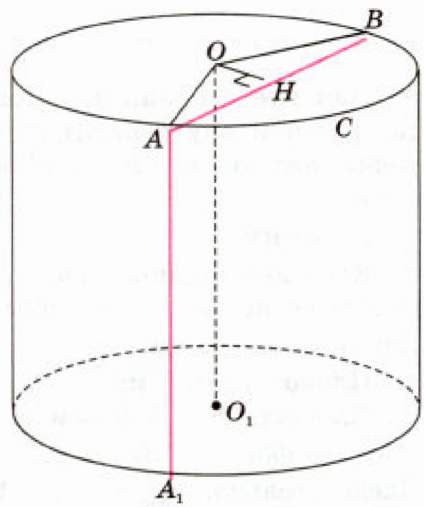
1) Образующая AA_1 ______________ ______________ к плоскости ABC основания цилиндра, следовательно, AA_1 ____ AB и AA_1 ____ AC. Поэтому $\angle BAC$ — ______________ угол двугранного угла, образованного секущими ______________ ______________. По условию задачи $\angle BAC$ = ____

2) Так как плоскость BAA_1B_1 проходит через ______ цилиндра, то отрезок AB — ______________ основания, и поэтому $\angle ACB = 90°$. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC = ______ $\cos\varphi$.

3) $\dfrac{S_{CAA_1C_1}}{S_{BAA_1B_1}} = \dfrac{AC\cdot\underline{\qquad}}{\underline{\qquad}\cdot AA_1} = \dfrac{AC}{\underline{\qquad}}$ = ______________

Ответ. ______________

4



Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в 120°. Найдите площадь сечения, если высота цилиндра равна h, а расстояние между осью цилиндра и секущей плоскостью равно d. (Задача **333** учебника.)

Решение.

Искомое сечение представляет собой ______________ ABB_1A_1 (закончите построение на рисунке).

1) По условию задачи AA_1 = ______, $\smile ACB$ = ______________. Проведём $OH \perp AB$, тогда OH — ______________ к плоскости сечения. По условию задачи OH = ______

2) В равнобедренном ________________ AOB отрезок OH — высота и, следовательно, ______________ и ________________________
Поэтому $AB = 2$ _____ , а так как $\angle AOB =$ _____ , то $\angle AOH =$ _____
В прямоугольном треугольнике AOH $AH = OH \cdot$ _____ $=$ _____ $\sqrt{\_}$

3) Итак, $AB =$ ____ $AH = 2d\sqrt{\_\_}$, $AA_1 =$ ______, следовательно, $S_{ABB_1A_1} =$ _____ $\cdot AA_1 = 2\sqrt{3}$ ____

Ответ. _____ dh.

5

Площадь боковой поверхности цилиндра равна S. Найдите площадь осевого сечения цилиндра. (Задача **337** учебника.)

Решение.

Пусть h — высота цилиндра, r — его радиус. По условию задачи $S_{бок} =$ __, т. е.

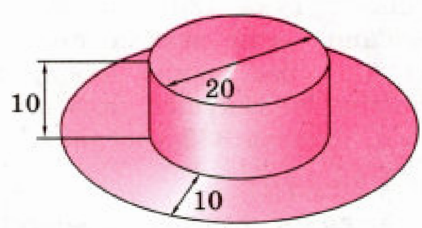
$$2\pi r \_\_ = S. \tag{1}$$

Осевым сечением цилиндра является ______________________ со сторонами $2r$ и __. Поэтому площадь осевого сечения равна _______ $\cdot h$. Учитывая равенство (1), получаем $2rh = \frac{S}{\_}$.

Ответ. _________

6

Найдите площадь поверхности (внешней и внутренней) шляпы, размеры которой (в см) указаны на рисунке.



Решение.

Если дно шляпы опустить на плоскость её полей, то получим круг радиуса $r =$ ____ см.

Площадь этого круга $S_{кр} = \pi$ _____ $=$ _______ (см^2).

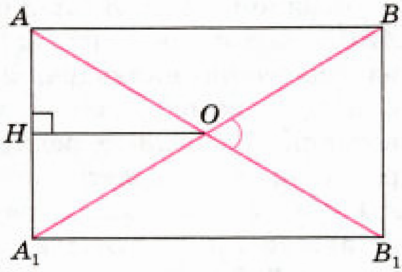
Площадь $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндрической части вычисляем по формуле $S_{бок} =$ _____ $r_1 h$, где $r_1 =$ _____ см, _____ $= 10$ см. Следовательно, $S_{бок} =$ ____ $10 \cdot 10 =$ _____ (см^2).

Итак, $S_{шляпы} = 2(S_{кр} +$ _____$) =$ _______ см^2.

Ответ. ____________ см^2.

7

Угол между диагоналями развёртки боковой поверхности цилиндра равен 60°, диагональ равна 6 м. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.



Решение.

На рисунке изображена развёртка боковой ____________________ цилиндра — прямоугольник AA_1B_1B, где AA_1 и BB_1 — ____________________ цилиндра. По условию $\angle AOA_1$ = ______ , AB_1 = ______

1) Так как в прямоугольнике AA_1B_1B AB_1 ___ A_1B, AO ___ OB_1 и A_1O ___ OB, то треугольник AOA_1 — ______________ . Следовательно, его высота OH является ______________ и ______________ . Поэтому AH = ___ AA_1, $\angle AOH$ = ___ , $AH = AO \cdot \sin$ ____ = ___ $\cdot \frac{\sqrt{}}{2}$ = ___ ,

$HO = AO \cdot$ ________ = ___ $\cdot$ _____ = ________ , AA_1 = –AH = _____ , AB = ___ HO = ______

2) Пусть r — радиус цилиндра, тогда AB = _______ r, т. е. $2\pi r$ = = ______, откуда $r = \frac{3\sqrt{}}{}$

3) $S_{цил} = S_{бок} + 2$ ________, где $S_{бок} = AB \cdot$ ________ = ________ = = ________ (м^2), $S_{осн} = \pi$ _____ = _______ (м^2).

Итак, $S_{цил}$ = _______ + _______ = ___________ (м^2).

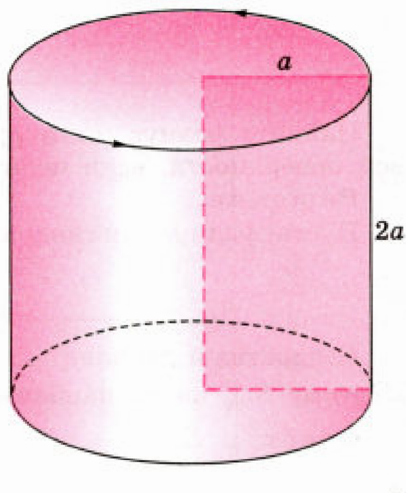
Ответ. ________________

8

Цилиндр получен вращением прямоугольника со сторонами a и $2a$ вокруг большей стороны. Найдите площадь:

а) осевого сечения цилиндра;

б) боковой поверхности цилиндра.



Решение.

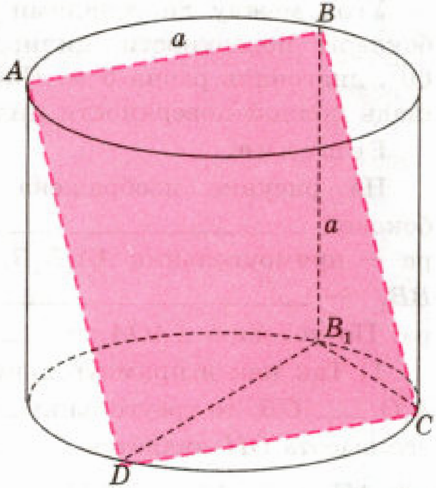
Пусть r — радиус цилиндра, h — его высота. По условию r = ___ , h = ___

а) $S_{сеч} = 2a \cdot$ ____ = 4 ____

б) $S_{бок} = 2\pi$ ___ h = ____ $\cdot a \cdot$ ____ = = ___ π _____

Ответ. а) _______ ; б) _______

9



Вершины A и B прямоугольника $ABCD$ лежат на окружности одного из оснований цилиндра, а вершины C и D — на окружности другого основания. Вычислите радиус цилиндра, если его образующая равна a, $AB = a$, а угол между прямой BC и плоскостью цилиндра равен $60°$. (Задача 397 учебника.)

Решение.

1) Пусть BB_1 — образующая цилиндра, тогда отрезок BB_1 — перпендикуляр к ______________ основания и поэтому прямая B_1C — проекция прямой __________ на плоскость ___________ цилиндра. Следовательно, угол между ___________ BC и плоскостью _________________ цилиндра равен углу ________. По условию $\angle BCB_1 =$ _____ , $BB_1 =$ ___ , поэтому $B_1C = \dfrac{BB_1}{\_\_\_\_\_} =$ _____

2) Так как по условию $BC \perp$ _____ , то $B_1C \perp$ _____ (по обратной теореме _______________________________), т. е. $\angle B_1CD =$ ______ . Поэтому отрезок B_1D — ______________ основания цилиндра.

3) В прямоугольном треугольнике B_1CD $CD =$ ___ $= a$, $B_1C =$ ___ , следовательно, $B_1D = \sqrt{CD^2 + \_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_ + \_\_\_\_} =$ _____ . Поэтому радиус цилиндра равен _____

Ответ. _____

10

Найдите радиус цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности, если периметр его осевого сечения равен 12 м.

Решение.

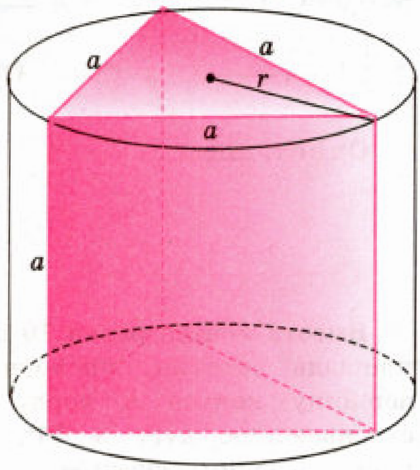
Пусть радиус цилиндра равен r, тогда высота цилиндра равна ___ $- 2r$,

$$S_{бок} = \_\_\_\_\_\_\_\_ r(6 - 2 \_\_) = 4\pi(-r^2 + \_\_\_\_\_).$$

Квадратный двучлен _________ $+ 3r$ имеет корни $r =$ __ и $r =$ __ Поэтому $S_{бок}$ имеет наибольшее значение, если $r =$ ____ м.

Ответ. _______

11



В цилиндр вписана треугольная призма (основания призмы вписаны в основания цилиндра), каждое ребро которой равно a. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение.

Высота h данного цилиндра равна ____, радиус r цилиндра равен ________ ____ окружности, описанной около правильного ________________ со стороной ___, т. е. $r = a\,\dfrac{\sqrt{}}{}$

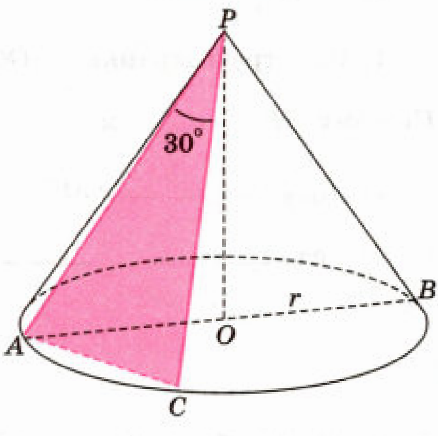
$$S_{бок} = 2\pi\ \_\_\_\_ = \_\_\_\_\ \frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot \_\_\_ =$$

$$= \_\_\_\_\_\_\ a^2.$$

Ответ. ________

§ 2 Конус

12



Радиус основания конуса равен 2 м, а осевое сечение — прямоугольный треугольник. Найдите площадь сечения, проведённого через две образующие, угол между которыми равен 30°.

Решение.

По условию задачи треугольник APB — ____________________, а так как PA = __________, то $\angle PAO = 45°$. В прямоугольном треугольнике PAO катет $PA = \dfrac{AO}{\cos\_\_\_}$ = __ $\sqrt{2}$ м.

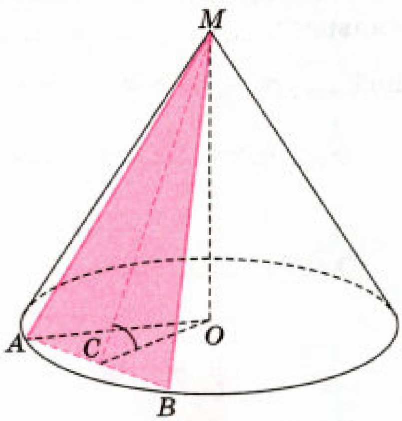
Пусть $\angle APC = 30°$, тогда сечение, проведённое через образующие PA и

______ , является ______________________________ треугольником, в котором PC = ______ = 2 ______ м. Поэтому $S_{APC} = \frac{1}{2} PA^2 \cdot \underline{\qquad\qquad} =$

$= \frac{1}{2} (\underline{\qquad\qquad})^2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\qquad}$ (м^2).

Ответ. ________

13



Высота конуса равна 10 см. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в 60°, если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол 45°. (Задача 354б учебника.)

Решение.

1) Так как хорда AB стягивает дугу в 60°, то $AB = OA =$ ______

2) Проведём OC перпендикулярно к AB. Тогда $AB \perp$ ________ (по теореме о трёх ______________________________) и $\angle MCO$ — ______________________ угол двугранного угла с ребром ________ . По условию $\angle MCO =$ ______

3) В треугольнике MCO CO = _____ = _____ см, MC = ________ см.

4) Из треугольника AOC получаем $OA = \frac{\underline{\qquad}}{\cos 30^\circ} = \underline{\qquad}$ см.

Поэтому AB = _____ см.

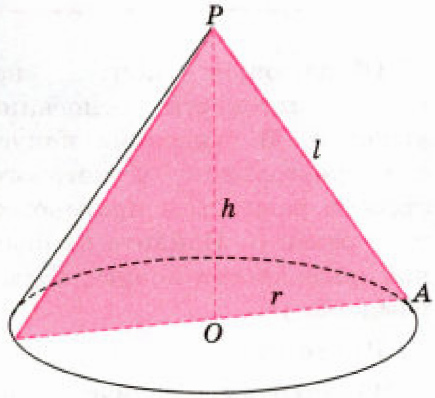
5) $S_{MAB} = \frac{1}{2} \underline{\qquad} \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$ (см^2).

Ответ. __________________

14

Развёртка боковой поверхности конуса — сектор с радиусом 4 м и дугой в 90°. Найдите радиус основания и высоту конуса.

Решение.



Обозначим радиус основания данного ______ буквой r, высоту — буквой h, образующую — буквой l. По условию $l =$ __ м, площадь развёртки (сектора) равна $\frac{\_\_ l^2}{360} \cdot \_\_\_ = \_\_ \pi$ м^2.

Поэтому $S_{бок} = \pi \_\_ l = 4\pi$, откуда получаем $r =$ __ м.

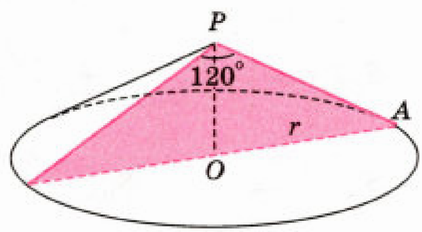
Из прямоугольного треугольника POA находим: $h = \sqrt{l^2 - \_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_}$ (м).

Ответ. $r =$ ______; $h =$ ______

15

Осевое сечение конуса — треугольник со стороной 8 см и прилежащим углом 120°. Найдите площадь полной поверхности конуса.

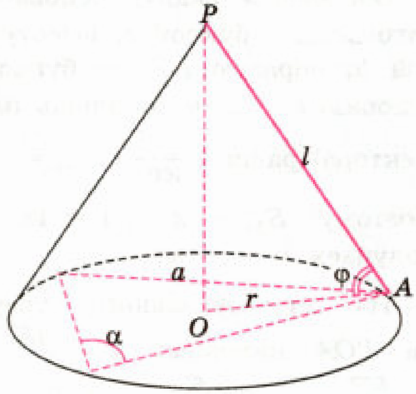
Решение.



Осевым сечением конуса является ______________________ треугольник. По условию задачи один из углов этого треугольника равен ______, следовательно, это угол, противолежащий ________ стороне треугольника, а потому боковые стороны треугольника равны __ см, т. е. образующая l конуса равна __ см. Из прямоугольного треугольника POA находим радиус основания конуса: $r = l \cdot \_\_\_\_ = \_\_ \frac{\sqrt{3}}{2} = \_\_\_\_$ (см). Таким образом, $S_{бок} = \pi \_\_\_\_ =$
$= \_\_ \cdot 4\sqrt{3} \cdot \_\_ = \_\_\_\_\_\_$ (см^2), $S_{кон} = S_{бок} + \_\_\_\_ = \_\_\_\_ +$
$+ (\_\_\_\_)^2 \pi = 16 (\_\_\_\_) \pi$ (см^2).

Ответ. ____________

16



Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом φ. В основание конуса вписан треугольник, у которого одна сторона равна a, а противолежащий угол равен α. Найдите площадь полной поверхности конуса. (Задача **363** учебника.)

Решение.

1) Находим радиус основания конуса: $r = \dfrac{\underline{\qquad}}{2\sin\alpha}$.

2) Из прямоугольного треугольника POA находим образующую: $l = PA = \dfrac{\underline{\qquad}}{\cos\varphi} =$

$= \dfrac{a}{2\sin\alpha \cdot \underline{\qquad}}$

3) $S_{бок} = \pi \underline{\qquad} = \dfrac{\underline{\qquad}}{4\sin^2\alpha\cos\varphi}$,

$S_{осн} = \pi \underline{\qquad} = \dfrac{\pi a^2}{\underline{\qquad}}$,

$S_{кон} = \underline{\qquad} + S_{осн} = \dfrac{\pi a^2}{\underline{\qquad}} + \dfrac{\underline{\qquad}}{4\sin^2\alpha} = \underline{\qquad}\left(\dfrac{1}{\cos\varphi} + 1\right)$.

Ответ. ____________________

17

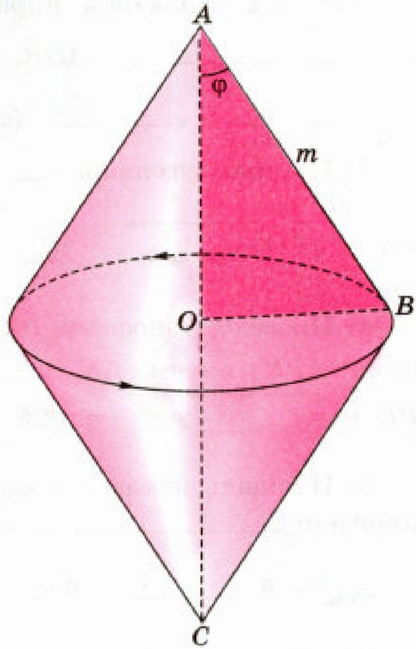
Равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна m, а угол при основании равен φ, вращается вокруг основания. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении треугольника. (Задача **365** учебника.)

Решение.

1) Тело, полученное при вращении равнобедренного треугольника ABC вокруг основания AC, состоит из двух ______________ с общим основанием, радиусом которого служит отрезок ____ . Искомая площадь равна удвоенной площади __________ поверхности конуса: $S =$ __ $S_{бок} =$ ____ $OB \cdot$ ____

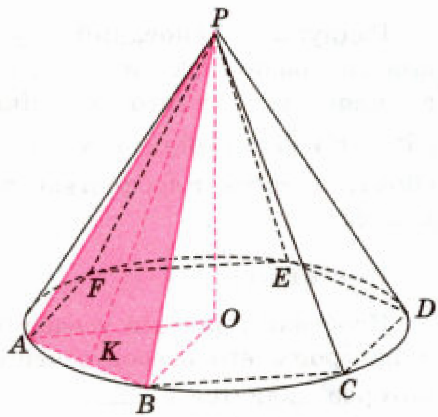
2) В прямоугольном треугольнике AOB $AB =$ __ , $OB =$ __ $\cdot \sin\varphi$. Следовательно, $S =$ ____ $\cdot m \cdot$ __________ $=$
$=$ __________ $\sin\varphi$.

Ответ. ________________



18

Высота конуса равна 4 см, а радиус основания равен 3 см. Вычислите площадь полной поверхности правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в конус. (Задача **412в** учебника.)



Решение.

1) Пирамида вписана в конус, если её основание вписано в основание ______________, а вершина пирамиды совпадает с ________________ конуса. Пусть правильная шестиугольная ________________ $PABCDEF$ вписана в ___________ с высотой PO. По условию $PO =$ __ см, $OA = OB =$ __ см.

2) Сторона правильного шестиугольника равна радиусу ______________________ около него ______________________ , поэтому $AB =$ _____ $=$ ____ см.

Площадь основания пирамиды $S_{осн}$ в ____ раз больше площади ____________________ AOB, т. е. $S_{осн} = 6$ ________ $=$ __ $OA^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\_\_}$ $=$ $=$ __________ $=$ __________ (см^2).

3) Из прямоугольного __________________________ POA находим:

$PA = \sqrt{PO^2 + \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_$ (см).

4) Проведём апофему PK пирамиды. В прямоугольном треугольнике APK имеем $AK =$ ___ $AB =$ ___ см, $PA =$ ___ см. Поэтому $PK = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ - AK^2} = \sqrt{25 - \_\_\_} = \_\_\_\_\_$ (см).

5) Площадь боковой поверхности $S_{бок}$ пирамиды в __ раз больше площади ________________ грани PAB, поэтому

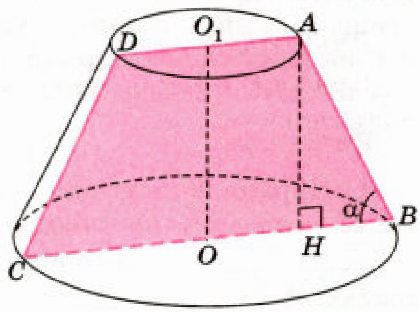
$S_{бок} = 6$ _______ $= 6 \cdot$ __ $AB \cdot$ _____ $=$ _____ $\frac{\sqrt{91}}{\_\_}$ $=$ ______ (см^2),

$S_{пир} = S_{бок} + S_{осн} =$ ____________ $= 4{,}5(\sqrt{91} +$ _____$)$ (см^2).

Ответ. _________

19

Радиусы оснований усечённого конуса равны R и r, где $R > r$, а площадь осевого сечения равна $(R^2 - r^2)\sqrt{3}$. Найдите угол α между образующей и плоскостью основания конуса.



Решение.

Изобразим данный усечённый конус и построим его осевое сечение $ABCD$, которое является _____________ трапецией. По условию задачи $O_1A =$ ___ , $OB =$ ____

1) Проведём $AH \parallel OO_1$. Тогда AH — перпендикуляр к _______________ основания конуса, и, следовательно, $\angle ABH = \alpha$ — угол между _______ AB и _________________ основания.

2) В прямоугольном треугольнике ABH AH = _____ $\operatorname{tg}\alpha$. Так как $HB = OB$ – _____ = _____ – $AO_1 = R$ – ___ , то AH = (___ – ___) $\operatorname{tg}\alpha$.

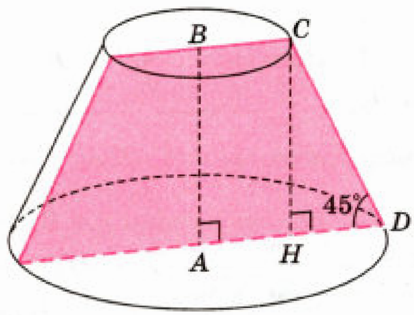
3) $S_{ABCD} = \dfrac{BC + \_\_\_}{2} \cdot AH = \dfrac{2R + \_\_\_}{2}(\_\_ - \_\_)\operatorname{tg}\alpha = (R^2 - \_\_)$ ___

4) По условию задачи S_{ABCD} = (_______) $\sqrt{3}$. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha$ = = _____ , откуда α = _____

Ответ. __________

20

В трапеции $ABCD$ $\angle A = 90°$, $\angle D = 45°$, $BC = 4$ см, $CD = 3\sqrt{2}$ см. Вычислите площади боковой и полной поверхностей усечённого конуса, образованного вращением данной трапеции вокруг стороны AB. (Задача 370 учебника.)



Решение.

При вращении данной трапеции получается _______________ конус.

1) Проведём $CH \perp$ ___ . Тогда HD = = _______ $\cdot \cos 45°$ = $3\sqrt{2}$ $\cdot$ _______ = ___ см, $AD = AH$ + _______ = = _______ + HD = ___ см.

2) $S_{бок} = \pi(BC + \_\_\_) \cdot \_\_\_ = \_\_ (\_\_ + 7) \cdot 3\sqrt{2} = \_\_\pi\sqrt{\_\_}$ (см^2).

3) $S_{полн} = S_{бок} + \pi BC^2$ + _______ = _______ + ______ + 49π = = (_______ + 65) π (см^2).

Ответ. ____________ см^2 и _____________________

В усечённый конус вписана правильная усечённая треугольная пирамида (т. е. основания пирамиды вписаны в основания усечённого конуса). Радиусы оснований усечённого конуса равны 2 см и 5 см, а высота равна 4 см. Вычислите площадь полной поверхности пирамиды. (Задача **424**а учебника.)

Решение.

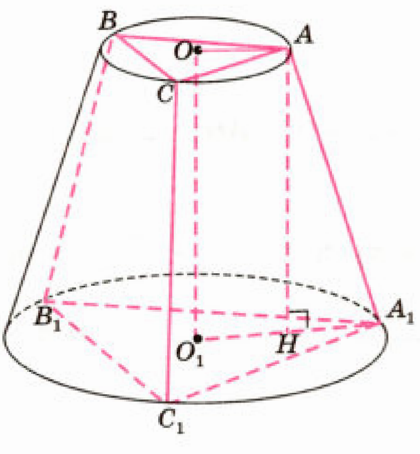
Пусть правильная усечённая пирамида $ABCA_1B_1C_1$ вписана в усечённый конус с осью OO_1 (см. рис. *а*). По условию задачи OA = __ см, O_1A_1 = __ см, OO_1 = __ см.

1) Радиус OA окружности, описанной около правильного ________________ ABC, выражается через сторону AB формулой $OA = AB\,\frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $AB = OA \cdot \sqrt{\_\_}$ = ______ (см), $S_{ABC} = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\_\_}$ = ______ (см^2).

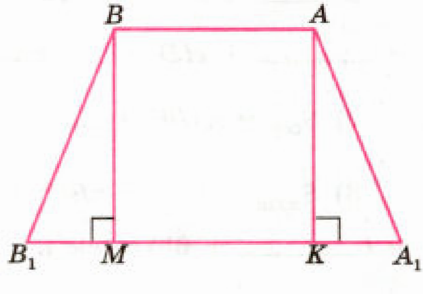
Аналогично получаем A_1B_1 = ______ см, $S_{A_1B_1C_1} = A_1B_1^2 \cdot$ ______ = = ______ (см^2).

2) Проведём $AH \perp O_1A_1$. Тогда $AH = OO_1$ = ______ см, HA_1 = $= O_1A_1 -$ ______ = ______ $- OA$ = ______ = __ (см). В прямоугольном треугольнике AHA_1 $AA_1 = \sqrt{AH^2 + \_\_\_\_}$ = $\sqrt{\_\_\_\_}$ = __ (см).

3) Боковая грань AA_1B_1B усечённой пирамиды (см. рис. *б*) является ________________ трапецией, основания которой равны ____ см и ____ см, а боковая сторона равна __ см.



а)



б)

Проведём в трапеции высоты AK и BM. Тогда $KA_1 = \frac{1}{2}(\_\_\_ - AB) =$ $= \_\_\_\sqrt{3}$ см, $AK = \sqrt{AA_1^2 - \_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_} = \_\_\_\_$ (см).

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{AB + \_\_\_}{2} \cdot \_\_\_\_ = \frac{2\sqrt{3} + \_\_\_}{\_\_\_} \cdot \frac{\sqrt{73}}{\_\_} = \frac{}{\_\_\_\_} \text{ (см}^2\text{)}.$$

4) Площадь боковой поверхности $S_{бок}$ усечённой пирамиды в __ раза больше площади ______ грани, т. е. $S_{бок} = 3S_{AA_1B_1B} =$ ______ см^2.

5) $S_{полн} = S_{ABC} + S_{A_1B_1C_1} + \_\_\_\_ = 3\sqrt{3} + \_\_\_\_ + \_\_\_\_ =$

$= \frac{\_\_\sqrt{3}}{\_\_}\left(\_\_\_ + \_\_\_\sqrt{73}\right)$ (см^2).

Ответ. ______

§ 3 Сфера

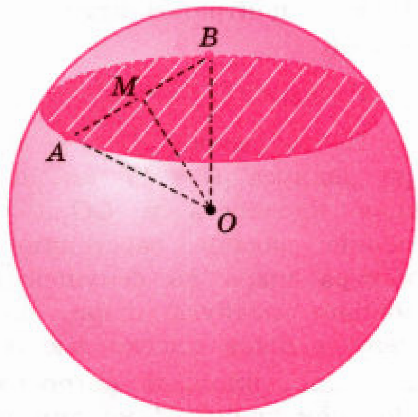
22

Точки A и B лежат на сфере с центром $O \notin AB$, а точка M лежит на отрезке AB. Докажите, что:

а) если M — середина отрезка AB, то $OM \perp AB$;

б) если $OM \perp AB$, то M — середина отрезка AB.

(Задача **372** учебника.)



Доказательство.

а) Пусть точка M — середина отрезка AB, R — радиус сферы. $\triangle AOB$ равнобедренный, так как ________ $= R$, поэтому медиана OM является также ________, т. е. ________ AB.

б) Пусть $OM \perp AB$. Треугольник AOB равнобедренный, и OM — его высота по ________, следовательно, OM — его ________, т. е. M — ________________

23

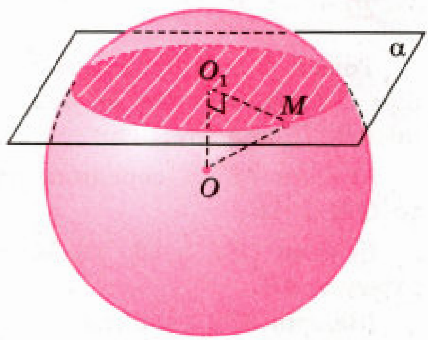
Точки A и B лежат на сфере с центром O, радиус которой равен 15 см. Найдите расстояние от центра сферы до прямой AB, если $\angle AOB = \arccos \frac{3}{5}$.

Решение.

Пусть M — середина отрезка AB (см. рис. к задаче 22), тогда $OM \perp$ ____ (задача 22), и, следовательно, OM — искомое ____. Треугольник OMB прямоугольный ($\angle M =$ ______), поэтому $OM = OB \cdot \cos \angle$ ______, $\angle BOM = \frac{1}{2} \angle$ ________. По условию $\cos \angle AOB = \frac{3}{5}$, следовательно, $\cos \frac{1}{2} \angle AOB =$ __________________ (так как $\cos^2 \frac{\alpha}{2} =$ ______). Итак, $OM =$ ________________________ (см).

Ответ. _____ см.

24



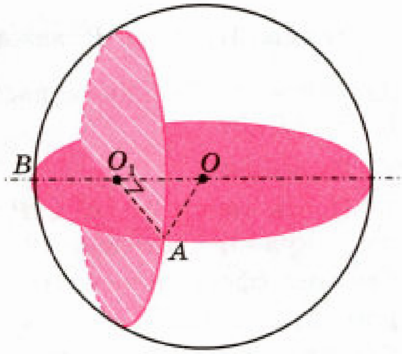
Шар радиуса 17 см пересечён плоскостью, находящейся на расстоянии 8 см от центра. Найдите площадь сечения.

Решение.

Пусть точка O — центр шара радиуса $R = 17$ см, α — секущая плоскость и $OO_1 \perp \alpha$. По условию задачи расстояние OO_1 от центра шара до секущей плоскости меньше радиуса шара, поэтому сечением шара плоскостью α является ______, площадь которого $S =$ __ r^2, где __ — радиус сечения. Возьмём точку M на линии пересечения сферы и плоскости α, тогда треугольник OO_1M ____ ($\angle O_1 =$ ______, $OM = R =$ ______, $OO_1 =$ ___ см), откуда находим: $O_1M = r =$ _________, $S_{\text{сеч}} =$ ______________

Ответ. _________ см^2.

25



Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к этому радиусу плоскость. Найдите отношение площади полученного сечения к площади большого круга.

Решение.

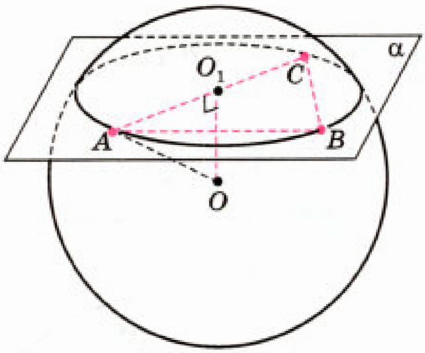
Пусть точка O — центр данного шара, $OB = R$ — его радиус, точка O_1 — середина радиуса OB. Сечение шара плоскостью, перпендикулярной к OB и проходящей через точку O_1, есть ____________ радиусом $r =$ _____ .

Из ____ OO_1A находим:

$r^2 =$ ____________________ . Следовательно, $\dfrac{S_{сеч}}{S_{бол.\ кр}} =$ __________

Ответ. ________

26



Вершины треугольника ABC лежат на сфере. Найдите радиус сферы, если расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно $\sqrt{26}$ см, $AB = 7$ см, $BC = 24$ см, $AC = 25$ см.

Решение.

Пусть точки A, B и C лежат на сфере с центром O. Через точки A, B и C проведём плоскость α, а из точки O — перпендикуляр OO_1 к этой плоскости. Тогда в сечении сферы плоскостью α получим __________________ с центром в __________ O_1, а точки A, B и C будут лежать на ___________________________. Таким образом, точка O_1 является центром окружности, ____________________ около ____________________ . По условию $AC = 25$ см, $BC = 24$ см, $AB = 7$ см, следовательно, треугольник ABC __________________________ (по теореме, обратной ____________________ : $25^2 =$ _______ + _______). Поэтому AC — диаметр окружности с центром O_1, $O_1A =$ ____ см.

Так как $OO_1 \perp \alpha$, то $\triangle AO_1O$ — ______________________ и $R = AO =$ $=$ _______________ $=$ _______________________ $=$ _________ $=$ _____ (см).

Ответ. $R =$ ___________

27

Точки M, N и P лежат на сфере радиуса $\frac{3}{\sqrt{2}}$, $MN = MP = 3$, $\angle NMP = \alpha$. На каком расстоянии от центра сферы находится плоскость MNP?

Решение.

Пусть точки M, N и P лежат на сфере с центром O, OO_1 — перпендикуляр, проведённый из точки O к плоскости MNP (см. рис. *а*). Сечение сферы плоскостью MNP является ________________ с центром ________________, а точки M, N и P лежат на ________________
Следовательно, O_1 — центр ________________________________
около ________________________________

Найдём радиус r этой окружности. С одной стороны, так как $MN = MP$, то треугольник MNP ________________________________ (см. рис. *б*), поэтому NP = ____ MN __________ = __________

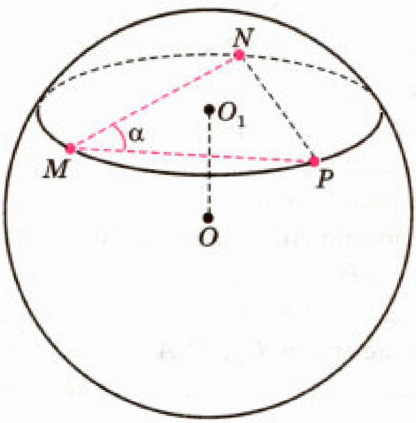
С другой стороны, $\frac{NP}{\sin\alpha} = 2$ ______ (теорема синусов), поэтому

$$r = O_1M = \frac{NP}{\underline{\qquad\qquad}} = \frac{\underline{\qquad\qquad}}{\underline{\qquad\qquad}} = \underline{\qquad} \cdot \underline{\qquad} \cos\frac{\alpha}{2} = \underline{\qquad}$$

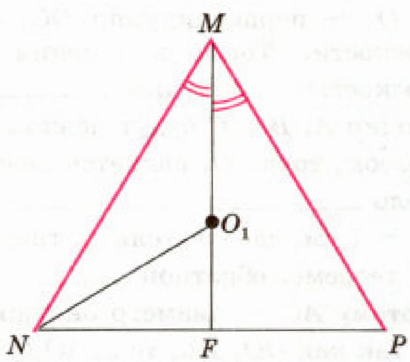
Так как $OO_1 \perp MNP$, то $\triangle MO_1O$ прямоугольный и $O_1O =$

$$= \sqrt{\underline{\qquad\qquad\qquad}} = \frac{\underline{\qquad\qquad}}{\underline{\qquad\qquad}} = \frac{3}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\underline{\qquad\qquad}}{\underline{\qquad\qquad}} = \underline{\qquad}\sqrt{\cos\alpha}.$$

Ответ. ________________



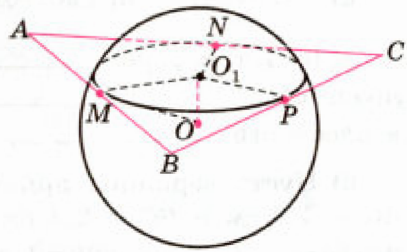
а)



б)

28

Все стороны треугольника ABC касаются сферы с центром O. Найдите радиус сферы, если расстояние от её центра до плоскости ABC равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см, $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $AC = 7$ см.



Решение.

Пусть M, N и P — точки касания сферы со сторонами треугольника ABC, OO_1 — перпендикуляр, проведённый из центра сферы к плоскости ABC. Сечением сферы плоскостью ABC является окружность с центром O_1, вписанная в ______________________

Найдём радиус этой окружности. С одной стороны,

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)\_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ \text{ (см}^2\text{)}.$$

С другой стороны, $S_{ABC} = p \cdot r$, где p — ______________________, а r — ____. Поэтому $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ = __________, откуда r = _____ см.

Так как $OO_1 \perp ABC$, то треугольник OO_1M ______________________ ($\angle O_1 = 90°$, OO_1 = ________ см, O_1M = ________ см), поэтому $R = OM$ = ______________ = __________ = ________ (см).

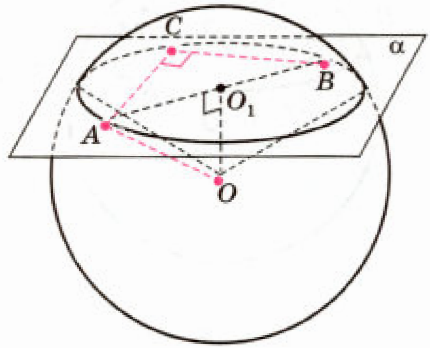
Ответ. ________ см.

29

Вершины прямоугольного треугольника с катетами 1,8 см и 2,4 см лежат на сфере.

а) Докажите, что если радиус сферы равен 1,5 см, то центр сферы лежит в плоскости треугольника.

б) Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 6,5 см. (Задача **415** учебника.)



Решение.

а) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $\sqrt{\_\_\_ + \_\_\_}$ =

= ___ (см), т. е. равна ______________________ сферы. Поэтому центр сферы является ________________________ гипотенузы и, следовательно, лежит в плоскости ____________________________________

б) Пусть вершины прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 1{,}8$ см и $BC = 2{,}4$ см лежат на сфере с центром O, OO_1 — перпендикуляр, проведённый из точки O к плоскости ABC. Сечение сферы этой плоскостью является ______________________________ с центром _____________, а прямоугольный треугольник ABC _____________ в эту окружность. Следовательно, точка O_1 — _____________ гипотенузы AB, а так как AB = ___________ = ___________ = ___________ = ____ (см), то AO_1 = _____________

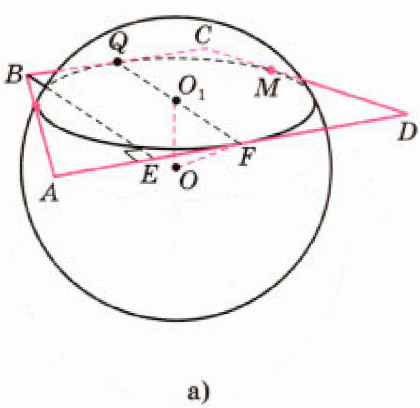
Так как $OO_1 \perp \alpha$, то треугольник AO_1O ______________________________

и OO_1 = ________________ = __________________ = _______ (см).

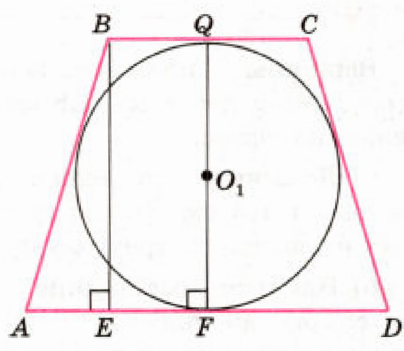
Ответ. б) _______ см.

30

Все стороны равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) касаются сферы, радиус которой равен $a\sqrt{3}$. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости трапеции, если $AB = CD = a\sqrt{5}$, $AD = a(1 + \sqrt{5})$.



а)



б)

Решение.

Пусть стороны трапеции $ABCD$ касаются сферы с центром O и радиусом R, отрезок OO_1 — перпендикуляр, проведённый из точки O к плоскости трапеции. Тогда точки касания сторон трапеции и сферы лежат на окружности, ________________ в эту трапецию, и O_1 — ________________ (см. рис. a). Рассмотрим трапецию $ABCD$ (см. рис. $б$). Пусть r — радиус вписанной в неё окружности, BE — высота трапеции. Так как в трапецию можно вписать окружность, то $2AB$ = ________, откуда BC = ________ = ________

Далее, $AE = \frac{1}{2}$ ________ = ________ = ____

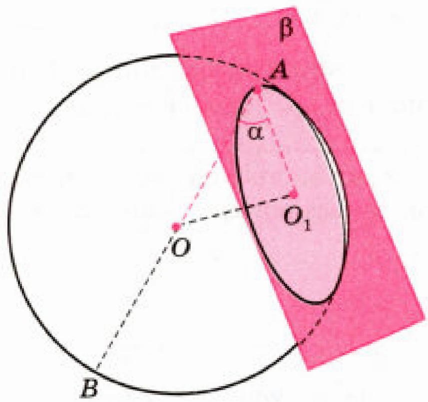
Из ________________ треугольника BEA находим: BE = ____ = ____. Но $BE = 2r$, поэтому $O_1F = r$ = ____. Так как F — точка касания сферы и трапеции, $OO_1 \perp$ ____, то OF = ____ и из ________________ треугольника OO_1F (см. рис. a) находим: OO_1 = ________ = ____

Ответ. ________

31

Секущая плоскость проходит через конец диаметра сферы радиуса R так, что угол между диаметром и плоскостью равен α. Найдите длину окружности, получившейся в сечении. (Задача **384** учебника.)

Решение.

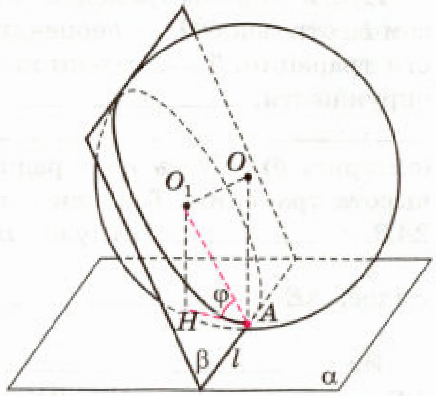


Пусть секущая плоскость β проходит через конец A диаметра AB сферы с центром O и радиусом R, а окружность с центром O_1 и радиусом O_1A является сечением сферы плоскостью β. Тогда $OO_1 \perp$ ____ и $\angle$ ____ $= \alpha$, так как это угол между прямой AB и ________________ ________________ на плоскость β. Из ________________ треугольника OAO_1 находим радиус окружности сечения: AO_1 = ________. Длина этой окружности равна ________________

Ответ. ________

32

Плоскость α касается сферы в точке A. Докажите, что сечения сферы плоскостями, проходящими через точку A и образующими равные углы с плоскостью α, имеют равные радиусы.



Доказательство.

Пусть секущая плоскость β, проведённая через точку A, лежащую на сфере с центром O и радиусом R, образует угол φ с плоскостью α, касающейся этой сферы в точке A. Тогда $OA \perp$ ______. Пусть O_1 — центр, r — радиус полученного сечения, l — линия пересечения плоскостей α и β, O_1H — перпендикуляр к плоскости α.

1) Так как $l \perp O_1A$ (l — ______________ к окружности с центром O_1, O_1A — радиус ______________, проведённый ______________ касания), то $l \perp HA$ (теорема ______________ ______________). Поэтому $\angle$ ________ $= \varphi$ (линейный ________ ______________ между ______________).

2) Поскольку $OA \perp \alpha$ и $O_1H \perp \alpha$, то OA __ O_1H, и, следовательно, отрезки AH, O_1A и OA лежат в одной ______________, а значит, $\angle OAO_1 =$ ________

3) Из ______________ треугольника AO_1O получаем $r = O_1A =$ ______________ $=$ ________

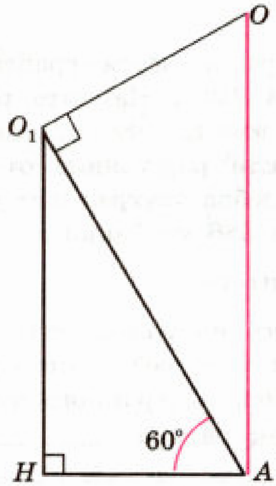
Итак, радиус окружности, полученной в сечении сферы плоскостью β, зависит лишь от радиуса ________ и угла между ______________. Отсюда следует, что сечения сферы плоскостями, проходящими через точку A и образующими равные углы с плоскостью α, имеют равные радиусы.

33

Через точку A сферы проведены две плоскости, одна из которых является касательной к сфере, а другая наклонена под углом в 60° к касательной плоскости. Найдите расстояние от центра сферы до секущей плоскости, если радиус сферы равен 13 см.

Решение.

Пусть секущая плоскость β, проведённая через точку A, лежащую на сфере с центром O и радиусом $OA = 13$ см, образует угол в $60°$ с плоскостью α, касающейся этой сферы в точке A (см. рисунок к задаче 32 и её решение). Рассмотрим плоскость, заданную параллельными прямыми O_1H и OA (см. рис.), где ______ — искомое расстояние от центра сферы до секущей плоскости β. Так как $\angle$ __________ $= 60°$ (по ______________), то $\angle OAO_1 =$ __________ $=$ __________ $=$ $=$ __________ (см).

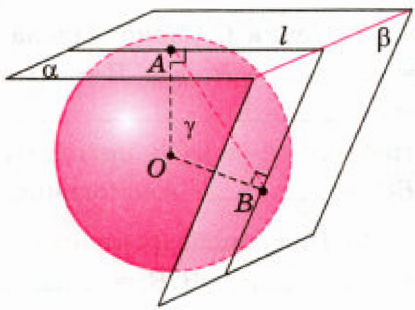


Поэтому в прямоугольном треугольнике _______ $OO_1 =$ _______ $OA =$ $=$ _______ (см).

Ответ. __________ см.

34

Две касательные плоскости к сфере пересекаются по прямой l. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, перпендикулярна l.



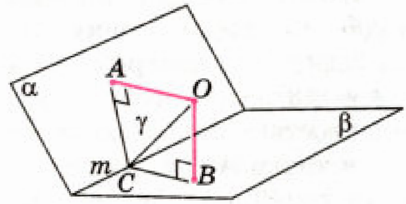
Доказательство.

Пусть A и B — точки касания сферы с центром O и плоскостей α и β, l — линия пересечения этих плоскостей. Тогда $OA \perp \alpha$, $OB \perp \beta$ (так как радиус, проведённый в __________ касания сферы и ______________________________ к этой плоскости). Через пересекающиеся прямые OA и OB проведём плоскость γ. Так как $OA \perp \alpha$, то прямая OA перпендикулярна к любой _______________, лежащей ______________________, и, следовательно, $OA \perp l$. Аналогично $OB \perp$ __

Таким образом, прямая l перпендикулярна к двум пересекающимся прямым (______ и ______), лежащим ____________________ γ. Поэтому $l \perp$ __, а так как прямая AB лежит ____________________, то $l \perp$ ________

35

Сфера касается граней двугранного угла $120°$. Найдите радиус сферы и расстояние между точками касания, если расстояние от центра сферы до ребра двугранного угла равно a. (Задача **386** учебника.)



Решение.

Пусть полуплоскости α и β — грани данного двугранного угла, прямая m — ребро этого угла, а точка O — центр сферы, касающейся граней двугранного угла в точках A и B. Тогда $OA \perp \alpha$, $OB \perp \beta$ (так как радиус, ____

____

____).

Проведём через пересекающиеся прямые OA и OB плоскость γ. Она пересечёт ребро m в некоторой точке C.

1) $m \perp OA$, так как OA ________ , аналогично m ________ , поэтому $m \perp \gamma$ (по признаку ____

______________________________). Отсюда следует, что угол ACB линейный ____ , т. е. $\angle ACB =$ ______ ,

а $OC =$ ______

2) Точка O равноудалена от сторон угла ACB, так как ________ = = ______ $= R$, где R — радиус сферы, следовательно, она лежит на его ______________________ , т. е. $\angle OCB =$ ____ . Из ______________ треугольника OCB находим: $OB = R =$ ______________ = ________ , $BC =$ ________ . Аналогично получаем $AC =$ ______

3) Из равнобедренного треугольника ACB, в котором $AC =$ ______ = = ______ , $\angle ACB =$ __________ , находим: $AB = 2 \cdot AC \cdot \sin$ ______ = = ________

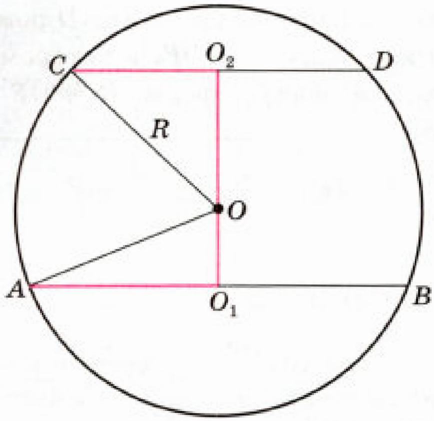
Ответ. ______ , ______

36

Радиусы двух параллельных сечений сферы, расположенных по разные стороны от её центра, равны 3 см и 4 см. Расстояние между секущими плоскостями равно 7 см. Найдите площадь сферы.

Решение.

Рассмотрим сечение сферы радиуса R плоскостью, проходящей через её центр O и перпендикулярной секущим плоскостям. В сечении получим окружность с центром O и радиусом R (окружность большого ____________), хорды AB и CD которой — диаметры __________________________, причём $AB \parallel$ _____ . Пусть $OO_1 \perp AB$, $OO_2 \perp CD$, тогда OA = __________ = __________ , $O_1A = 4$ см, $O_2C = 3$ см, $O_1O_2 = 7$ см.



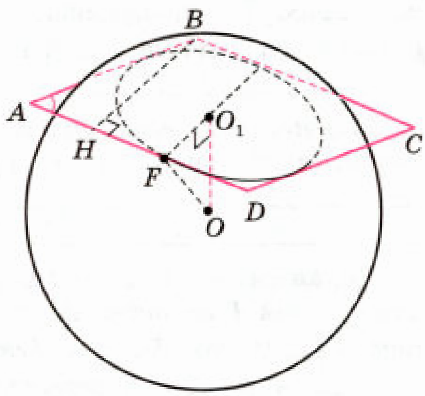
Пусть $OO_1 = x$ (см), тогда $OO_2 =$ = ______ (см). Из ____________________ треугольников AO_1O и CO_2O получаем R^2 = _________ + _________ и R^2 = _________ + _________ , откуда $x^2 + 16$ = _________ и x = _____

Итак, OO_1 = _____ см, поэтому R = ______ см, $S_{\text{сферы}}$ = _________ = = __________ = __________ (см^2).

Ответ. __________ см^2.

37

Все стороны ромба касаются сферы. Сторона ромба равна 2 см, а угол равен 60°. Расстояние от центра сферы до плоскости ромба равно $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь сферы.



Решение.

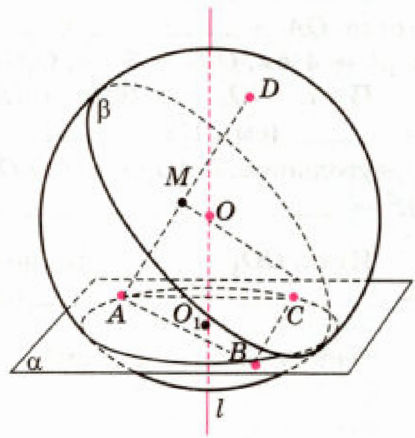
Пусть стороны ромба $ABCD$ касаются сферы с центром O и радиусом R, отрезок OO_1 — перпендикуляр, проведённый из точки O к плоскости ромба. Тогда точки касания сторон ромба и сферы лежат на окружности, __________________ в этот ромб, и O_1 — центр ____________________ . Проведём высоту BH ромба. Радиус r вписанной окружности равен ______ BH. Из прямоугольного треугольника ABH находим: $BH = AB \cdot$ __________ = = _________ = _____ (см), следовательно, r = __________ . Пусть F —

точка касания стороны AD ромба и сферы. Из ________________ треугольника O_1OF, в котором OO_1 = ________ см, O_1F = ______ см, находим радиус сферы: $R = OF$ = ____________ = ________ = _______ (см).
$S_{сферы}$ = ___________ = ___________ = ___________ (см^2).

Ответ. __________ см^2.

38

Докажите, что через четыре точки, не лежащие в одной плоскости, проходит сфера, и притом только одна.



Доказательство.

Пусть данные точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Через любые три из них, например через точки A, B и C, проведём плоскость α и в ней отметим точку O_1 — центр окружности,
____
____

Множество всех точек пространства, равноудалённых от точек A, B и C, есть прямая l, проходящая через ___________ окружности, описанной около треугольника _____ , и перпендикулярная ________________
____

Множеством всех точек пространства, равноудалённых от двух точек, например A и D, является плоскость β, перпендикулярная ________________________________ и проходящая через его ________________________

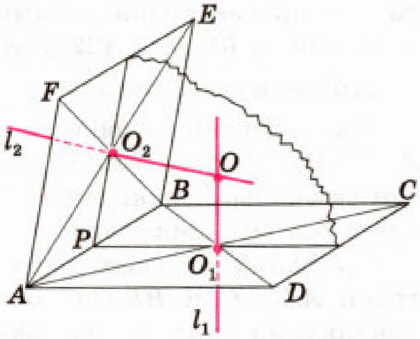
Докажем, что прямая l пересекается с плоскостью β. Предположим, что прямая l не пересекает плоскость β. Тогда $l \parallel \beta$ либо $l \subset \beta$, и так как $l \perp$ __ , то $\beta \perp$ __ . Отсюда следует, что $AD \subset$ __ (поскольку $AD \perp$ __ и $A \in$ __), а значит, все данные точки A, B, C и D лежат в ________________________________, что противоречит условию. Итак, прямая l пересекает плоскость β в некоторой точке O. Точка O равноудалена от ______________ A, ______________ и, следовательно, является центром сферы, проходящей через ______________

Единственность сферы, проходящей через точки A, B, C и D, следует из того, что центр такой сферы лежит как на прямой l, так и в плоскости β и, следовательно, совпадает с точкой O.

39

Два прямоугольника лежат в различных плоскостях и имеют общую сторону. Докажите, что все вершины данных прямоугольников лежат на одной сфере.

Доказательство.



Пусть $ABCD$ и $ABEF$ — данные прямоугольники с общей стороной ______

Множеством всех точек пространства, равноудалённых от вершин прямоугольника $ABCD$, является прямая l_1, перпендикулярная к ______________________________ и проходящая через точку O_1 пересечения ______________________

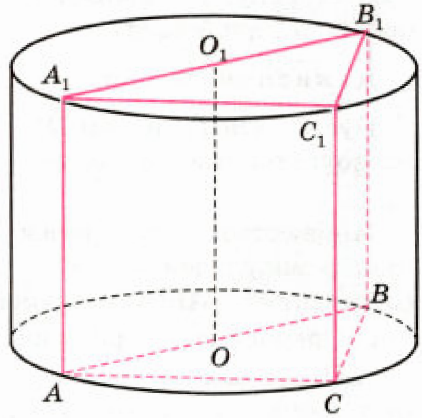
Аналогично множество всех точек пространства, равноудалённых от вершин прямоугольника $ABEF$, есть прямая l_2, перпендикулярная к ____ и проходящая через точку O_2 ______________________

Докажем, что прямые l_1 и l_2 пересекаются. Для этого рассмотрим плоскость O_1PO_2, где точка P — середина __________. В плоскости O_1PO_2 через точки O_1 и O_2 проведём прямые, перпендикулярные соответственно PO_1 и ______. Они пересекаются в некоторой точке O. $AB \perp O_1PO_2$, так как $AB \perp$ ____ и $ABM \perp$ ____. Следовательно, прямая AB __________ прямым O_1O и ____, лежащим в плоскости O_1PO_2. Так как $O_1O \perp PO_1$ и $O_1O \perp$ ______, то $O_1O \perp ABC$ (по признаку ____ ______________________________).

Аналогично доказывается, что $O_2O \perp$ __________. Отсюда следует, что прямые l_1 и O_1O ____________ и также совпадают прямые __________, а это означает, что прямые l_1 и l_2 ______________ в точке ______

Итак, $OD =$ ____ $=$ ____ $=$ ____ $=$ ____ $= OE$, т. е. точка O — центр сферы, проходящей через точки A, ___, ___, ___, ___ и ___

40



Докажите, что если одна из граней вписанной в цилиндр треугольной призмы проходит через ось цилиндра, то две другие грани взаимно перпендикулярны. (Задача **422** учебника.)

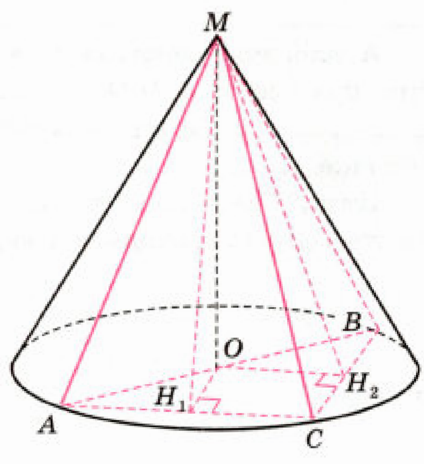
Доказательство.

На рисунке изображена призма $ABCA_1B_1C_1$, вписанная в цилиндр так, что её боковая грань AA_1B_1B проходит через ось OO_1 цилиндра.

Требуется доказать, что боковые грани AA_1C_1C и BB_1C_1C взаимно перпендикулярны, т. е. двугранный угол с ребром CC_1, образованный плоскостями этих граней, — прямой.

Боковые рёбра вписанной призмы являются образующими цилиндра, поэтому они перпендикулярны ______________________, в частности $CC_1 \perp ABC$. Отсюда следует, что $CC_1 \perp CA$ и $CC_1 \perp$ ________, а значит, угол ACB линейный ______________________ ____________. Так как грань AA_1B_1B проходит через точку O, то AB — __________ основания цилиндра. Поэтому $\angle ACB =$ ______, т. е. указанный двугранный угол с ребром CC_1 ______________, что и требовалось доказать.

41



В конус с высотой 12 см вписана треугольная пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Найдите отношение площадей полных поверхностей пирамиды и конуса.

Решение.

На рисунке изображена пирамида $MABC$, вписанная в конус с осью MO так, что её вершина M совпадает с вершиной конуса, а прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 8$ см и $BC = 6$ см вписан в основание конуса.

Отрезок MO — высота конуса, и по условию MO = ________. Так как треугольник ABC ________________________________, то гипотенуза AB является ______________ основания конуса, AB = ____________ и точка O — ______________________ отрезка AB.

Из _______________________________________ треугольника AMO, в котором

MO = __________, AO = __________, находим: $AM = \sqrt{\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_} =$

$= \sqrt{12^2 + \_\_\_\_\_} = 13$ (см).

Боковые рёбра пирамиды MA, ______ и ______ являются ____________________ конуса, поэтому MA = ________ = _________ = __________. Пусть MH_1 и MH_2 — высоты треугольников AMC и _______, тогда

$$MH_1 = \sqrt{AM^2 - \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_ - \_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_ \text{ (см)},$$

$$MH_2 = \sqrt{MB^2 - \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_ - 9} = \_\_\_\_\_\_ \text{ (см)}.$$

$$S_{\text{полн. пир}} = S_{ABC} + \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ =$$

$$= \frac{1}{2}(AC \cdot \_\_\_\_ + AB \cdot \_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_) =$$

$$= \frac{1}{2}(8 \cdot 6 + 10 \cdot 12 + \_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_) =$$

$$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \text{ (см}^2\text{)},$$

$$S_{\text{кон}} = \pi r(\_\_\_ + \_\_\_) = \pi \cdot \_\_\_(\_\_\_ + \_\_\_) = \_\_\_\_\_\_ \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\frac{S_{\text{пир}}}{S_{\text{кон}}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ответ. ______________

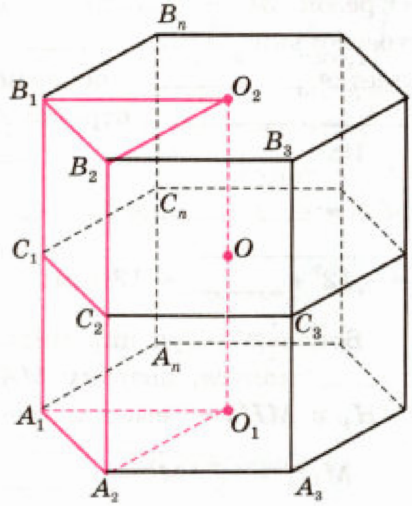
42

Докажите, что если в правильную призму можно вписать сферу, то центром сферы является середина отрезка, соединяющего центры оснований этой призмы. (Задача **425** учебника.)

Доказательство.

Центр сферы, вписанной в многогранник, в частности в правильную призму, является точкой, равноудалённой от плоскостей всех __________________. Пусть $A_1A_2A_3...A_nB_1B_2B_3...B_n$ — правильная призма, в которую можно вписать сферу, точка O — центр вписанной сферы, O_1 и O_2 — центры оснований призмы.

Так как точка O равноудалена от плоскостей граней $A_1A_2B_2B_1$ и $A_1A_nB_nB_1$, то она лежит в полуплоскости (обозначим её α), делящей пополам ______________________________ угол с ребром ______________. Полуплоскость α проходит через ребро ________ и параллельную ему прямую ________, поскольку углы $A_2A_1A_n$ и $B_2B_1B_n$ являются ______________________________ двугранного угла с ребром ______, а лучи A_1O_1 и B_1O_2 — ______________________________ ______________ этих линейных углов. Точно так же точка O лежит в полуплоскости β, делящей пополам двугранный угол с ребром A_2B_2. Полуплоскости α и β пересекаются по ______________________. Следовательно, точка O лежит на ______________________



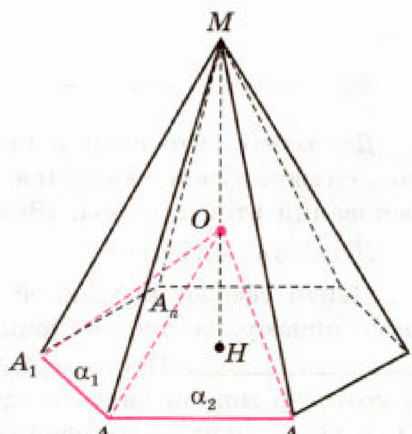
С другой стороны, так как точка O равноудалена от плоскостей оснований призмы, то она лежит в плоскости, параллельной плоскостям оснований и проходящей через ________________ отрезка O_1O_2. Итак, точка O есть ____, что и требовалось доказать.

43

Докажите, что центр сферы, вписанной в правильную пирамиду, лежит на высоте этой пирамиды. (Задача **426** учебника.)

Доказательство.

На рисунке изображена правильная n-угольная пирамида $MA_1A_2...A_n$, MH — её высота. Обозначим через α_1 полуплоскость, делящую пополам двугранный угол пирамиды при ребре A_1A_2; через α_2 — полуплоскость, делящую пополам ______________________________ ______________________ при ребре A_2A_3; ...;



через α_n — ____

______________________________. В силу правильности пирамиды каждая из этих полуплоскостей пересекается с высотой MH в ______________________________ (обозначим её O). Следовательно, точка O равноудалена от всех ______________________________ и потому является ____

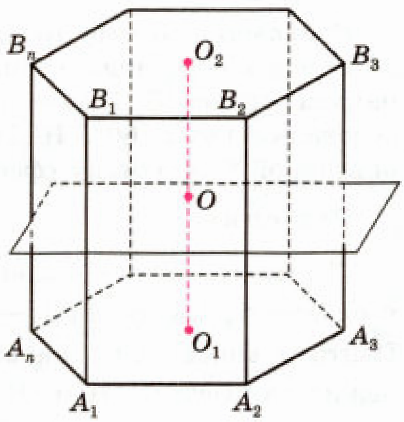
Точка O — единственная общая точка полуплоскостей α_1, ________ В самом деле, α_1 и α_2 пересекаются по лучу ______, а луч A_2O имеет с полуплоскостью α_3 только __________________ точку — точку O. Итак, в правильную пирамиду можно ______________________________, причём центр вписанной сферы лежит ______________________________

44

Докажите, что центр сферы, описанной около:

а) правильной призмы, лежит на середине отрезка, соединяющего центры оснований призмы;

б) правильной пирамиды, лежит на высоте пирамиды или её продолжении. (Задача **430** учебника.)



Доказательство.

Центр сферы, описанной около многогранника, является точкой, равноудалённой от всех ______________

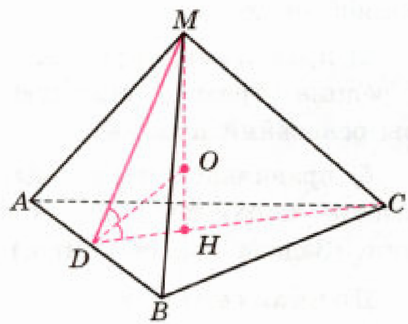
а) Пусть $A_1A_2A_3 \ldots A_nB_1B_2 \ldots B_n$ — правильная призма, точки O_1 и O_2 — центры её оснований. Множеством всех точек пространства, равноудалённых от вершин основания $A_1A_2 \ldots A_n$, является ____________, проходящая через ____________ и перпендикулярная __________________ этого основания, т. е. прямая ________. Эта же прямая является множеством всех точек пространства, равноудалённых от ______________________________ Следовательно, центр сферы, описанной около правильной призмы, лежит на ____________________

Множеством всех точек пространства, равноудалённых от точек A_1 и B_1, является ______________, проходящая через ______________ ______________ и перпендикулярная ______________. Эта плоскость пересекается с отрезком O_1O_2 в его ______________. Таким образом, центром сферы, описанной около ______________, является ______________

б) Множеством всех точек пространства, равноудалённых от вершин основания правильной пирамиды, является ______________, проходящая через ______________ и ______________ ______________. Эта прямая содержит ______________ пирамиды, поэтому центр описанной ______________ ______________ сферы лежит ______________ или ______________

45

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен $60°$. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы.



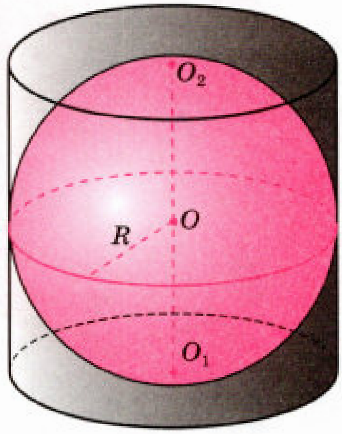
Решение.

Пусть $MABC$ — правильная треугольная пирамида, MH — её высота. Центр O вписанной в пирамиду сферы лежит на высоте MH и $OH = r$ — искомый ______________. Пусть $CD \perp AB$, тогда $H \in$ ______ и $\angle MDC$ — линейный ______________ при ребре AB. По условию он равен ______________. Так как точка O — центр вписанной сферы, то она является точкой пересечения полуплоскости, делящей пополам ______________ при ребре AB, и её высоты MH. Поэтому луч DO — ______________ угла MDC и $\angle ODH =$ ______________. Из ______________ треугольника ______________ находим радиус сферы: $OH =$ ______________ $=$
$=$ ______________

Ответ. ______________

46

Сфера вписана в цилиндр (т. е. она касается оснований цилиндра и каждой его образующей). Найдите отношение площади сферы к площади полной поверхности цилиндра. (Задача **435** учебника.)



Решение.

На рисунке изображена сфера с центром O и радиусом R, вписанная в цилиндр с осью O_1O_2 (точки O_1 и O_2 — центры ______________________________). Центр сферы делит отрезок O_1O_2 ______________.
OO_1 = ______________ = ______________.
Плоскость, проходящая через центр сферы O и перпендикулярная оси цилиндра O_1O_2, пересекает сферу по ______________ ______________________________, а боковую поверхность цилиндра — по окружности, равной ______________________________________. Таким образом, радиус основания цилиндра равен _____, а высота цилиндра равна _______. Так как $S_{сферы}$ = __________, $S_{полн.\ цил}$ = ______________ = = ________________, то $S_{сферы} : S_{полн.\ цил}$ = ________ : ________ = _________

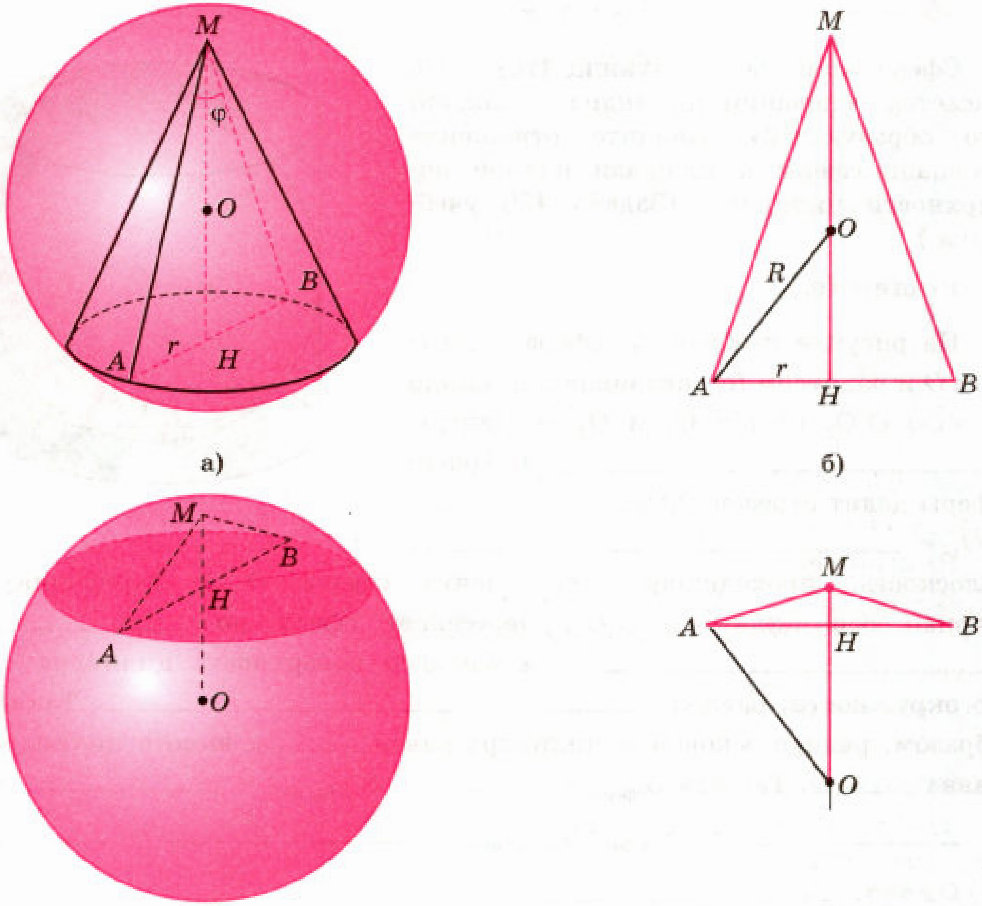
Ответ. ______________________

47

Конус с углом φ при вершине осевого сечения и радиусом основания r вписан в сферу радиуса R (т. е. вершина конуса лежит на сфере, а основание конуса является сечением сферы). Найдите угол φ, если $R = 2r$. (Задача **439**в учебника.)

Решение.

На рисунке изображён конус с высотой MH, вписанный в сферу с центром O и радиусом R. Так как отрезок MH перпендикулярен к плоскости ______________________________ и отрезок OH, соединяющий центр ____________ с центром сечения ____________________________________ ______________________________, перпендикулярен к плоскости основания, то прямые ________ и ________ совпадают, а значит, $O \in$ ______________.
Возможны два случая:



а) б) в) г)

1) точка O лежит между точками M и ____ (см. рис. *а* и *б*);

2) точка H лежит между точками ____ и ____ (см. рис. *в* и *г*).

1) Рассмотрим осевое сечение конуса — ______________ треугольник _____ (см. рис. *б*). В этом треугольнике $\angle AMB$ = ________, поэтому $\angle AMH$ = ______, а так как OM = ______ $= R$, то $\angle OAM$ = $= \angle$ _______ = ______. Угол AOH — внешний угол _________ AOM, поэтому $\angle AOH$ = ________ + ________ = _______. В ____________ ____________ треугольнике AOH AO = ____, AH = ____, а так как по условию R = ______, то $\dfrac{AH}{AO}$ = ________ = $\dfrac{1}{2}$. Следовательно,

$\angle AOH$ = ______, т. е. φ = ______

2) Второй случай рассмотрите самостоятельно.

Ответ. ______________

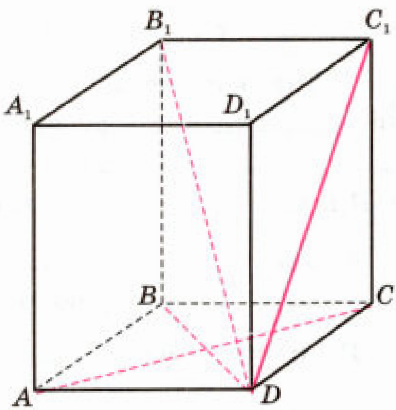
Глава V

Объёмы тел

§ 1 Объём прямоугольного параллелепипеда

48

Найдите объём прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $AC = 15$ см, $DC_1 = 4\sqrt{13}$ см, $DB_1 = 17$ см.



Решение.

Пусть V — искомый объём, тогда $V = AB \cdot AD \cdot AA_1$. Из определения прямоугольного параллелепипеда следует, что его боковые рёбра ____________ к плоскости основания, а основанием является ____________________

1) $\triangle B_1BD$ — __________________, так как B_1B __________ ABC, причём BD = _____ = _____ см, DB_1 = _____ см. По теореме ______________ BB_1 = ________________ = __________ (см).

2) $\triangle B_1C_1D$ — ______________________, так как B_1C_1 __________, причём DC_1 = ________ см, B_1D = _____ = _____ см. Следовательно, B_1C_1 = __________ = ________ (см).

3) $\triangle BAD$ — __________________ и BD = _____ = _____ см, AD = = _______ = _______ см, поэтому AB = _________ = _________ (см).

Итак, $V = AB \cdot$ _____________ = _____________ = _______ (см^3).

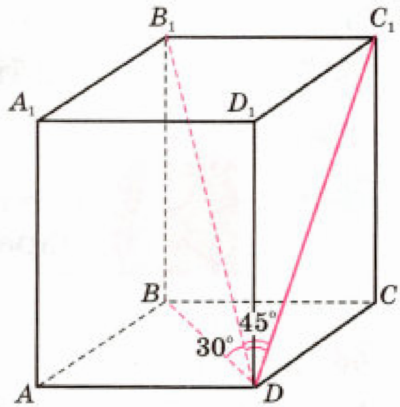
Ответ. _______ см^3.

49

Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, если известно, что его диагональ равна $4\sqrt{2}$ см и составляет с плоскостью основания угол в 30°, а с плоскостью боковой грани угол в 45°.

Решение.

На рисунке изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



1) Так как прямая BD — проекция прямой ______ на ________________, то $\angle B_1DB$ = ______

Из ________________ треугольника B_1DB находим: BB_1 = ______ = = ______ (см), $BD = 4\sqrt{2}$ · ______ = = ______ (см).

2) Так как прямая C_1D — проекция ______ на плоскость D_1CC_1, то $\angle B_1DC_1$ = ______. Из ________________ треугольника B_1DC_1 находим: B_1C_1 = ______ = = B_1D : ______ = ______ (см).

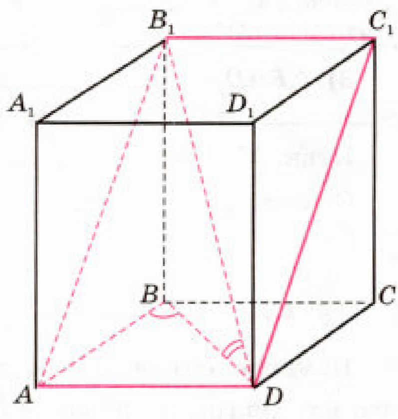
3) $\triangle BAD$ ________________, BD = ______, AD = = ______ = ______ см, поэтому AB = ______ = ______ = ______ (см).

Итак, $V = AB \cdot$ ______ = ______ = ______

Ответ. ______

50

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагональ B_1D составляет с плоскостью основания угол в 45°, а двугранный угол A_1B_1BD равен 60°. Найдите объём параллелепипеда, если диагональ основания равна 12 см. (Задача **449** учебника.)



Решение.

На рисунке изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) По условию $\angle B_1DB = 45°$, поэтому из ________________ $\triangle B_1BD$ находим: BB_1 = ______ = ______

2) $\angle ABD$ — линейный угол ______________________ угла A_1B_1BD (так как $BA \perp$ __________ и $BD \perp$ __________), поэтому $\angle ABD = 60°$, $AB =$ ________ , $AD =$ ________ $=$ ________ (см).

Итак, $V = AB \cdot$ _________ $=$ _________ $=$ ______________________

Ответ. ____________________

51

Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны $\sqrt{5}$ см, $\sqrt{10}$ см и $\sqrt{13}$ см. Найдите объём параллелепипеда.

Решение.

На рисунке к задаче 50 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть $BD = \sqrt{5}$ см, $DC_1 = \sqrt{10}$ см, $BC_1 = \sqrt{13}$ см.

Тогда $\begin{cases} AB^2 + AD^2 = \_\_\_\_\_ \\ AB^2 + CC_1^2 = \_\_\_\_\_ \\ AD^2 + CC_1^2 = \_\_\_\_\_ \end{cases}$. Отсюда

$2AB^2 + 2AD^2 + 2CC_1^2 =$ ___ , $AB^2 + AD^2 + CC_1^2 =$ ___ , $AC_1 =$ ___ см (так как в прямоугольном параллелепипеде ______________________________ ____).

Теперь находим измерения параллелепипеда:

$$AB = \sqrt{AC_1^2 - \_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_ - \_\_\_} = \_\_\_\_ \text{ (см)},$$

$$AD = \sqrt{AC_1^2 - \_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_ - \_\_\_} = \_\_\_\_ \text{ (см)},$$

$$CC_1 = \sqrt{BC_1^2 - \_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_ - \_\_\_} = \_\_\_\_ \text{ (см)}.$$

Итак, $V =$ ____________________ $=$ ______ (см^3).

Ответ. _______ см^3.

52

Сторона основания прямоугольного параллелепипеда равна 4 см и составляет с диагональю основания угол в 30°. Через данную сторону и противолежащую ей сторону другого основания проведено сечение, плоскость которого составляет с плоскостью основания угол в 60°. Найдите объём параллелепипеда.

Решение.

На рисунке к задаче 50 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пусть $AD = 4$ см, $\angle CAD = 30°$. Из прямоугольного треугольника ADC находим: $DC =$ __________ $=$ ________ $=$ $=$ ________ (см). Плоскость сечения, проходящего через рёбра AD и B_1C_1, составляет с плоскостью основания $ABCD$ угол в 60°, поэтому $\angle C_1DC =$ _____ (как ____________ двугранного угла _______). Из ____________________ треугольника CC_1D находим: $CC_1 =$ ____________ $=$ ____________ $=$ _______

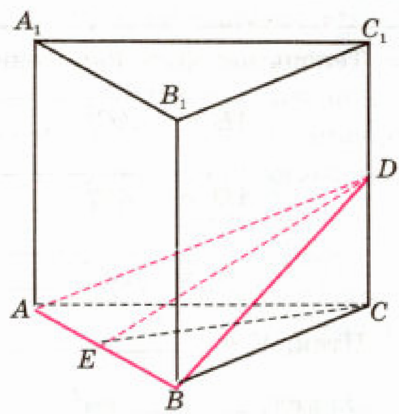
Итак, $V = AD \cdot$ __________ $=$ __________ $=$ ________ (см³).

Ответ. ______ см³.

§ 2 Объём прямой призмы и цилиндра

53

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону AB нижнего основания и середину ребра CC_1 проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в 30°. Найдите объём призмы, если её боковое ребро равно $2b$.



Решение.

На рисунке изображена правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка D — середина ребра CC_1, и $\triangle ADB$ — проведённое сечение. Поскольку призма правильная, то $CC_1 \perp$ _____ и объём V призмы равен $S_{ABC} \cdot$ _____. Так как $AD = BD$ (как гипотенузы равных ____________________ ADC и ______), то треугольник ADB ____________________ Пусть точка E — середина AB. Тогда $DE \perp$ _____ и $CE \perp$ _____, и, следовательно, $\angle DEC$ — __________________ двугранного ________

________ . По условию $\angle DEC$ = ______ , поэтому из __________________
треугольника DCE, в котором DC = ___ , находим: $EC = b$: __________ =
= __________

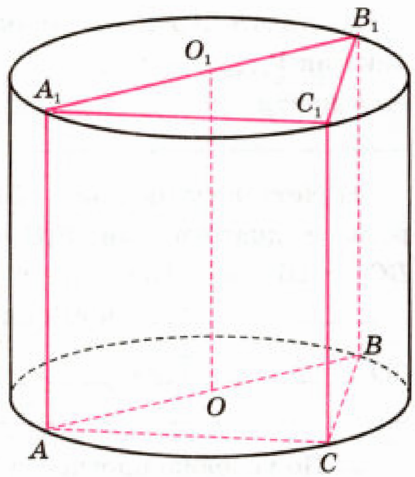
В __________________ треугольнике ACE $\angle ACE$ = ________ , поэтому $AE = EC \cdot$ ____________ = ____ , и, следовательно, $AB = 2$ _____ = _____ ,
S_{ABC} = ________ = ________

Итак, V = __________ $\cdot CC_1$ = __________ $\cdot$ _____ = _________

Ответ. ____________________

54

В цилиндр, площадь осевого сечения которого равна 24 см^2, вписана призма. Основанием призмы является прямоугольный треугольник с катетом, равным $2\sqrt{3}$ см, и прилежащим к нему углом в 30°. Найдите объём цилиндра.



Решение.

На рисунке изображены цилиндр и вписанная в него призма $ABCA_1B_1C_1$. Из определения вписанной в цилиндр призмы следует, что $AA_1 \perp$ _______ , и основания призмы вписаны в _________
____
Имеем: ______________________________
треугольник ABC вписан в окружность основания цилиндра, поэтому его гипотенуза ______________ является
____ , а прямоугольник AA_1B_1B —
осевое ____________________________ . Из треугольника ABC находим:
$AB = AC$: ___________ = ___________ = _________ (см).

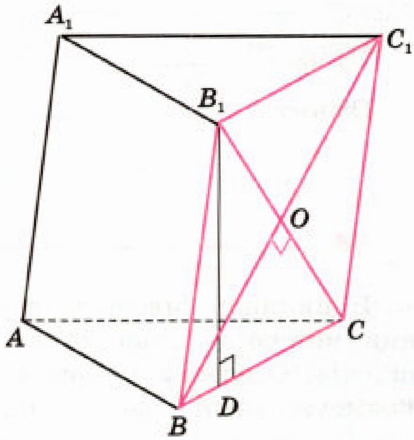
Следовательно, радиус цилиндра r = ______________ = ___________

По условию $S_{AA_1B_1B} = AB \cdot$ ________ = ____ (см^2), откуда AA_1 = ________
$V_{\text{цил}} = \pi \cdot$ ________ = ___________ = ________ (см^3).

Ответ. __________ см^3.

§ 3 Объём наклонной призмы, пирамиды и конуса

55



Найдите объём наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, если известно, что её основания — правильные треугольники, боковая грань BB_1C_1C является ромбом и образует с плоскостью ABC угол в 90°, причём $B_1C = 12$ см, $BC_1 = 16$ см.

Решение.

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — данная призма. Так как $V_{призмы} = S_{осн} \cdot$ ______, то требуется найти ____

1) Четырёхугольник BB_1C_1C — ромб с диагоналями $B_1C = 12$ см и $BC_1 = 16$ см. Поскольку $\triangle BOC$ — ____________________ и его катеты $BO = \frac{1}{2}$ __________ = __________,

$CO =$ __________ = __________, то сторона ромба $BC =$ __________,

$S_{ABC} =$ ____________ = ____________ = ____________ (см²).

2) По условию плоскости BB_1C_1 и ABC __________________________, поэтому высота B_1D ромба BB_1C_1C является и __________________________

Таким образом, надо найти высоту B_1D ромба. В треугольнике BB_1C имеем: $BO \cdot B_1C = BC \cdot$ ____________, откуда $B_1D =$ ____________ = = ________ = _______ (см).

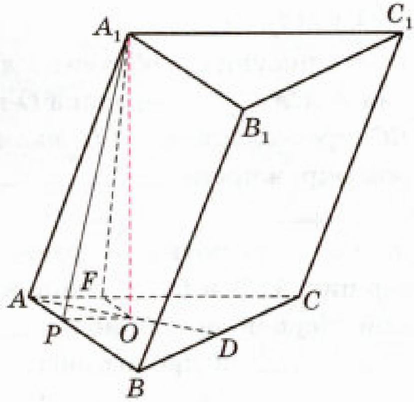
Итак, $V_{призмы} =$ ______________ = ______________ (см³).

Ответ. ________________

56

Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является правильный треугольник со стороной $AB = 6$ см, $\angle A_1AB = \angle A_1AC = 60°$, $AA_1 = 8$ см. Найдите объём призмы.

Р е ш е н и е.



На рисунке изображена данная наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$. Её объём вычисляется по формуле $V = S \cdot H$, где S — площадь треугольника ______ , H — ______________ . Так как по условию $\triangle ABC$ — правильный, то его площадь $S =$ ______________ $=$ ________________ $=$ $=$ ________ (см^2). Остаётся найти ______

____

Пусть $A_1O \perp ABC$, $OP \perp AB$, $OF \perp AC$, тогда по теореме ____ $A_1P \perp$ _________ и $A_1F \perp$ _________

$\triangle APA_1 =$ __________ по гипотенузе (AA_1 — ___________ гипотенуза) и острому углу ($\angle A_1AP =$ __________ $=$ __________ по условию), поэтому $OP =$ __________ , и, следовательно, луч AO — ____________________________ ____________ , а значит, $\angle OAP =$ _________

Из ____________________________ треугольников A_1AP, APO и A_1AO находим последовательно: $AP = AA_1 \cdot$ _________________ $=$ ___________ $=$ $=$ __________ см, $AO = AP \cdot$ __________ $=$ __________ $=$ _______________ см и $A_1O = \sqrt{\qquad\qquad}$ $=$ ________________ $=$ ____________ см.

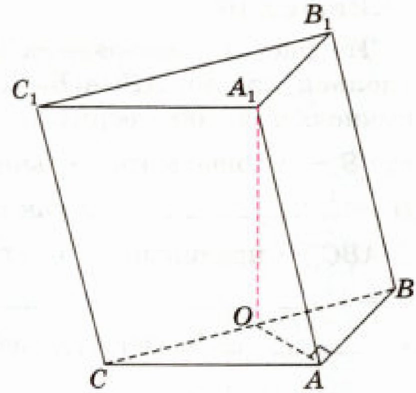
Итак, $V =$ ________________ $=$ __________ (см^3).

О т в е т. ___________ см^3.

57

Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 7$ см и $AC = 24$ см. Вершина A_1 равноудалена от вершин A, B и C. Найдите объём призмы, если ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол в $45°$. (Задача **472** учебника.)

Решение.



На рисунке изображена данная призма $ABCA_1B_1C_1$. Середина O гипотенузы BC треугольника ABC является центром окружности, ____________________________ ____. Так как по условию точка A_1 равноудалена от вершин A, B и C, то она лежит на прямой, перпендикулярной к ____________________ ____________________ и проходящей через центр ____ ____ — точку O, поэтому $A_1O \perp$ ____________, т. е. A_1O — ____ призмы.

Объём призмы вычисляется по формуле $V = S_{ABC} \cdot A_1O$, следовательно, нужно найти S_{ABC} и A_1O.

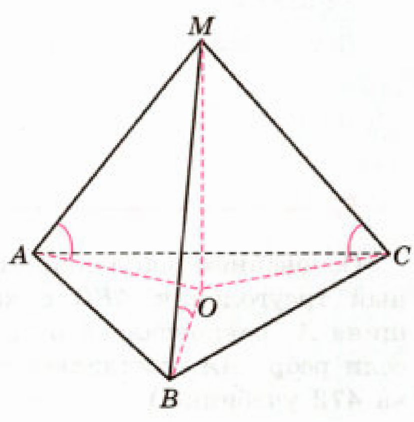
$S_{ABC} = \frac{1}{2}$ ____________________ = ____________________ = __________ (см^2).

Из ____________________________ треугольника AOA_1 найдём высоту A_1O. Так как прямая AO — проекция ____________________________ на плоскость ____________, то $\angle A_1AO$ — угол между __________________________ и плоскостью ____________. По ________________ $\angle A_1AO = 45°$, поэтому A_1O = _______ = _______ CB = _______ (см).

Итак, V = ____________ = ____________ (см^3).

Ответ. ______________ см^3.

58



В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник со сторонами 10, 10 и 12 см. Боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объём пирамиды.

Решение.

Пусть $MABC$ — данная пирамида, отрезок MO — её высота. Тогда $\angle MAO$ = ____________ = ____________ = ________ и ____ треугольники MAO, MBO и ____________ равны по

________ (MO — __________________) и __________________________ углу, поэтому OA = _____ = _____, а значит, точка O — центр ____ и $R = OA$ — её радиус.

Искомый объём ______________________ вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot$ ____

Площадь треугольника ABC находим по формуле Герона:

$S_{ABC} = \sqrt{p \cdot \_\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$ (см^2).

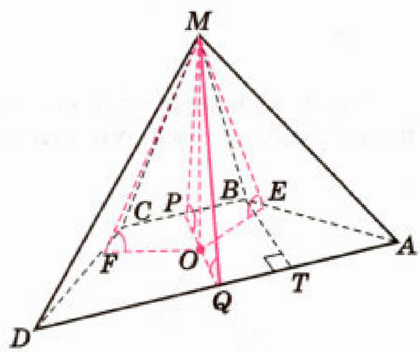
Далее найдём R, воспользовавшись формулой $R = (abc)$: ____________, и получаем R = ______ см.

Из ________________________ треугольника MAO находим ______ $MO = R \cdot$ ________ = ______ (см).

Итак, V = ______________ = ______________ = _______ (см^3).

Ответ. _________ см^3.

59



В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция с углом в 30°. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом 60°, высота пирамиды равна $3\sqrt{3}$ см. Найдите объём пирамиды.

Решение.

Пусть $MABCD$ — данная пирамида, отрезок MO — её высота, ME, MP, MF, MQ — высоты боковых граней. Тогда $OE \perp$ _____, $OP \perp$ _____, $OF \perp$ _____, $OQ \perp$ _____ (по теореме о __________________________), и, следовательно, $\angle MEO$ = _______ = = _________ = _________ = ______ (как ____________ углы _____ __________ углов между ____________________________________ ________). ___________________________ треугольники MOE, MOP, _______ и _______ равны по катету (MO — __________________) и

______________________________, поэтому OE = ______ = ______ =
= ______. Отсюда следует, что окружность с центром O радиуса ____ является ______________________________

Из ______________________________ треугольника MOP находим: $OP = MO \cdot$ ______ = ______ = _____ (см).

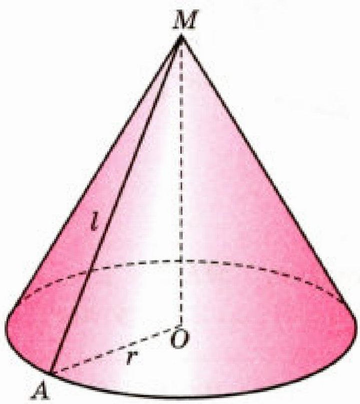
Пусть BT — высота трапеции, тогда BT = ______ $= 2 \cdot$ ___ $= 6$ (см). Из ____________________ треугольника ABT, в котором $\angle A$ = _____ , находим: $AB = 2 \cdot$ _____ $= 12$ см.

Так как в равнобедренную трапецию $ABCD$ можно вписать ______________________________, то $BC + AD = 2 \cdot$ ____ $= 24$ (см). Следовательно,
S_{ABCD} = _______________ $\cdot BT$ = ________ $\cdot$ ________ = ______ (см^2),
$V_{MABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot$ ____ = __________ = ________ (см^3).

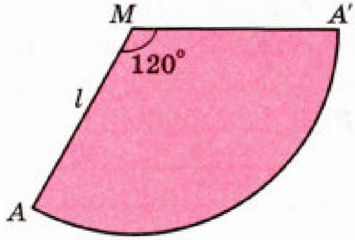
Ответ. ________ см^3.

60

Угол в развёртке боковой поверхности конуса равен 120°, а площадь боковой поверхности конуса равна 24π. Найдите объём конуса.



а)



б)

Решение.

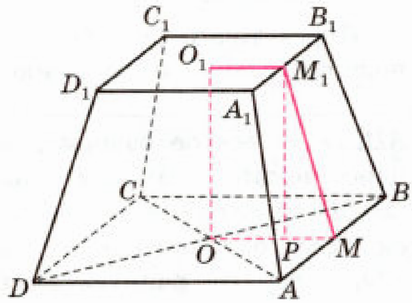
Данный конус с вершиной M и высотой MO изображён на рисунке *а*, развёртка его боковой поверхности — на рисунке *б*. Пусть образующая конуса равна l, а радиус основания равен r. Тогда по __________ $S_{бок} = \pi$ _______ $= 24\pi$, откуда $rl =$ _______. С другой стороны, $S_{бок} = S_{развёртки} = \frac{\pi}{360°} \cdot$ __________ $=$ _________ $l^2 = 24\pi$. Отсюда получаем: $l =$ ________, $r = 24 :$ ________ $=$ ________

Из ___________________________ треугольника MOA находим: $MO = \sqrt{\_\_\_ - \_\_\_} = \sqrt{\_\_\_ - \_\_\_} =$ _______. Объём V конуса вычисляем по формуле $V =$ __________ $=$ __________ $=$ _______

Ответ. ___________________

61

В правильной четырёхугольной усечённой пирамиде стороны оснований равны 3 см и 6 см, апофема пирамиды равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см. Найдите объём усечённой пирамиды.



Решение.

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данная правильная четырёхугольная усечённая пирамида, тогда её основаниями являются ____________________ $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Отрезок OO_1, соединяющий центры оснований, — __________________, а отрезок MM_1, соединяющий середины сторон оснований AB и A_1B_1, — ________________________________

Объём усечённой пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \_\_\_\_\_\_ (S_1 + \_\_\_\_\_\_),$$

где h — _____________________________, S и ________________________________

Так как $AB = 6$ см, $A_1B_1 = 3$ см, то $S =$ ___________, $S_1 =$ ___________

Для нахождения высоты пирамиды рассмотрим четырёхугольник OO_1M_1M, который является ______________________________

Пусть $M_1P \parallel OO_1$, тогда MP = ______ − M_1O_1 = __________ = __________

и из ______________________________ треугольника MPM_1 находим: MP =

= $\sqrt{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ = ___________ = _______ = _______ (см).

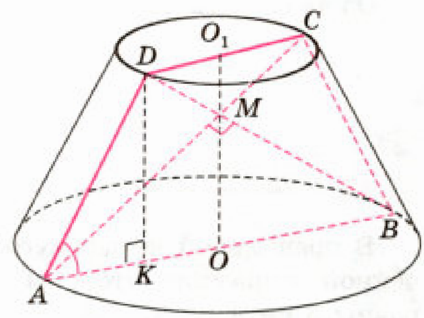
Следовательно, OO_1 = _______ см.

Итак, V = ______________________________ = _______ (см^3).

Ответ. __________ см^3.

62

В усечённом конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью большего основания угол в 60° и равна 4 см. Найдите объём усечённого конуса.



Решение.

Пусть точки O и O_1 — центры оснований данного усечённого конуса, ______________________________ трапеция $ABCD$ — осевое сечение, M — точка пересечения его диагоналей. Тогда $\angle DAB$ — это угол, который составляет образующая AD конуса с плоскостью большего основания, т. е. $\angle DAB$ = _________, $AO = r$ и $DO_1 = r_1$ — радиусы оснований усечённого конуса. Поскольку $\angle AMB$ = _________, то $\angle MAB$ = __________ = _______. Поэтому в треугольнике ADC имеем $AD = 4$ см, $\angle ACD$ = ____________ = ______,

$\angle DAC$ = ____________ = ______. По теореме ________________ $\frac{AD}{\sin\angle DCA}$ =

= ______, откуда получаем: CD = _____ = __________ = ________ (см), а

$r_1 = \frac{1}{2}$ ________ = _____________ (см).

В треугольнике ABC BC = _______ см, $\angle A$ = ______, $\angle B$ = _______,

а $\angle C$ = 180° − ___________ = _____. По ______________________ $\frac{AB}{\sin 75°}$ =

$=$ ______________, откуда находим: $AB =$ ________________ $=$ ________________,

а $r = \frac{1}{2}$ ________ $=$ ____________________

Проведём высоту DK трапеции, она является высотой ________________ ____________________. Из ________________________________ треугольника ADK находим: $DK =$ ____________ $=$ _________ $=$ _________ (см), т. е. высота h усечённого конуса равна _____________

Объём усечённого конуса $V = \frac{1}{3}h \cdot (S + S_1 +$ _____$)$, где S и S_1 — ______________________________. Итак, $V =$ __________ $(\pi r^2 +$ ____ $+$ ____$) =$
$=$ ____ $=$ ______________________ $=$
$=$ __________________ $=$ ______________ (см^3).

Ответ. ________________ см^3.

§ 4 Объём шара и площадь сферы

63

Найдите отношение объёмов шара и цилиндра, если высота цилиндра равна его диаметру, а радиус шара равен радиусу цилиндра.

Решение.

Пусть r — радиус цилиндра, тогда его высота равна _____, а радиус шара равен r. Следовательно, $V_{цил} =$ _____________ $=$ _____________,

$V_{шара} =$ _____ и $\frac{V_{шара}}{V_{цил}} =$ __________ $=$ _______

Ответ. ______________________

64

Шар и цилиндр имеют равные объёмы, причём радиус шара равен $\frac{3}{5}$ высоты цилиндра. Найдите отношение радиусов шара и цилиндра.

Решение.

Объёмы данных тел вычисляются по формулам $V_{шара} =$ ________ $\cdot R^3$, $V_{цил} =$ _______ $\cdot h$, где R — ___________________, r — ___________________ ______________________________________, h — ____________________

Так как по условию объёмы шара и цилиндра равны, то ________ = = _________, откуда $\frac{4}{3}R^3 =$ _______. Поскольку по условию $R = \frac{3}{5}h$, то $h =$ ___________, и поэтому $\frac{4}{3}R^3 =$ ___________. Отсюда получим $\frac{R^2}{r^2} =$ _____, т. е. $\frac{R}{r} =$ _____

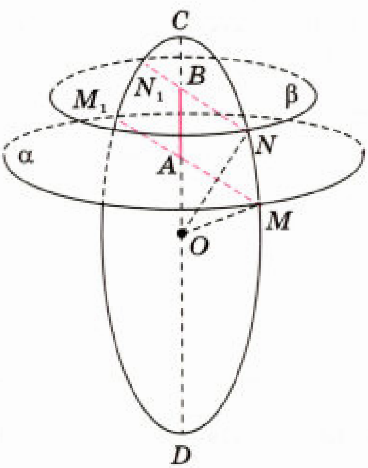
Ответ. ________________

65

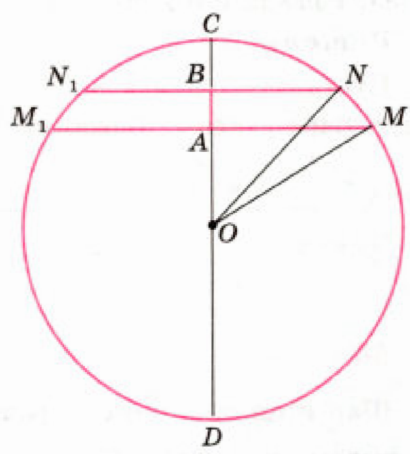
Расстояние между двумя плоскостями, перпендикулярными диаметру шара и расположенными по одну сторону от его центра, равно 1 см, радиусы сечений равны $3\sqrt{3}$ см и $4\sqrt{2}$ см. Найдите объём шарового слоя, заключённого между этими плоскостями.

Решение.

Пусть шар с центром O пересечён плоскостями α и β, перпендикулярными его диаметру CD, A и B — точки пересечения диаметра CD этими плоскостями (см. рис. *а*). Тогда $AB = 1$, а объём слоя, т. е.



а)



б)

части шара, заключённой между этими плоскостями, равен разности объёмов двух шаровых сегментов, один из которых имеет высоту AC, а другой — ________

Так как объём шарового сегмента вычисляется по формуле $V_{\text{сегм}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right)$, где R — ________________, h — ________________ ________________, то необходимо найти R и высоты $h_1 = AC$ и $h_2 = BC$.

Рассмотрим сечение шара плоскостью, проходящей через диаметр CD. Эта плоскость пересекает основания указанных шаровых сегментов по их диаметрам MM_1 и NN_1 (см. рис. *б*). В ________________ треугольниках OAM и OBN имеем: $OM = ON =$ ______, $AM =$ ______, $BN =$ ____________. Пусть $OA = x$, тогда $OB =$ ________

По теореме Пифагора $R^2 = x^2 +$ ______, $R^2 =$ ______ $+ 27$. Отсюда получаем $x^2 + 32 = (1 + x)^2 + 27$, или $x^2 + 32 =$ ________________, и, следовательно, $x = OA =$ ________________

Далее, $R = \sqrt{x^2 + \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_} =$ ________ (см), $h_1 = AC =$ $= OC -$ ______ $=$ ______ $-$ ______ $= 4$ см, $h_2 = BC = AC -$ ______ $=$ $=$ ______ $-$ ______ $=$ ______

Таким образом, $V_{\text{слоя}} = \pi h_1^2 \left(R - \frac{1}{3}h_1\right) -$ ________________________ $=$ $=$ ____________________________ $=$ ______________ $=$ ________ (см^3).

Ответ. ________ см^3.

Глава VI

Векторы в пространстве

§ 1 Понятие вектора в пространстве

66

Точка M — середина ребра BC правильного тетраэдра $DABC$.

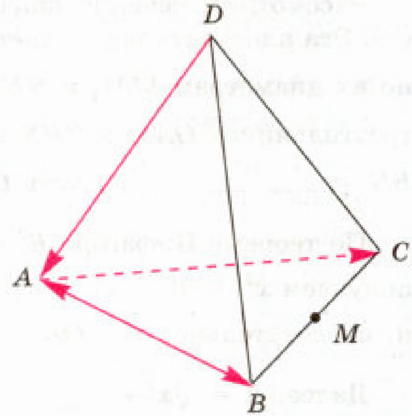
а) Началом каких ненулевых векторов, изображённых на рисунке, служит точка A?

б) Концом каких данных ненулевых векторов служит точка A?

в) Как называется и обозначается вектор с концом и началом в точке C?

г) Нарисуйте цветным карандашом векторы $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AM}$.

д) Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AM}$, если $|\overrightarrow{DA}| = 2$.



Ответ. а) $\overrightarrow{AB}$, ________; б) ________; в) вектор с началом и ________ в точке C называется ________ и обозначается ________ или ____; д) $|\overrightarrow{AB}|$ = ____, |____| = ____, ________

67

Заполните пропуски:

а) Два ненулевых ________ называются коллинеарными, если они лежат на одной ________ или на ________ прямых (обозначение: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$).

б) Два ненулевых ________ $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{KM}$ называются сонаправленными, если они ________ и лучи BC и ________ сонаправлены (обозначение: $\overrightarrow{BC}$ ____ $\overrightarrow{KM}$).

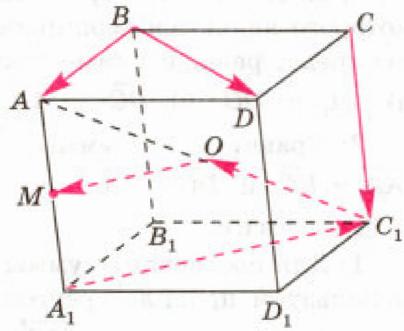
в) Два ненулевых вектора $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{PT}$ называются противоположно ________, если они ________ и лучи CE и PT ________ направлены (обозначение: $\overrightarrow{CE}$ ____ $\overrightarrow{PT}$).

г) Нулевой вектор считается сонаправленным с ________________ вектором.

д) Векторы называются равными, если они ________________ и их длины ______, т. е. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, если $\overrightarrow{AB}$ ___ $\overrightarrow{CD}$ и $|\overrightarrow{AB}|$ ____

68

Точка O — середина диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M — середина ребра AA_1.



1) Используя обозначенные на рисунке точки, нарисуйте векторы:

а) коллинеарные вектору $\overrightarrow{BD}$;

б) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{BA}$;

в) противоположно направленные по отношению к вектору $\overrightarrow{OM}$;

г) равные вектору $\overrightarrow{CC_1}$.

2) Сколько векторов, равных вектору $\overrightarrow{C_1O}$, можно отложить от точки O?

Ответ. 1) а) ____, ____, ____; б) ____, ____, ____; в) ____, ____; г) ____, ____, ____

2) От точки O можно отложить только ________________, ________ вектору $\overrightarrow{C_1O}$.

69

Измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 3 м, 4 м и 12 м. Найдите длину векторов: а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{C_1A}$; в) $\overrightarrow{A_1C}$.

Решение.

а) Длина вектора $\overrightarrow{AC_1}$ — это длина ________ AC_1. Отрезок AC_1 является ________________ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, следовательно, $AC_1 = \sqrt{3^2 + \_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_} =$ ____ (см), т. е. $|\overrightarrow{AC_1}| =$ ____ см.

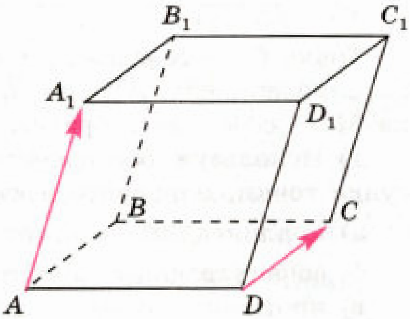
б) Вектор $\overrightarrow{C_1A}$ является ________________ вектору $\overrightarrow{AC_1}$ следовательно, их ________ равны, т. е. $|\overrightarrow{C_1A}| = |\_\_\_\_| =$ ____ (см).

в) Длина вектора $\overrightarrow{A_1C}$ равна ________ диагонали A_1C. Диагонали прямоугольного ________________ равны, значит, $|\overrightarrow{A_1C}| =$ ____ см.

Ответ. а) $|\overrightarrow{AC_1}| =$ ___ см; б) $|\overrightarrow{C_1A}| =$ ___ см; в) $|\overrightarrow{A_1C}| =$ ___ см.

§ 2 Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число

70



Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Постройте вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов:
а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

2) Сравните суммы векторов $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA_1}$.

Решение.

1) Для построения суммы ________ используем правило треугольника.

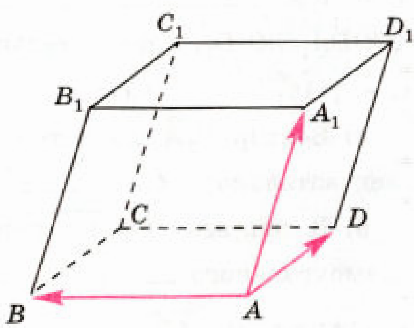
а) От конца вектора $\overrightarrow{AA_1}$ — точки ____ — отложим вектор ____, равный вектору $\overrightarrow{DC}$. Суммой векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ является вектор ____ (изобразите его на рисунке). Итак, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AA_1} +$ ____ $=$ ____

б) Откладывая от конца вектора $\overrightarrow{DC}$ вектор ____, равный вектору ______, получаем $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DC} +$ ____ $=$ ____ (изобразите этот вектор на рисунке).

2) Начала и концы полученных векторов ____ и ____ служат вершинами четырёхугольника ADC_1B_1, который является ______________________. Следовательно, $AB_1 =$ ____ и лучи AB_1 и ______ сонаправлены, а значит, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{DC_1}$.

Итак, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{DC} =$ ______ $+ \overrightarrow{AA_1}$.

71



Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}$.

Решение.

Первый способ. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} +$ ______ $) + \overrightarrow{AD}$ (______ ______ закон). Так как грань ABB_1A_1 является ________________, то по правилу параллелограмма получаем

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} =$ ______. Четырёхугольник AB_1C_1D — ______________

______________, следовательно, по правилу ______________

$\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD} =$ ______

Итак, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} = (\_\_\_ + \overrightarrow{AA_1}) + \_\_\_ = \_\_\_ + \overrightarrow{AD} = \_\_\_$

Второй способ. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AA_1} + \_\_\_)$ (______

______________ закон). Грань AA_1D_1D — ______________,
следовательно, по правилу ______________ $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} =$
$=$ ______. Четырёхугольник AD_1C_1B — ______________,
следовательно, по правилу ______________

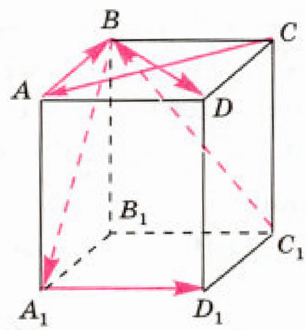
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1} =$ ______

Итак, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \_\_\_\_\_\_) + \_\_\_\_\_\_ = \overrightarrow{AB} +$
$+ (\_\_\_\_\_\_ + \overrightarrow{AD}) = \_\_\_\_\_\_$

Ответ. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} =$ ______

72

Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{C_1B}$.



Доказательство.	Обоснование.
1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} =$	______________ закон
$= (\overrightarrow{AB} + \_\_\_) + \overrightarrow{BD} =$	______________ закон
$= (\overrightarrow{CA} + \_\_\_) + \overrightarrow{BD} =$	________ треугольника
$= \_\_\_\_ + \overrightarrow{BD} =$	правило ________
$= \_\_\_\_$	
2) $\overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{C_1B} =$	______________ закон
$= \overrightarrow{A_1D_1} + (\overrightarrow{BA_1} + \_\_\_) =$	______________ закон
$= \overrightarrow{A_1D_1} + (\overrightarrow{C_1B} + \_\_\_) =$	______________ закон
$= \overrightarrow{A_1D_1} + \_\_\_\_\_\_ =$	________ треугольника
$= \_\_\_\_ + \overrightarrow{A_1D_1} =$	правило ________
$= \_\_\_\_$	

Грань CDD_1C_1 параллелепипеда является ______________
______________, следовательно, $\overrightarrow{CD}$ ____ $\overrightarrow{C_1D_1}$. Поэтому $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} +$
$+ \_\_\_\_\_\_ = \overrightarrow{A_1D_1} + \_\_\_\_\_\_ + \overrightarrow{C_1B}$, что и требовалось доказать.

Какие векторы с концом и началом в вершинах параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$:

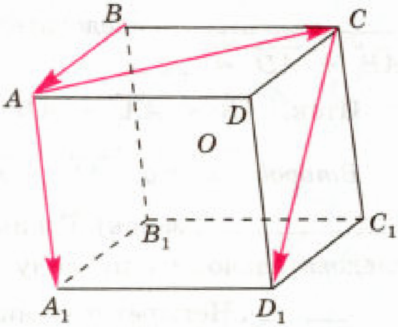
а) противоположны вектору $\overrightarrow{AC}$;

б) равны вектору $-\overrightarrow{CD_1}$;

в) равны разности $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC}$;

г) равны сумме $\overrightarrow{BA} + (-\overrightarrow{CD_1})$;

д) равны вектору $-\overrightarrow{CD_1} - \overrightarrow{AC}$?



Решение.

а) Два ненулевых ______ называются противоположными, если их длины ______ и они ______ направлены. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ AC = ____. Противоположно направлены по отношению к лучу AC лучи ____ и ____

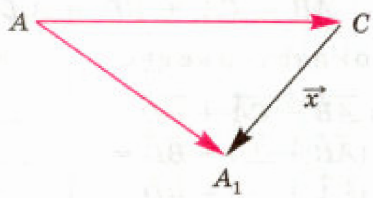
Следовательно, вектору $\overrightarrow{AC}$ противоположны векторы ____ и ____

б) Запись $-\overrightarrow{CD_1}$ означает вектор, ______ вектору $\overrightarrow{CD_1}$. Равными этому вектору являются векторы ____ и ____

в) Разность векторов $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC}$ можно найти двумя способами:

1) по определению разности двух ______

2) используя формулу $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + ($____$)$.



1) По определению разностью векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ является такой ____ $\vec{x}$, сумма которого с вектором ___ равна вектору ____, т. е. $\overrightarrow{AC}$ + ____ = ____. Значит, искомый вектор $\vec{x}$ — это вектор ____, т. е. $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC}$ = ____

2) Используя формулу $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + ($____$)$, получаем $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA_1} + (-$____$)$. Но вектор $-\overrightarrow{AC}$ — это вектор, ______ ______ вектору ______, т. е. вектор ______. Поэтому $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA_1}$ + ______ = $\overrightarrow{CA}$ + ____ = ____

г) Как установлено в п. «б», $-\overrightarrow{CD_1}$ = ____ и также $-\overrightarrow{CD_1}$ = ____. Следовательно, $\overrightarrow{BA} + (-\overrightarrow{CD_1}) = \overrightarrow{BA}$ + ____ = ____ (по ______ треугольника). Этому вектору равны векторы $\overrightarrow{B_1B}$ ____ и ____.

д) Используя результаты п. «а» и «б», получаем $-\overrightarrow{CD_1} - \overrightarrow{AC}$ = ____ + (− ____) = ____ + ____ = ____. Этот вектор равен вектору ___

Ответ. а) ____, ____; б) ____, ____; в) ____; г) ____, ____, ____, ____; д) ____, ____

74

Докажите, что $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

Доказательство. Используя формулу $\vec{a} - \vec{b} = \_\_\_ + (-\vec{b})$ и равенство $-\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{DC}$, получаем $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (-\_\_\_) = \overrightarrow{AB} + \_\_\_$, что и требовалось доказать.

75

Упростите выражение:

а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OK}$;

б) $\overrightarrow{KM} - \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA}$.

Решение.

а) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{KB} + \_\_\_ - \overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{MC} + \_\_\_ - \overrightarrow{OK} = \_\_\_ + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC} + (-\_\_) = \overrightarrow{AK} + \_\_\_ + \_\_\_ = \overrightarrow{AK} + \_\_\_ + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO} + \_\_\_ = \_\_\_$

б) $\overrightarrow{KM} - \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{KM} - \overrightarrow{PM} - \_\_ - \overrightarrow{CA} + \_\_ = \overrightarrow{KM} + \_\_ + \overrightarrow{PA} + \_\_\_ + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{KP} + \_\_\_ + \overrightarrow{CE} = \_\_ + \_\_ = \_\_$

Ответ. а) ___ ; б) ___

76

Даны точки K, M, P, O. Представьте вектор $\overrightarrow{KM}$ в виде алгебраической суммы векторов: а) $\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{KP}, \overrightarrow{OP}$; б) $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{OK}, \overrightarrow{PO}$.

Решение.

а) Используя равенства $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{PO} + \_\_\_$, $\overrightarrow{PO} = -\_\_\_\_$, $\overrightarrow{OM} = -\_\_\_\_$, получаем $\overrightarrow{KM} = \_\_\_ - \_\_\_ - \_\_\_$

б) $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KO} + \_\_\_ + \_\_\_ = -\_\_\_ - \_\_\_ + \_\_\_$

Ответ.

а) $\overrightarrow{KM}$ = __________; б) $\overrightarrow{KM}$ = __________

77

Заполните пропуски:

Произведением __________ вектора $\vec{a}$ на ________ k называется __________ $\vec{b}$, такой, что $|\vec{b}| = |\_\_|\cdot|\_\_|$, причём $\vec{b}\uparrow\uparrow$ ______ при $k \geqslant 0$ и $\vec{b}$ ____ $\vec{a}$ при $k < 0$.

Произведением нулевого __________ на __________ число считается ________ вектор.

78

Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливы равенства:

а) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; б) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

Доказательство.

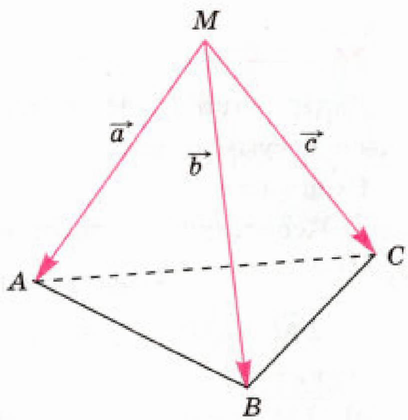
Если $\vec{a} = \vec{0}$, то обе части каждого равенства — нулевые ____________,
поэтому равенства справедливы. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$.

а) По определению произведения вектора на __________________________
$|1 \cdot \vec{a}| = |\_\_\_| \cdot |\_\_\_| = |\_\_\_|$, а так как $1 > 0$, то векторы $1 \cdot \vec{a}$ и $\vec{a}$ ______________________________________. Следовательно, по определению равных векторов $1 \cdot \vec{a}$ _____ $\vec{a}$.

б) По определению ______________________________ вектора на число
$|(-1) \cdot \vec{a}| = |\_\_| \cdot |\_\_| = \_\_ \cdot |\_\_| = |\vec{a}|$, а так как -1 __ 0, то $(-1) \cdot \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$.
Следовательно, векторы $(-1) \cdot \vec{a}$ и ______________ противоположны, т. е. $(-1) \cdot \vec{a}$ ____ $-\vec{a}$.

79

Дана треугольная пирамида $MABC$, $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$.



а) Отложите от точки M вектор:
$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{b}$; $\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{c}$; $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$;
$\vec{m} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

б) Отложите от точки A вектор $\vec{n} = -\frac{2}{3}\vec{m}$.

Решение.

а) Так как $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{b}$, то по определению произведения вектора на ________
$\vec{x} \uparrow\uparrow$ ______ и $|\vec{x}| =$ _____ $|\vec{b}|$. Отметим середину ребра MB — точку E, тогда $\overrightarrow{ME} =$ _____ $\vec{b} = \vec{x}$. Аналогично отметим точку H — ______________ ребра MC, тогда $\overrightarrow{MH} =$ _____ $\vec{c} =$ _____

Так как $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\_\_$, $\vec{z} = \overrightarrow{ME} +$ _____. Построим вектор $\vec{z}$ по ________________ параллелограмма. Для этого через точку E проведём ____________, параллельную прямой MC, а через точку H — прямую,

____________ прямой ______. По теореме ________ эти прямые пересекут отрезок BC в его ______. Обозначим эту точку буквой K. Тогда $\vec{z}$ = ______

$\vec{m} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}$____ $= \vec{a} - \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right)$ — первый ____________

________ закон. Но $\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}$____ $= \vec{z} = \overrightarrow{MK}$, $\vec{a}$ ___, следовательно, $\vec{m}$ = _____ − _____, т. е. $\overrightarrow{MA}$ = _____ + $\vec{m}$. Поэтому $\vec{m}$ = _____

б) Так как $\vec{n} = -\frac{2}{3}$ ____ и $-\frac{2}{3}$ ____ 0, то $\vec{n}$ ____ $\vec{m}$ и $|\vec{n}|$ = ____ $|\vec{m}|$. Отложим от точки A вектор $\vec{n}$. Для этого на отрезке AK нужно отметить точку O так, чтобы AO = ______ AK. Тогда $\overrightarrow{AO}$ = ______ $\overrightarrow{AK}$ = = ______ $\vec{m} = \vec{n}$.

80

Упростите выражение $2(5\vec{a} - 3\vec{c}) - 3(3\vec{a} - 2\vec{c})$.

Решение.	Обоснование.
$2(5\vec{a}$ − ____) − 3(____) =	________ распределительный закон
= $2(5\vec{a})$ − ___ − $3(3\vec{a})$ ___ =	________________ закон
= $10\vec{a}$ − ____ − $9\vec{a}$ ____ =	________________ и переместительный законы сложения
= $10\vec{a} - 9\vec{a}$ ______ =	
= $(10 - 9)\vec{a}$ ______ =	____________ закон
= $1\vec{a}$ − _____ = _____	
Ответ. ______	

81

Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Доказательство. Возможны два случая: 1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и 2) $\vec{a}$ ____ $\vec{b}$. В обоих случаях векторы лежат на одной прямой или на __________ ________ прямых, т. е. лежат в одной плоскости.

1) Пусть $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Возьмём число $k = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$. Тогда $|k\vec{a}| = |$___$| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |$___$| = |\vec{b}|$. Так как k ___ 0, то $k\vec{a} \uparrow\uparrow$ ___. Следовательно, $\vec{b} = k\vec{a}$.

Итак, для первого случая утверждение доказано.

2) Пусть $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Возьмём число $k = \frac{|\vec{b}|}{|\_\_|}$. Тогда $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\_\_| = \frac{|\_\_|}{|\vec{a}|} \cdot |\_\_| = |\_\_|$. Так как $k <$ ___, то $k\vec{a}$ __ $\vec{a}$, и поэтому $k\vec{a}$ __ $\vec{b}$.

Итак, $|\vec{b}|$ __ $|k\vec{a}|$ и $\vec{b} \uparrow\uparrow$ ___, следовательно, $\vec{b}$ __ $k\vec{a}$, что и требовалось доказать.

82

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, $\vec{c} \neq \vec{0}$. Докажите, что коллинеарны векторы $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Доказательство. По условию задачи векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ _______________, причём $\vec{c} \neq$ ____, поэтому найдётся число k, такое, что $\vec{a} =$ ___ $\vec{c}$ (см. задание 81). Аналогично найдется число m, такое, что $\vec{b} = m$ ___

Поэтому $\vec{a} - 2\vec{b} = k$ ___ $- 2($__$\vec{c}) = k\vec{c} - ($__$)\vec{c} = ($___ $-$ ___$)\vec{c}$, т. е. вектор $\vec{a} - 2\vec{b}$ равен произведению вектора $\vec{c}$ на число _______. Следовательно, по определению __________________ вектора на число эти векторы __________________, что и требовалось ____________

83

Докажите следующее утверждение:

Если точка M — середина отрезка AB и точка O — произвольная точка пространства, то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

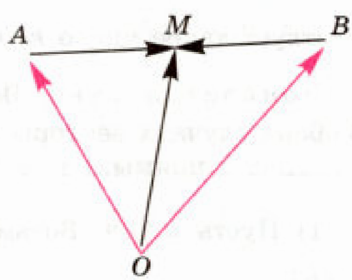
Доказательство. Так как точка M — __________ отрезка AB, то векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ _________________________________, т. е. $\overrightarrow{AM} =$ ________, и, значит, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} =$ ________

Для точек A, M и произвольной точки O по правилу треугольника получаем

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \_\_\_, \quad (1)$$

а для точек B, M и O получаем

$$\overrightarrow{OM} = \_\_\_ + \overrightarrow{BM}. \quad (2)$$



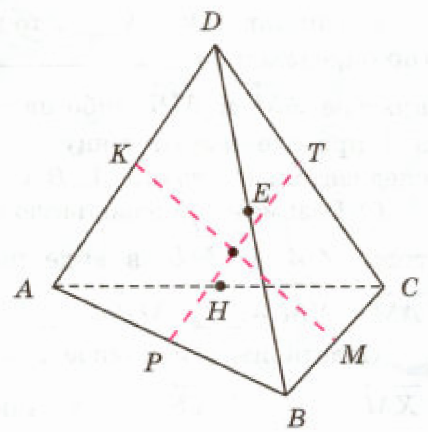
Сложим равенства (1) и (2):

$\overrightarrow{OM} +$ ___ $= \overrightarrow{OA} +$ ___ $+ \overrightarrow{OB} +$ ___.

Отсюда следует: $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} +$ ___ $+ \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} =$ ___ $+ \overrightarrow{OB} + \vec{0}$. Итак, $2\overrightarrow{OM} =$ _____ $+$ _____, поэтому $\overrightarrow{OM} =$ _____, что и требовалось доказать.

84

Докажите, что три отрезка, соединяющие середины противоположных рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.



Доказательство. Пусть точка K — середина ребра AD тетраэдра $ABCD$, тогда для любой ________ X пространства выполняется равенство $\overrightarrow{XK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{XA} + \_\_\_ \overrightarrow{XD}$ (см. задание 83). Если точка M — середина ребра BC, то $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}\_\_ + \_\_$. Обозначим буквой Q середину отрезка KM, тогда $\overrightarrow{XQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{XK} + \frac{1}{2}\_\_\_ = \frac{1}{2}(\_\_\_ + \overrightarrow{XM}) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{XA} + \frac{1}{2}\_\_\right) + \left(\_\_ + \frac{1}{2}\overrightarrow{XC}\right)\right) =$
$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \_\_\_ + \overrightarrow{XD})$.

Обозначим буквами P, T и O середины отрезков AB, ________ и PT. Тогда $\overrightarrow{XP} =$ ________, $\overrightarrow{XT} =$ ________, $\overrightarrow{XO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XP} + \_\_\_\_\_\_) =$
$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{XA} + \_\_\_\right) + \frac{1}{2}(\_\_\_\_)\right) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \_\_\_ + \_\_\_)$.

Обозначим буквами E, H и F середины отрезков BD, AC и EH.

Тогда получим $\overrightarrow{XE} =$ ________, $\overrightarrow{XH} =$ ________, $\overrightarrow{XF} =$ ________ =
= ____________ $= \frac{1}{\_\_}(\overrightarrow{XA} + \_\_\_\_ + \overrightarrow{XD})$.

Сравнив полученные выражения для векторов $\overrightarrow{XQ}$, $\overrightarrow{XO}$ и $\overrightarrow{XF}$, делаем вывод: $\overrightarrow{XQ} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$. Так как начала этих равных векторов совпадают, то ________________ и их концы. Следовательно, середины отрезков KM, PT и ________ совпадают, т. е. эти отрезки ________________ в одной точке и делятся этой точкой ________, что и требовалось ________

85

Дано: $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}$ $(k \neq -1)$.

Докажите, что:

а) точки A, B и M лежат на одной прямой;

б) для любой точки X пространства верно равенство $\overrightarrow{XM} = \dfrac{\overrightarrow{XM} + k\overrightarrow{XB}}{1+k}$ (задача **586** учебника).

Доказательство.

а) Так как $\overrightarrow{AM} = k\underline{\qquad}$, то векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ ____________________ (по определению ____________________ вектора на число). Следовательно, прямые AM и MB либо параллельны, либо ________________. Поскольку эти прямые имеют общую __________ M, то они ____________________, следовательно, точки A, B и M лежат на __________________________

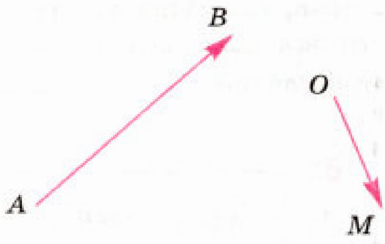
б) Возьмём произвольную точку X пространства и представим векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ в виде разности векторов с началом в точке X: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{XM} - \underline{\qquad}$, $\overrightarrow{MB} = \underline{\qquad} - \overrightarrow{XM}$.

Подставим в исходное равенство полученные выражения: $\overrightarrow{XM} - \underline{\qquad} = k(\overrightarrow{XB} - \underline{\qquad})$, или $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = k\overrightarrow{XB} - \underline{\qquad}$

После переноса слагаемых $\overrightarrow{XA}$ и $k\overrightarrow{XM}$ из одной части равенства в другую получим $\overrightarrow{XM} + \underline{\quad} = \overrightarrow{XA} + k\underline{\quad}$, или $(1 + k)\overrightarrow{XM} = \underline{\quad} + k\overrightarrow{XB}$. По условию задачи $k \neq -1$, следовательно, $1 + k$ _____ 0. Поэтому обе части ______________________________ можно умножить на число $\frac{1}{1+k}$. Получим $\overrightarrow{XM} = \frac{\overrightarrow{XA} + \underline{\qquad}}{1+k}$, что и требовалось доказать.

§ 3 Компланарные векторы

86



Докажите, что компланарны:

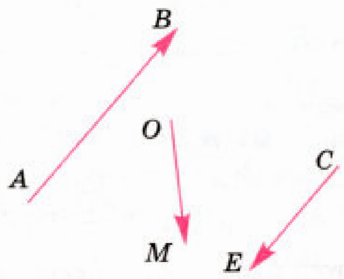
а) любые два вектора;

б) любые три вектора, два из которых коллинеарны.

Доказательство.

а) Векторы называются компланарными, если при ________________________ их от одной и той же ______________ они будут лежать в плоскости. Рассмотрим два произвольных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OM}$. От любой точки пространства ________ отложить вектор, равный данному _________. Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AH}$ равный _____________ $\overrightarrow{OM}$

(выполните построение). Через любые три точки проходит __________, следовательно, векторы $\overrightarrow{AH}$ и _____ лежат в одной ____________, поэтому векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{AB}$ ___________, что и требовалось доказать.



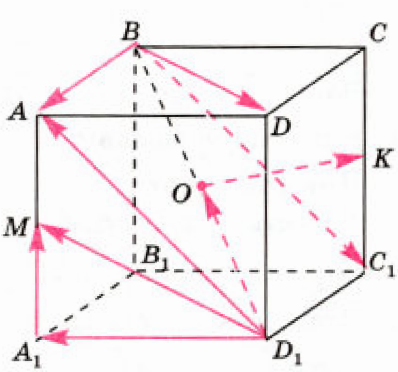
б) Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{OM}$, два из которых, например $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CE}$, коллинеарны. Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AH}$, равный _________ $\overrightarrow{OM}$, и вектор $\overrightarrow{AK}$, равный вектору ________ (выполните построение). Так как $AK \parallel AB$, то точка K ___________ на прямой AB. Через прямую AB и точку H проходит ____________. Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AM}$ _________ в этой плоскости. Следовательно, данные векторы $\overrightarrow{AB}$, ___ и $\overrightarrow{OM}$ _____________, что и требовалось доказать.

87

Точка O — середина диагонали BD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра CC_1, точка M лежит на ребре AA_1. Найдите на рисунке компланарные векторы.

Решение.

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от ______________ и той же ______________ они будут лежать в одной ____________________



Можно сказать иначе: векторы называются _____________________, если имеются ___________ им векторы, лежащие в __________ плоскости.

1) В плоскости грани ADD_1A_1 лежат векторы $\overrightarrow{DD_1}$, ____, ____, ____ и _____. Следовательно, эти векторы ____________________________. Прямые BC_1 и ____ параллельны, поэтому если от точки D_1 отложить ________, равный

вектору $\overrightarrow{BC_1}$, то он будет лежать в __________ грани ADD_1A_1. Следовательно, векторы $\overrightarrow{DD_1}$, ______, ______, ______, ______ и $\overrightarrow{BC_1}$ ______________________

2) Векторы $\overrightarrow{D_1A_1}$ и $\overrightarrow{D_1C_1}$ лежат в __________ $A_1D_1C_1$, векторы $\overrightarrow{D_1C_1}$ и $\overrightarrow{BA}$ ____________________________, следовательно, векторы $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$ и ______ компланарны. Прямые BD и B_1D_1 __________________, поэтому если от точки D_1 отложить __________, равный вектору $\overrightarrow{BD}$, то он будет лежать в ______________ $A_1D_1C_1$. Аналогично поскольку OK ___ A_1C_1, то вектор, равный ____________ $\overrightarrow{OK}$ и отложенный от точки D_1, будет лежать в плоскости ________. Следовательно, компланарными являются векторы $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BD}$, ___ и ___

3) Отрезки BA и D_1C_1 равны и ______________, следовательно, четырёхугольник ABC_1D_1 является ____________________, а потому векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{D_1A}$, _____, _____ и _____ лежат в одной __________ и, следовательно, компланарны.

Ответ. Компланарными являются векторы:

1) $\overrightarrow{DD_1}$, _____, _____, _____, _____ и _____

2) $\overrightarrow{D_1A_1}$, _____, _____, _____ и _____

3) $\overrightarrow{BA}$, _____, _____, _____ и _____

88

Заполните пропуски в формулировке признака компланарности трёх векторов:

Если вектор $\vec{c}$ можно ________________ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. представить в виде $\vec{c} = x$ _____ + _____, где ____ и y — некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, ____ и $\vec{c}$ ______________

89

Дано: $\vec{c} = 3(\vec{a} - \vec{b} + \vec{d}) - (3\vec{d} - \vec{a} - \vec{b})$. Докажите, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

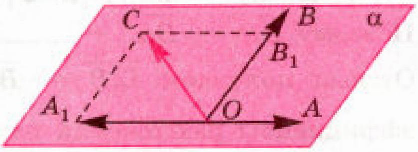
Доказательство.

Упростим равенство: $\vec{c} = 3(\vec{a} - \vec{b} +$ ____ $) - (3\vec{d} -$ _____ $- \vec{b}) =$
$= 3\vec{a} -$ ____ $- 3\vec{d} +$ ____ $= 3\vec{a} + \vec{a} - 3\vec{b} +$ _____ $= 4\vec{a} -$ ____

Итак, вектор $\vec{c}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и ____, следовательно, векторы $\vec{a}$, ____ и $\vec{c}$ ______________, что и требовалось доказать.

90

Докажите свойство компланарных векторов:



Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то вектор можно представить в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

причём коэффициенты x и y определяются единственным образом.

Доказательство. Отложим от произвольной точки O векторы: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ____________, то векторы $\overrightarrow{OA}$, ______ и $\overrightarrow{OC}$ лежат в одной ______________ (обозначим её буквой α). Поскольку $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} =$ ______, то векторы $\overrightarrow{OA}$ и ______ неколлинеарны. В каждой плоскости пространства справедливы все аксиомы и __________________ планиметрии.

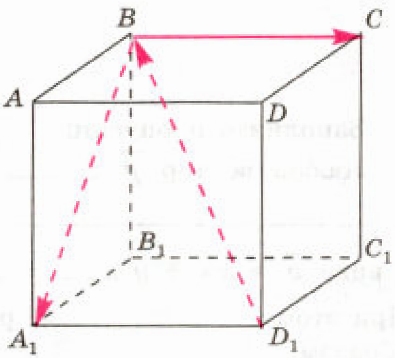
Следовательно, в плоскости α выполняется теорема: любой вектор можно ______________________ по двум данным неколлинеарным ________________, причём коэффициенты разложения определяются единственным ______________________

Поэтому $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y$ _____, т. е. $\vec{c} =$ _____ $\vec{a} + y$ _____, причём числа x и ___ определяются ______________________ образом, что и требовалось доказать.

91

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что вектор $\overrightarrow{D_1B}$ можно единственным образом разложить по векторам $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{BC}$. Найдите коэффициенты разложения.

Решение.



1) Прямые BC и A_1D_1 ____________________, поэтому точки A_1, B, C и ___ лежат в _______ плоскости, а значит, векторы $\overrightarrow{BA_1}$, ___ и $\overrightarrow{D_1B}$ компланарны. Кроме того, векторы $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{BC}$ не ____________________

Следовательно, вектор $\overrightarrow{D_1B}$ _______ разложить по векторам $\overrightarrow{BA_1}$ и ______, причём коэффициенты разложения определяются ______________ образом.

2) В кубе рёбра BC и A_1D_1 равны и ______________ , следовательно, четырёхугольник A_1BCD_1 является ______________________________ . Поэтому $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA_1} + \underline{\qquad}$ (правило ______________________________).
Отсюда получаем $\overrightarrow{D_1B} = -\overrightarrow{BD_1} = (\underline{\qquad})\,\overrightarrow{BA_1} + (\underline{\qquad})\,\overrightarrow{BC}$, т. е. коэффициенты разложения равны -1 и ________

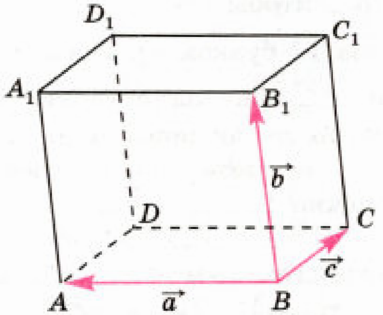
Ответ.

____ разложения равны ____ и ____

92

Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Докажите, что справедливо равенство

$$\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$



Доказательство.

Используя законы ____________________ векторов, преобразуем левую часть данного равенства:

$$\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AC_1} + \underline{\qquad} + \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{BC} =$$

$$= (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}) + (\underline{\qquad} + \overrightarrow{AC_1}) + (\underline{\qquad} + \underline{\qquad}) =$$

$$= \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \underline{\qquad} = \overrightarrow{BC_1} + \underline{\qquad} = \overrightarrow{BD_1}.$$

С другой стороны, диагональ BD_1 параллелепипеда изображает ______________ векторов $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и ______ , т. е. по правилу ______________ ________________ $\overrightarrow{BD_1} = \vec{a} + \underline{\qquad} + \underline{\qquad}$. Отсюда следует справедливость данного равенства.

93

Заполните пропуски:

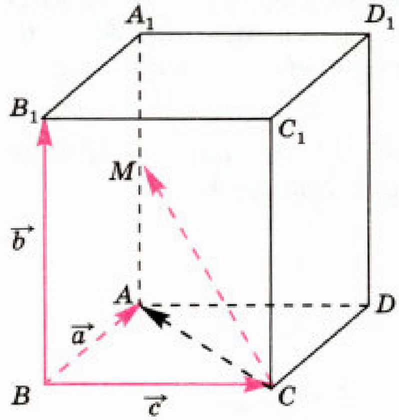
Любой вектор $\vec{p}$ ____________________ разложить по трём данным ____________________________________ векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, т. е. представить в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\,\underline{\qquad} + \underline{\qquad}\,\vec{c}$, где x, y, ____ — некоторые числа. При этом __________________ разложения определяются ______________ образом.

94

Точка M — середина ребра AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Выразите вектор $\overrightarrow{CM}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BB_1}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$.

б) Найдите длину вектора $\overrightarrow{CM}$, если $AB = 3$, $BC = 4$, $BB_1 = 24$.



Решение.

а) По правилу ____________________ $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} +$ __________. Так как $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} =$ _______, то $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} -$ _______ $= \vec{a} -$ ______, а так как точка M — середина ребра ____, то $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}$ ____ $=$ ____ $\overrightarrow{BB_1} =$ ____ $\vec{b}$.

Итак, $\overrightarrow{CM} = \vec{a} -$ ______ $+$ ______

б) В прямоугольном ______________________________ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AA_1 \perp ABC$, следовательно, $AA_1 \perp AC$. В прямоугольном треугольнике ACM $CM^2 = AC^2 +$ ____, но $AC^2 = AB^2 +$ _____ $= 3^2 +$ _____ $=$ _____, $AM = \frac{1}{2}$ _____ $=$ _____

Итак, $CM^2 =$ ____ $+$ ____, т. е. $|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{\_\_\_\_}$ $=$ ____

Ответ.

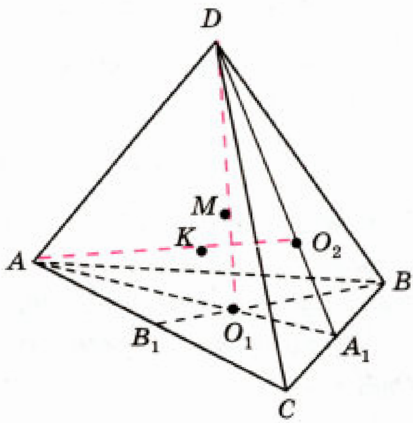
а) $\overrightarrow{CM} =$ ________________

б) $|\overrightarrow{CM}| =$ ______

95

Назовём *медианой тетраэдра* отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противолежащей грани.

Докажите, что все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершины тетраэдра.



Доказательство.

Пусть точки A_1 и B_1 — середины отрезков BC и AC, O_1 и O_2 — точки пересечения медиан граней ABC и BCD. Обозначим буквой M точку на медиане DO_1 тетраэдра, такую, что $DM : MO_1 = 3 : 1$, буквой K — точку на медиане AO_2, такую, что $AK : KO_2 = 3 : 1$. Докажем, что точки M и K совпадают.

1) Так как $DM : MO_1 = 3 : 1$, то $\overrightarrow{DM} =$ ____ $\overrightarrow{MO_1}$, и, следовательно, для произвольной точки X пространства выполняется равенство (см. задание 85)

$$\overrightarrow{XM} = \frac{\overrightarrow{XD} + \_\_\overrightarrow{XO_1}}{1 + \_\_},$$

т. е.

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{XD} + \frac{3}{4}\_\_\_\_. \qquad (1)$$

2) Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ____ пересекаются в точке ____, поэтому $BO_1 : O_1B_1 =$ ____ $: 1$. Следовательно, $\overrightarrow{BO_1} = 2$ ____ , и потому для точки X выполняется равенство

$$\overrightarrow{XO_1} = \frac{\overrightarrow{XB} + \_\_\_}{1 + \_\_},$$

т. е.

$$\overrightarrow{XO_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\_\_\_\_. \qquad (2)$$

3) Точка B_1 — ____________ отрезка AC, поэтому $\overrightarrow{XB_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \_\_\_\_\right)$ (см. задание 83).

4) Подставив выражение для $\overrightarrow{XB_1}$ в равенство (2), получим

$$\overrightarrow{XO_1} = \frac{1}{3}\_\_\_ + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \_\_\_\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \_\_\_ + \overrightarrow{XC}\right).$$

5) Подставим теперь полученное разложение вектора $\overrightarrow{XO_1}$ по векторам $\overrightarrow{XA}$, ____ и $\overrightarrow{XC}$ в равенство (1):

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{4}\_\_\_ + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(\_\_\_\_\_\_\_\_) = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{XA} + \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \overrightarrow{XD}\right).$$

6) Аналогично рассуждая для точки K и произвольной точки X, получаем равенство

$$\overrightarrow{XK} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{XA} + \_\_\_\_ + \overrightarrow{XC} + \_\_\_\_\right).$$

Следовательно, точки M и ___ совпадают, т. е. медианы DO_1 и AO_2 тетраэдра ______________________ в точке M и делятся ею в отношении ________, считая от вершин D и A соответственно.

7) Таким же образом это утверждение доказывается и для остальных двух ________ тетраэдра.

Глава VII

Метод координат в пространстве

§ 1 Координаты точки и координаты вектора

96

Заполните пропуски.

В пространстве задана прямоугольная система координат, если:

а) заданы три попарно ______________________ прямые, проходящие через ________ точку пространства;

б) на каждой из этих прямых выбрано ______________

в) выбрана единица ______________ отрезков.

97

Заполните пропуски.

Если прямоугольная система координат обозначена $Oxyz$, то прямая Ox называется осью __________, прямая Oy — осью __________, прямая Oz — ________________

98

Заполните пропуски.

Дана точка $M(2;\ -3;\ 0)$. Числа 2, −3, ___ называются ______________ ______________ точки M; число 2 — это ______________ точки, число −3 — ______________, число 0 — ______________

99

Заполните пропуски.

Если аппликата точки A равна −2, абсцисса равна 0 и ордината равна 3, то $A($___ ; ___ ;___ $)$.

100

Чему равна аппликата точки A, лежащей на: а) оси ординат; б) оси Ox; в) координатной плоскости Oxy?

Ответ. а) ___ ; б) ___ ; в) ___

101

Заполните пропуски:

а) точка $C(0;\ -3;\ 0)$ лежит на оси ____________________

б) точка $E(2;\ 0;\ -1)$ лежит на ________________________________

в) точка $M(0;\ 0;\ m)$ лежит на ________________________________

г) точка $T(0;\ t;\ 0)$ лежит на ________________________________

102

Дан вектор $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 0{,}5\vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — координатные векторы. Запишите координаты вектора $\vec{a}$.

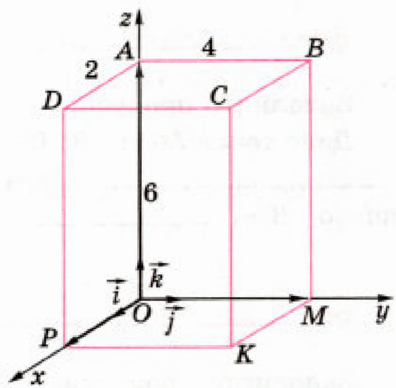
Решение.

Координатами вектора в данной __________ координат называются _________________________ x, y, z разложения этого вектора по _________________________ векторам. Для данного вектора $\vec{a}$ имеем $x = 2$, $y =$ ___ , $z =$ ___ , следовательно, $\vec{a}\{$___ ; -1; _____$\}$.

Ответ. $\vec{a}$ ____________

103

На рисунке изображён прямоугольный параллелепипед с измерениями $AB = 4$, $AD = 2$ и $AO = 6$. Найдите координаты вектора: а) $\overrightarrow{OA}$; б) $\overrightarrow{OM}$; в) $\overrightarrow{OP}$.



Решение.

Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — координатные векторы. Тогда:

а) $|\vec{k}| =$ ___ , $|\overrightarrow{OA}| =$ ___ , следовательно, $\overrightarrow{OA} =$ ___ $\vec{k}$;

б) $|\vec{j}| =$ ___ , $|\overrightarrow{OM}| =$ ___ , следовательно, $\overrightarrow{OM} =$ ___ $\vec{j}$;

в) $|\vec{i}| =$ __, $|\overrightarrow{OP}| =$ __, следовательно, $\overrightarrow{OP} =$ ____

Ответ. а) $\overrightarrow{OA}\{0;\ 0;$ __$\}$; б) $\overrightarrow{OM}\{$ ____________ $\}$; в) __________

104

Разложите векторы $\vec{c}\{-1;\ 2;\ -3\}$ и $\vec{p}\{3;\ 0;\ -5\}$ по координатным векторам.

Ответ. $\vec{c} =$ __ $\vec{i}$ + _____ − _____; $\vec{p} = 3$ ________

105

Найдите значения x и z, если $\vec{a}\{x;\ 2;\ -1\} = \vec{b}\{0;\ 2;\ z\}$.

Решение.

По условию задачи векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ _____, следовательно, их соответственные координаты _________, т. е. $x =$ __, $z =$ __

Ответ. __________

106

Докажите, что для любых векторов $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2\}$.

Доказательство.

Координаты вектора — это __________________ его разложения по координатным _______. Значит, $\vec{a} = x_1\vec{i} +$ __ $\vec{j} +$ __ $\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} +$ ________ + ________

Используя законы сложения векторов и ____________ вектора на число, получаем

$\vec{a} + \vec{b} = (x_1\vec{i} +$ ___ + ___$) + ($___ + ___ $+ z_2\vec{k}) =$

$= (x_1\vec{i} + x_2\vec{i}) +$ _________ $=$

$=$ ________________________,

что означает: вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $\{x_1 + x_2;$ __; __$\}$.

107

Найдите координаты вектора $4\vec{a}$, если $\vec{a}\{2;\ 0;\ -0{,}5\}$.

Решение.

Каждая координата произведения вектора на ______________ равна __________________ соответствующей координаты данного ____________ на это число.

Поэтому вектор $4\vec{a}$ имеет координаты $\{4 \cdot 2;$ ______ ; ______ $\}$, и, значит, $4\vec{a}\{$ ___ ; ___ ; $-2\}$.

Ответ. $4\vec{a}\{$ ___ ; ___ ; ___ $\}$.

108

Найдите координаты вектора $\vec{p} = 4\vec{a} - 0{,}5\vec{b} - \vec{c}$, если $\vec{a}\{2;\ 0;\ -0{,}5\}$, $\vec{b}\{-4;\ 2;\ 0\}$, $\vec{c}\{0;\ -3;\ 2\}$.

Решение.

Используя правило умножения вектора на ____________, получаем $4\vec{a}\{$ ___ ; ___ ; ___ $\}$, $-0{,}5\vec{b}\{$ ___ ; ___ ; ___ $\}$, $-\vec{c}\{$ ___ ; ___ ; ___ $\}$.

Следовательно, координаты x, y, z вектора $\vec{p}$ равны:

$x = 8 +$ ___ $+$ ___ $=$ _____ ; $y =$ ________ $=$ ___ ; $z =$ ________ $=$ ___

Ответ. $\vec{p}\{$ ______ ; ___ ; ___ $\}$.

109

Докажите утверждения:

а) если соответственные координаты двух векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны;

б) если соответственные координаты двух векторов не пропорциональны, то векторы не коллинеарны.

Доказательство.

а) Пусть даны векторы $\vec{a}\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$.

Так как соответственные ____________ векторов пропорциональны, то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{\_\_} = \frac{\_\_}{\_\_\_} = k$.

Следовательно, $x_1 = kx_2$, $y_1 =$ ___ , $z_1 =$ ___ , т. е. вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{kx_2;$ _____ ; ______ $\}$, поэтому $\vec{a} =$ __ $\vec{b}$. Из определения

________________________ вектора на число следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ________________________

б) Предположим, что векторы $\vec{a}$ и ____ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$. Тогда $\vec{b} = k\vec{a}$, где k — некоторое число. Отсюда следует, что координаты векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ пропорциональны, что противоречит условию задачи. Следовательно, предположение ____________________, т. е. векторы ____ и $\vec{b}$ ________________________________

110

Даны векторы $\vec{m}\{2;\ 6;\ -3\}$, $\vec{n}\{0;\ -3;\ 1{,}5\}$, $\vec{p}\{-4;\ -12;\ 6\}$. Установите, какие из них являются коллинеарными.

Решение.

а) Сравним отношения соответственных координат векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$: $\frac{0}{2} \neq \frac{-3}{\_\_}$. Итак, абсциссы этих ____________________ не пропорциональны ________________, поэтому векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ ______________________________

б) Сравним __________________ соответственных ______________________ векторов $\vec{m}$ и $\vec{p}$: $\frac{2}{-4} =$ __________ $= -0{,}5$. Координаты этих векторов, ___________________________________, значит, векторы $\vec{m}$ и ______________________

в) Итак, векторы ____ и ____ коллинеарны, а вектор __________ не коллинеарен вектору ___________, следовательно, он ____________________ быть коллинеарным вектору ___________

Ответ. Коллинеарны векторы ____ и ____

111

Компланарны ли векторы:

а) $\vec{a}\{-6;\ 4;\ -12\}$, $\vec{b}\{1{,}5;\ -1;\ 3\}$, $\vec{c}\{0;\ 4;\ -12\}$;

б) $\vec{p}\{-1;\ 0;\ 2\}$, $\vec{q}\{-1;\ 3;\ 0\}$, $\vec{t}\{2;\ 3;\ -6\}$?

Решение.

а) Любые три вектора, два из которых коллинеарны, являются ____________________________. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, так как их координаты ________________________: $\frac{-6}{1{,}5} = \frac{4}{\_\_} =$ __________. Поэтому векторы $\vec{a}$, ____ и $\vec{c}$ ____________________

б) Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ ________________________, так как их ______________

________________________ не пропорциональны: $\frac{-1}{-1}$ ___ $\frac{0}{3}$. В соответствии

с ____________________ компланарности трёх __________, если вектор $\vec{t}$

можно разложить по __________________ $\vec{p}$ и $\vec{q}$, то векторы $\vec{p}$, ___ и $\vec{t}$

____

Проверим, можно ли вектор $\vec{t}$ ____________________ по векторам $\vec{q}$

и ___, т. е. существуют ли ______ x и y, такие, что $\vec{t} = x\vec{p} +$ _______

Запишем это равенство в координатах:

$$\begin{cases} 2 = x \cdot (-1) + \_\_\_\_\_\_ \\ 3 = \_\_\_\_\_\_ + y \cdot 3 \\ \_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений: из третьего уравнения находим $x =$ ___, а из второго уравнения находим $y =$ ___. Подставляя найденные значения x и y в первое ________________, получаем верное

____

Следовательно, пара чисел $x =$ ___ и $y = 1$ ________________________ решением системы уравнений, т. е. $\vec{t} = -3\vec{p} +$ ___ $\vec{q}$. Поэтому векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{t}$ ____________________

Ответ.

а) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ______________________

б) Векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{t}$ ______________________

112

Запишите координаты радиуса-вектора точки $P(2;\ -1;\ 3)$.

Решение.

Радиусом-вектором точки P является ____________, начало которого совпадает с ____________ координат, а конец — с точкой ___, т. е. вектор ________ с координатами {___; ___; ___}.

Ответ. $\overrightarrow{OP}$\{________________________\}.

113

Дан вектор $\overrightarrow{OT}\{2; -1; 0\}$. Запишите координаты точки T, если точка O — начало координат.

Решение.

Так как началом вектора $\overrightarrow{OT}$ служит ____________ координат, то вектор ______ является ____________________________ точки T, поэтому $T($ ___ ; ___ ; ___ $)$.

Ответ. ________________

114

Даны три точки: $A(5; -3; 2)$, $B(0; 1; -2)$, $C(2; -2; 0)$.

а) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

б) Разложите по координатным векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ вектор $\overrightarrow{BC}$.

Решение.

а) $\overrightarrow{AB}\{0 -$ ___ ; ___ $- (-3);$ ____ $\}$, т. е. $\overrightarrow{AB}\{$ ____ ; ____ ; ____ $\}$;

б) $\overrightarrow{BC}\{2 -$ ___ ; ____ $- 1;$ ______ $\}$, т. е. $\overrightarrow{BC}\{$ ________________ $\}$.

Следовательно, $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} -$ ___ $\vec{j} +$ ___

Ответ.

а) ______________________________

б) ______________________________

115

Даны точки $P(0; 1; -4)$, $M(-2; -1; 0)$, $E(3; 5; 0)$, $C(-1; 0; -2)$, $T(1; 3; 4)$.

а) Лежит ли точка C на прямой PM?

б) Лежит ли точка E на прямой CM?

в) Равны ли векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{EC}$?

г) Равны ли векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{ET}$?

Решение.

а) Если векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{MC}$ коллинеарны, то точки P, M и C ____________________ на одной прямой. $\overrightarrow{PM}\{-2 - 0;$ ___ ; ___ $\}$, т. е. $\overrightarrow{PM}\{$ ___ ; ___ ; $4\}$. $\overrightarrow{MC}\{$ ____ ; $0 - (-1);$ ____ $\}$, т. е. $\overrightarrow{MC}\{$ __________ $\}$.

Так как $\overrightarrow{PM}$ = ___ $\overrightarrow{MC}$, то векторы $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{MC}$ ______________,

следовательно, точки P, M и C __________ на одной прямой.

б) Выясним, являются ли коллинеарными ________ $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CE}$: $\overrightarrow{CM}$\{ ___ ; ___ ; ___ \}, $\overrightarrow{CE}$\{ ___ ; ___ ; ___ \}, следовательно, векторы $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CE}$ ____________. Значит, точки C, M и E __________ на одной прямой, иначе векторы $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CE}$ были бы __________

в) Найдём координаты векторов $\overrightarrow{PM}$ и $\overrightarrow{EC}$: $\overrightarrow{PM}$\{–2; ___ ; ___ \}, $\overrightarrow{EC}$\{ ___ ; ___ ; –2\}. Следовательно, $\overrightarrow{PM}$ ___ $\overrightarrow{EC}$.

г) $\overrightarrow{PM}$\{ ___ ; ___ ; ___ \}, $\overrightarrow{ET}$\{ ___ ; ___ ; ___ \}, следовательно, $\overrightarrow{PM}$ ___ $\overrightarrow{ET}$.

Ответ.

а) Точка C ____________ на прямой PM;

б) точка E ____________ на прямой ______

в) $\overrightarrow{PM}$ ___ $\overrightarrow{EC}$;

г) $\overrightarrow{PM}$ ___ $\overrightarrow{ET}$.

116

Какие из точек $A(2; -1; -3)$, $B(5; -3; -3)$, $C(1; -1; -1)$, $E(2; -2; -1)$, $H(2; 1; -9)$ лежат в одной плоскости?

Решение.

Если векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AE}$ компланарны, то точки A, B, ___ и E ______ в одной плоскости, а если не компланарны, то точки A, B, ___ и ___ __________ в одной __________

1) Найдём координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB}$\{3; ___ ; ___ \}, $\overrightarrow{AC}$\{ ___ ; 0; ___ \}, $\overrightarrow{AE}$\{ ___ ; ___ ; 2\}. Три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AE}$ компланарны, если один из них ______ разложить по двум другим, т. е. если существуют ________ x и y, такие, что $\overrightarrow{AB}$ = ___ + $y\overrightarrow{AE}$. Запишем это равенство в координатах:

$$\begin{cases} 3 = -1x + \_\_\_\; y \\ -2 = \_\_\_\_\_\_ \\ 0 = \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Из двух первых уравнений системы получаем $x =$ ____ и $y =$ ____ Подставим эти значения в третье уравнение: $0 = -3 \cdot 2 +$ ______. Это равенство неверно, поэтому векторы $\overrightarrow{AB}$, ______ и $\overrightarrow{AE}$ ____________ __________, и, значит, точки A, B, C и ________________ в одной плоскости.

2) Выясним, компланарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AH}$:

$$\overrightarrow{AB}\{3;\ -2;\ \_\_\_\},\ \overrightarrow{AC}\{\_\_\_;\ 0;\ 2\},\ \overrightarrow{AH}\{\_\_\_;\ \_\_\_;\ \_\_\_\}.$$

$$\begin{cases} 3 = -x + \_\_\_\_ \\ -2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Из двух первых __________________ системы получаем $x =$ ____ и $y =$ ____. Подставим эти значения в третье уравнение: ______ = = ____________. Последнее равенство ____________, поэтому векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и ___________________________, и, следовательно, точки A, B, C и ______________ в одной плоскости.

Ответ. В одной плоскости лежат точки ______________

117

Точки $A(3;\ 0;\ -2)$, $B(0;\ -3;\ 1)$ и $C(1;\ -2;\ 0)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

Решение.

Точка пересечения диагоналей параллелограмма является __________ _______ каждой из диагоналей, поэтому достаточно найти координаты середины ____________________________ AC:

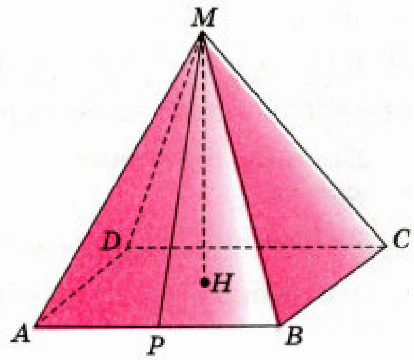
$x = \frac{1}{2}(3 + \_\_\_) = \_\_\_$; $y = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_$; $z = \_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_$

Ответ. (___; ___; ___).

118

Точки $M(7;\ 7;\ 11)$, $A(0;\ 8;\ 1)$, $B(6;\ 0;\ 1)$ и $C(14;\ 6;\ 1)$ являются вершинами правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$. Найдите высоту, апофему и площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.



1) Высота правильной пирамиды проходит через ________ её основания. Основанием правильной четырёхугольной ____________ служит ____________ Его центр совпадает с точкой пересечения ______________ , которая является __________________ каждой из диагоналей квадрата.

Найдём координаты точки H — середины ________________ AC:

$x = \frac{1}{2}(14 + \_\_\_) = \_\_\_$; $y = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_$; $z = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_$.

Итак, $H(7;\ \_\_\_;\ \_\_\_)$.

Вычислим высоту MH пирамиды:

$$MH = \sqrt{(7-\_\_)^2 + (\_\_\_\_\_\_)^2 + \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_$$

2) Апофема правильной пирамиды — это отрезок, соединяющий ____________ пирамиды с ________________ стороны основания. Найдём координаты точки P — середины ______________ AB основания:

$x = \frac{1}{2}(0 + \_\_\_) = \_\_\_$; $y = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$; $z = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$. Итак,

$P(\_\_\_\_\_\_\_\_)$. Следовательно, $MP = \sqrt{(3-\_\_)^2 + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} =$

$= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\ \sqrt{5}$.

3) Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна ____________ произведения __________________ основания и апофемы пирамиды. Найдём сторону AB ____________________ пирамиды:

$$AB = \sqrt{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

Вычислим площадь боковой ________________________ пирамиды:

$$S = \frac{1}{2}\ \_\_\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Ответ. Высота пирамиды равна ______

Апофема пирамиды равна ______

Площадь боковой поверхности пирамиды равна _________

119

Докажите, что треугольник ABC, где $A(-5; 5; 1)$, $B(-4; 3; 0)$, $C(-5; 3; 1)$, является прямоугольным.

Доказательство.

Проверим, выполняется ли для данного треугольника условие теоремы, _________ теореме Пифагора. Найдём квадраты __________ треугольника: $AB^2 = (-4 - (\_\_\_))^2 + (\_\_\_)^2 + \_\_ = 1^2 + \_\_ + \_\_ = \_\_$

$AC^2 =$ ____

$BC^2 =$ ____

Так как $AC^2 + BC^2 =$ _____ , то по теореме, обратной теореме ________ , треугольник ABC ______________ прямоугольным, причём $\angle$ __ $= 90°$.

120

Напишите уравнение сферы с центром в точке $P(-1; 3; 5)$ и радиусом $\frac{9}{4}$.

Решение.

$(x \_\_\_\_)^2 + (y \_\_\_\_\_)^2 + (z \_\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_$

121

Напишите уравнение сферы с центром в точке $P(2; 3; -3)$, проходящей через точку $M(2; -1; 1)$.

Решение.

$R = PM =$ _____________________________________ . Уравнение сферы имеет вид $(x - \_\_\_\_)^2 + (y - \_\_\_\_)^2 + (z + \_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_$

122

Напишите уравнение сферы с диаметром MN, если $M(-3; 5; 0)$, $N(1; -7; -2)$.

Решение.

Пусть $C(x_0; y_0; z_0)$ — центр искомой сферы. Так как точка C — середина отрезка MN, то $x_0 = \frac{\_\_\_\_\_\_}{2} = \_\_\_\_\_$; $y_0 = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$;

z_0 = ______ = ______ ; C (____________________). Радиус сферы равен отрезку CM, поэтому

$$R=\sqrt{(\_\_\_\_\_)^2+(\_\_\_\_\_)^2+(\_\_\_\_\_)^2}=\_\_\_\_\_\_$$

Итак, уравнение сферы имеет вид

$$(x\ \_\_\_\_\_)^2+(y\ \_\_\_\_\_)^2+(z\ \_\_\_\_\_)^2=\_\_\_\_\_\_$$

123

Найдите координаты центра C и радиус R сферы, заданной уравнением:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{7}{2}$;

б) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 13$;

в) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 8)^2 = 25$.

Решение.

а) C(__________), R = ________

б) C(__________), R = ________

в) C(__________), R = ________

124

Докажите, что данное уравнение является уравнением сферы, и найдите координаты центра и радиус этой сферы:

а) $x^2 - 8x + y^2 + z^2 - 16 = 0$;

б) $x^2 - 6x + 2y + z^2 + y^2 - 10z = 14$.

Решение.

а) Уравнение $x^2 - 8x + y^2 + z^2 - 16 = 0$ можно записать в виде $x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2 = 32$ или $(x\ \_\_\_\_)^2 + (y\ \_\_\_\_\_)^2 + (z\ \_\_\_\_\_)^2 =$ = __________, поэтому оно является уравнением сферы с центром C(_________) и радиусом R = _______

б) Уравнение $x^2 - 6x + 2y + z^2 + y^2 - 10z = 14$ можно записать в виде $(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 10z\ \_\_\_\_\_) =$ ________ или $(x + \_\_\_\_)^2 + (y + \_\_\_\_\_)^2 + (z + \_\_\_\_\_)^2 =$ _____, поэтому оно является уравнением сферы с центром C(__________) и радиусом R = _______

125

Напишите уравнение сферы, радиус которой равен единице, если известно, что сфера проходит через точки $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(0;\ 1;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ -1)$.

Решение.

Уравнение сферы имеет вид

$$(\_\_ - x_0)^2 + (\_\_\_\_\_\_)^2 + (\_\_\_\_\_\_)^2 = R^2 = \_\_$$

Так как координаты данных точек должны удовлетворять этому уравнению, то, подставляя их в уравнение, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \\ x_0^2 + (1 - y_0)^2 + z_0^2 = 1 \\ x_0^2 + y_0^2 + (-1 - z_0)^2 = 1. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $2y_0$ ______, т. е. $y_0 = \_\_$, а вычитая из третьего уравнения первое, находим $z_0 = -\frac{1}{2}$. Подставив найденные значения y_0 и z_0 в первое уравнение, найдём x_0: $x_0 = \_\_$

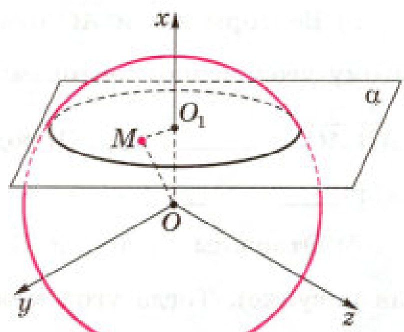
Следовательно, уравнение сферы имеет вид (два решения)

$$(x - \_\_\_\_)^2 + (y - \_\_\_\_)^2 + (z + \_\_\_\_)^2 = 1$$

и

$$(x + \_\_\_\_)^2 + (y - \_\_\_\_)^2 + (z + \_\_\_\_)^2 = \_\_$$

126



Найдите радиус сечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ плоскостью, проходящей через точку $M(2;\ 4;\ 5)$ и перпендикулярной к оси абсцисс. (Задача **746** учебника.)

Решение.

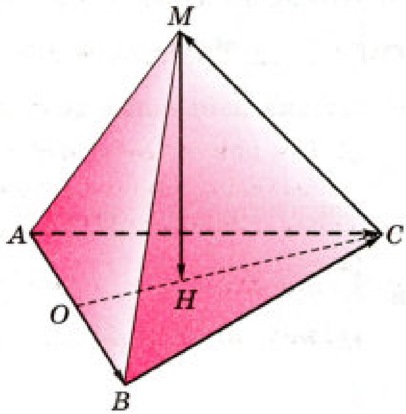
Центром данной сферы является точка $O(\_\_;\ \_\_;\ \_\_)$, а её радиус R равен __. Пусть OO_1 — перпендикуляр, проведённый из точки O к секущей плоскости. Так как секущая плоскость по условию перпендикулярна к ____________________________, то отрезок OO_1 лежит на ________________________. Абсцисса любой точки секущей плоскости равна абсциссе данной точки M, т. е. равна ______. Поэтому $OO_1 =$ __________, а искомый радиус r сечения находим по формуле $r = O_1M = \sqrt{R^2 - \underline{\qquad}}$, т. е. $r = \sqrt{\underline{\qquad} - \underline{\qquad}} = \underline{\qquad\quad}$

Ответ. _____________

§ 2 Скалярное произведение векторов

127

Отрезок MH — высота правильного тетраэдра $MABC$ с ребром, равным 2 см. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OB}$; д) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CM}$; е) $\overrightarrow{MH}$ и $\overrightarrow{AB}$.



Решение.

Все грани правильного тетраэдра — _________________________ треугольники, поэтому каждый из углов в этих треугольниках равен ___________

а) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ отложены от ______________________ точки, поэтому угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и _____________ равен углу BAC, т. е. $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}} =$ ___________. Отсюда получаем $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \underline{\qquad} \cdot \cos \underline{\qquad} =$ $= 4 \cdot \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

б) Отложим от точки B вектор $\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB}$ (выполните построение на рисунке). Тогда угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ будет равен углу ______________. Так как углы A_1BC и ABC ______________, то $\angle A_1BC =$

$= 180° -$ ______ = ______ . Поэтому $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}}$ = ______ . Следовательно, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ = ____ · ____ · cos ________ = ______ = ______

в) Отложим от точки C векторы $\overrightarrow{CB_2} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA_2} = \overrightarrow{AC}$ (выполните построение на рисунке). Угол между векторами $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен углу ________________ . Так как углы A_2CB_2 и ACB — ____________ ______ , то $\angle A_2CB_2 = \angle$ ______ = ______ . Следовательно, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ = = ______ · ______ · ______ = ________

г) Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OB}$ ____________________ , поэтому угол между ними равен _____ . Следовательно, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$ = _______________

д) Так как отрезок MH является _______________ правильного тетраэдра, то точка H — ____________ основания тетраэдра, поэтому точка H лежит на _______________ треугольника ABC, и, значит, $CO \perp$ _____ . Поскольку прямая CO является проекцией прямой _____ на плоскость ABC и $CO \perp$ _____ , то по теореме о трёх _______________ $CM \perp$ _____ . Следовательно, $\widehat{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CM}}$ = _______ . Поэтому $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM}$ = = _________ = _______ = ____

е) Так как отрезок MH — ___________ тетраэдра, то MH ___ ABC. Следовательно, по определению прямой, __________________ плоскости, прямая MH _______________ к _______________ прямой этой плоскости, в том числе MH ___ AB. Поэтому $\widehat{\overrightarrow{MH}\,\overrightarrow{AB}}$ = ___

Ответ. а) ___ ; б) ___ ; в) ___ ; г) ___ ; д) ___ ; е) ___

128

Даны векторы $\vec{a}\{4;\ 0;\ 0\}$ и $\vec{b}\{1;\ 0;\ -\sqrt{3}\}$. Найдите: а) $\vec{a}\ \vec{b}$; б) $\vec{b}\ \vec{a}$; в) $\vec{a}^{\,2}$; г) $|\vec{b}|$; д) $\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}$.

Решение.

а) $\vec{a}\ \vec{b} = 4 \cdot$ ___ + _____ + _____ = ___

б) По ________________________ закону скалярного ___________ векторов имеем $\widehat{\vec{b}\ \vec{a}}$ = _____ = _____

в) $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot$ ___ $= 4 \cdot$ ___ + _____ + _____ = ___

г) $|\vec{b}| = \sqrt{\_\_\_\_}$, где $\vec{b}^{\,2} = 1^2 + \_\_\_\_ + (\_\_\_\_)^2 = \_\_\_$. Следовательно, $|\vec{b}| = \sqrt{\_\_\_} = \_\_\_\_$

д) $\cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \dfrac{|4 \cdot \_\_\_ + \_\_\_ + \_\_\_|}{\sqrt{4^2 + \_\_ + \_\_ \cdot 2}} = \dfrac{\_\_\_\_}{4 \cdot \_\_\_\_} = \_\_\_\_$.

Поэтому $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \_\_$

129

При каком значении x векторы $\vec{a}\{x;\ -1;\ 0\}$ и $\vec{b}\{2;\ 6;\ -3\}$ перпендикулярны?

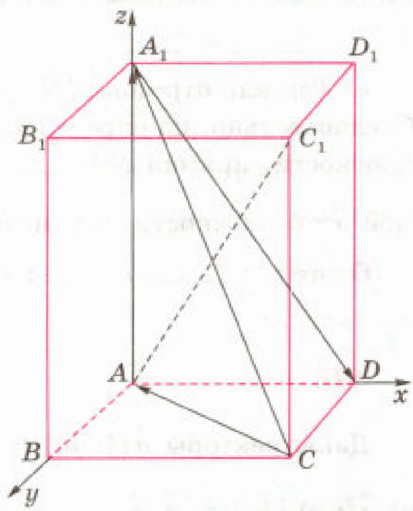
Решение.

Поскольку $\vec{a}\ \_\_\ \vec{0}$ и $\vec{b}\ \_\_\ \vec{0}$, то $\vec{a} \perp \_\_$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b} = \_\_$. Из условия $\vec{a}\vec{b} = \_\_$ получаем $x \cdot \_\_ + (\_\_) \cdot 6 + \_\_ = 0$. Решим полученное уравнение: $2x - \_\_ = 0$; $x = \_\_$

Ответ. ________

130

Точки $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 4;\ 0)$ и $A_1(0;\ 0;\ 5\sqrt{3})$ — вершины прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



Найдите: а) $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{A_1D}$; б) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA_1}$; в) косинус угла φ между прямыми A_1D и AC; г) синус угла α между прямой CA_1 и плоскостью ABC; д) длину диагонали A_1C.

Решение.

а) Найдём координаты ________ $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{A_1D}$: $\overrightarrow{AA_1}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\_\_\_\_\}$, $\overrightarrow{A_1D}\{\_\_;\ \_\_;\ \_\_\_\_\_\_\}$.

Следовательно, $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0 \cdot \_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_ \cdot (-5\sqrt{3}) = \_\_\_$

б) $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} + \_\_\_\_)$, $\overrightarrow{CA_1} = -\overrightarrow{A_1C} = -(\overrightarrow{A_1B_1} + \_\_\_\_ + \overrightarrow{A_1A}) = -(\overrightarrow{AB} + \_\_\_\_ - \_\_\_\_)$, где $\overrightarrow{AB}\{\_\_\_\_\_\_\}$, $\overrightarrow{AD}\{\_\_\_\_\}$, $\overrightarrow{AA_1}\{\_\_\_\_\_\_\}$. Значит, $\overrightarrow{CA}\{-3;\ \_\_\_\_;\ 0\}$, $\overrightarrow{CA_1}\{\_\_\_\_;\ -4;\ \_\_\_\_\}$.

Отсюда получаем $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA_1} = 3 \cdot \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

в) Направляющими векторами прямых $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{AC}$ служат векторы $\overrightarrow{A_1D}$ ___ ; ___ ; ______ } и $\overrightarrow{AC}\{$ ___ ; ___ ; ___ }. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{|0\cdot \_\_ + \_\_ \cdot 4 + \_\_\_\_|}{\sqrt{\_\_ + 4^2 + (\_\_\_)^2}\cdot\sqrt{\_\_ + \_\_ + \_\_}} = \frac{16}{\sqrt{91}\cdot\_\_\_} = \frac{16}{455}\sqrt{\_\_\_}$$

г) Синус угла α между прямой CA_1 и ______________ ABC равен модулю ______________ угла β между направляющим ____________ $\overrightarrow{CA_1}$ прямой CA_1 и вектором $\overrightarrow{AA_1}$, перпендикулярным плоскости ____ Так как $\overrightarrow{CA_1}\{$ ____________ $\}$, $\overrightarrow{AA_1}\{$ ____________ $\}$, то $\sin\alpha = |\_\_\_\_\_\_| =$

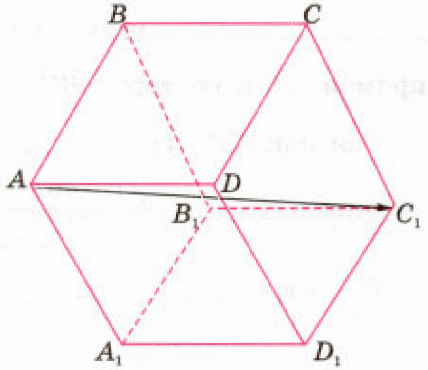
$$= \frac{|\_\_\_\_\_\_\_\_|}{\sqrt{\_\_\_\_\_\_}\cdot\sqrt{\_\_\_\_\_\_}} = \frac{|\_\_\_\_|}{\_\_\_\_\cdot 5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\_\_\_\_}.$$

д) Длина отрезка A_1C равна ____________ вектора $\overrightarrow{CA_1}$, т. е. $A_1C =$
$= |\overrightarrow{CA_1}| = \sqrt{(\_\_\_\_\_)^2} = \sqrt{(-3)^2 + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_$

Ответ. а) ______ ; б) ______ ; в) ______ ; г) ______ ; д) ______

131

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все грани — ромбы со стороной a. Все углы граней при вершине A равны 60°. Найдите длину диагонали AC_1.



Решение.

По правилу параллелепипеда получаем $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \_\_\_\_ + \_\_\_\_$. Так как $AC_1 = |\_\_\_\_\_\_| = \sqrt{\overrightarrow{AC_1}^2}$, найдём сначала $\overrightarrow{AC_1}^2$:

$\overrightarrow{AC_1}^2 = (\_\_\_\_ + \overrightarrow{AB} + \_\_\_\_)^2 =$

$= (\overrightarrow{AA_1} + (\_\_\_\_ + \_\_\_\_))^2 =$

$= \overrightarrow{AA_1}^2 + 2\overrightarrow{AA_1}(\_\_\_\_ + \_\_\_\_) + (\_\_\_\_ + \_\_\_\_)^2 =$

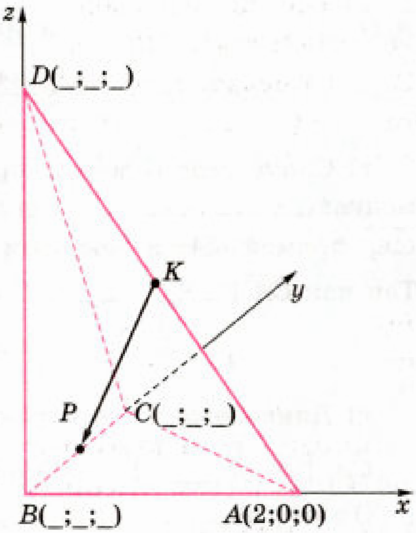
$= \overrightarrow{AA_1}^2 + \_\_\_\_ + \overrightarrow{AD}^2 + 2(\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB} + \_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_) =$

$= a^2 + a^2 + \_\_\_\_\ 2(a^2\cos 60^\circ + \_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_) =$

$= \_\_\_\ a^2 + 2\cdot 3\ \_\_\_\ \cdot \frac{1}{2} = 6\ \_\_\_\_\_$

Итак, $AC_1^2 = \_\_\_\_\ a^2$, следовательно, $AC_1 = \_\_\_\_\_\_$

Ответ. ______________



В тетраэдре $ABCD$ $\angle ABC = \angle ABD = \angle CBD = 90°$, $AB = BD = 2$, $BC = 1$. Вычислите синус угла между прямой, проходящей через середины рёбер AD и BC, и плоскостью грани ABD. (Задача **711**а учебника.)

Решение.

По условию $\angle ABC = \angle$ ________ $= \angle CBD =$ ___. Поэтому можно ввести прямоугольную систему координат с началом в точке B так, как показано на рисунке. Тогда $A(2;\ 0;\ \_\_)$, $C(0;\ \_\_;\ 0)$, $D(0;\ \_\_;\ \_\_)$.

1) Пусть точка K — середина ребра AD, точка P — середина ________ BC. Тогда $K(1;\ \_\_;\ \_\_)$, $P(;\ 0{,}5;\ \_\_)$.

2) Пусть φ — угол между прямой KP и ____________ грани ABD. Синус угла φ равен модулю ____________ угла β между ____________ вектором $\overrightarrow{KP}$ прямой KP и вектором $\overrightarrow{BC}$, ____________ к плоскости ABD.

Так как $\overrightarrow{KP}\{-1;\ \_\_\_;\ \_\_\_\}$, $\overrightarrow{BC}\{0;\ \_\_\_;\ \_\_\_\}$, то

$$\sin\varphi = |\cos\_\_| = \frac{|-1\cdot 0 + 0{,}5\cdot \_\_ + (\_\_)\cdot \_\_|}{\sqrt{1^2 + \_\_\_}\cdot\sqrt{0^2 + \_\_\_}} = \frac{|\_\_\_|}{\sqrt{\_\_\_}\cdot\sqrt{\_\_}} = \_\_\_$$

Ответ. ________

§ 3 Движения

133

Найдите координаты точек, в которые переходят точки $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(2;\ 0;\ -3)$, $C(0;\ -1;\ 2)$ при:

а) центральной симметрии относительно начала координат;

б) осевой симметрии относительно оси ординат;

в) зеркальной симметрии относительно плоскости Oxz.

Решение.

а) При центральной ______________ относительно начала координат точка $M(x;\ y;\ z)$ переходит в точку $M_1(-x;$ ______; ______).
Следовательно, точка $A(2;\ -1;$ __) переходит в точку $A_1($ __ ; __ ; $-3)$, точка $B($ ________) — в точку $B_1(-2;$ __ ; __), точка $C($ ________) — в точку $C_1($ ________).

б) При осевой ______________ относительно ________ ординат точка $M(x;\ y;\ z)$ переходит в точку $M_2($ __ ; __ ; $-z)$. Следовательно, точка $A($ __ ; $-1;\ 3)$ переходит в точку $A_2(-2;$ __ ; __), точка $B(2;$ __ ; __) — в точку $B_2($ __ ; __ ; $3)$, точка $C($ ________) — в точку $C_2($ __ ; $-1;$ __).

в) При ________ симметрии относительно ________ Oxz точка $M(x;\ y;\ z)$ переходит в точку $M_3(x;$ __ ; __). Следовательно, точка $A(2;$ __ ; $3)$ переходит в точку $A_3($ __ ; $1;$ __), точка $B($ __ ; $0;\ -3)$ — в точку $B_3(2;$ __ ; __), точка $C($ ____) — в точку $C_3($ __ ; __ ; __).

Ответ.

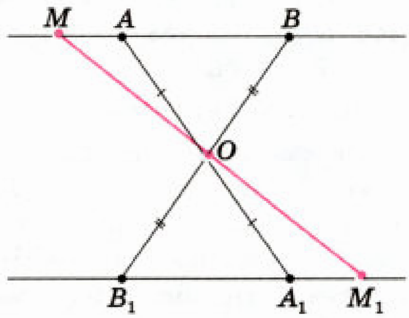
а) $A_1($ ________), $B_1($ ________), $C_1($ ________);

б) $A_2($ ________), ______________________

в) ______________________

134

Докажите, что при центральной симметрии прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую. (Задача **720**а учебника.)



Доказательство.

1) Рассмотрим центральную ________ ______________ с центром O и произвольную прямую AB, не проходящую через точку O. Через прямую AB и ________ O проходит ________, и притом только ________ . Обозначим её буквой α. Точки A и B переходят при данной симметрии в ______________ A_1 и B_1, также лежащие в ________ α. Поэтому и вся прямая A_1B_1 ______________ в плоскости α.

2) Докажем, что $A_1B_1 \parallel$ ______ . Так как $\triangle OAB$ ______ $\triangle OA_1B_1$ (по двум ____________ и ____________ между ними: $OA =$ ______ , ______ $= OB_1$, $\angle AOB = \angle$ ____________), то $\angle ABO =$ ______ . Значит, равны ____________ лежащие углы при пересечении прямых AB и ______ секущей ______ . Поэтому AB ______ A_1B_1.

3) Осталось доказать, что при симметрии с центром O прямая AB ____________________ на прямую ______ . Для этого нужно доказать, что при данной симметрии любая ______________ M прямой AB переходит в некоторую точку прямой ______ , и, обратно, произвольная точка N_1 прямой A_1B_1 симметрична какой-то точке ______________ AB.

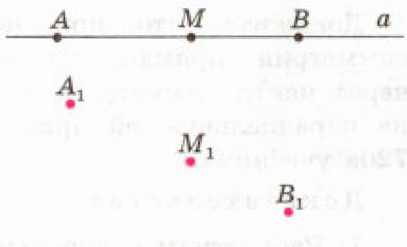
Рассмотрим произвольную точку M на ______________ AB, отличную от точки A, и проведём прямую MO. Она пересекает ____________ A_1B_1 в точке M_1. Тогда $\angle MOA = \angle$ ____________ (вертикальные углы), $\angle MAO = \angle$ ____________ (____________________________ при пересечении ______________________ прямых __________ и A_1B_1 секущей __________). Кроме того, $AO =$ _______ (точки A и A_1 ____________________ относительно точки O). Следовательно, $\triangle MAO = \triangle$ ____________ (по стороне и ____). Отсюда следует, что $MO =$ $=$ _______ , и, значит, точка M при симметрии с центром O переходит в точку _______ , лежащую на прямой A_1B_1.

Аналогично доказывается, что любая точка N_1 прямой A_1B_1 симметрична некоторой ____________ N прямой AB.

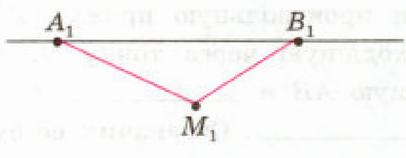
135

Докажите, что при движении прямая отображается на прямую. (Задача **727**а учебника.)

Доказательство.



а)



б)

Рассмотрим произвольную прямую a. Пусть точки A и B, лежащие на прямой ______ , при данном движении f переходят в точки A_1 и B_1. Докажем, что при этом прямая a отображается на ______________________________ A_1B_1, т. е.:

а) каждая точка M прямой a переходит в какую-то _______ прямой A_1B_1;

б) в каждую точку M_1 прямой A_1B_1 ________________________ какая-то точка прямой __

Возьмём произвольную точку M на ____________________ a. Пусть для определённости точка M лежит между ________ A и B (при другом расположении точек доказательство аналогично). Тогда $AM + MB =$ ______

Пусть при данном движении f точка M переходит в какую-то ______________ M_1. Поскольку f — движение, то A_1M_1 ____ AM, $M_1B_1 =$ $=$ _____ , $A_1B_1 =$ _____ . Следовательно, $A_1M_1 + M_1B_1 = AM +$ ______ $=$ $=$ _____ $= A_1B_1$.

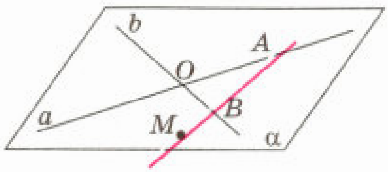
Итак, $A_1M_1 +$ _____ $= A_1B_1$, т. е. точка M_1 лежит __________ точками ____________________ B_1 (в противном случае согласно неравенству ______________________________ A_1M_1 ___ $M_1B_1 > A_1B_1$).

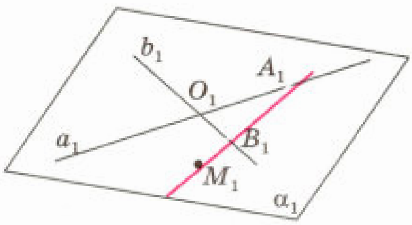
б) Аналогично можно доказать, что в ____________________ точку M_1 прямой A_1B_1 переходит какая-то ______________________________ a.

Таким образом, при движении прямая ______________________________ на прямую.

136

Докажите, что при движении плоскость отображается на плоскость. (Задача **727**б учебника.)





Доказательство.

Возьмём произвольную плоскость α и проведём в ней две пересекающиеся прямые a и b (O — точка пересечения). При данном движении ________ a и b переходят в некоторые __________ a_1 и b_1, точка O — в какую-то точку O_1. Так как $O \in$ ____ и O ____ b, то O_1 ____ a_1 и $O_1 \in$ ____ , следовательно, прямые a_1 и b_1 ______________ в точке O_1.

Через пересекающиеся прямые a_1 и ___ проходит плоскость, и притом ______________________ (обозначим её α_1). Докажем, что при данном движении ________________ α отображается на плоскость α_1.

Для этого надо доказать, что:

а) произвольная точка M плоскости α переходит в некоторую ____________ M_1 плоскости ___

б) в любую точку плоскости α_1 переходит некоторая ______________ ___________ α.

а) Через произвольную точку M плоскости α проведём прямую, пересекающую _________ a и ____ в каких-то точках A и B. При данном движении точка A ______________ в некоторую _______________ A_1 прямой a_1, точка B — в ________ B_1 прямой ___, а прямая AB — в прямую _____. При этом точка M прямой AB переходит в некоторую _________ M_1, лежащую на _________________ A_1B_1. Так как A_1 ___ α_1 и B_1 ___ α_1, то прямая A_1B_1 лежит в ___________________, в частности M_1 ___ α_1.

б) Аналогично доказывается, что в любую точку _______________ α_1 переходит _________ точка плоскости ____

Таким образом, при движении плоскость ___________________________ на плоскость.

СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ПУНКТАМИ УЧЕБНИКА И ЗАДАЧАМИ ТЕТРАДИ

Номера пунктов учебника	Тема	Номера задач тетради
38, 39	Понятие цилиндра. Площадь поверхности цилиндра	1—11
40	Понятие конуса	12, 13
41	Площадь поверхности конуса	14—18
42	Усечённый конус	19—21
43	Сфера и шар	22, 23, 38, 39
44	Взаимное расположение сферы и плоскости	24—27, 29, 31
45	Касательная плоскость к сфере	32—35
46	Площадь сферы	36, 37
47*	Взаимное расположение сферы и прямой	28, 30
27, 32—34, 38—46	Разные задачи на многогранники, цилиндр, конус и шар	40—47
52,53	Понятие объёма. Объём прямоугольного параллелепипеда	48—52
54	Объём прямой призмы	53
55	Объём цилиндра	54
57	Объём наклонной призмы	55—57
58	Объём пирамиды	58, 59, 61
59	Объём конуса	60, 62
60	Объём шара	63, 64
61	Объём шарового сегмента и шарового слоя	65
63, 64	Понятие вектора. Равенство векторов	66—69

Номера пунктов учебника	Тема	Номера задач тетради
65, 66	Сложение и вычитание векторов. Сумма нескольких векторов	70—76
67	Умножение вектора на число	77—85
68	Компланарные векторы	86—91
69	Правило параллелепипеда	92
70	Разложение вектора по трём некомпланарным векторам	93—95
71	Прямоугольная система координат в пространстве	96—101
72	Координаты вектора	102—111
73	Связь между координатами векторов и координатами точек	112—116
74	Простейшие задачи в координатах	117—119
75	Уравнение сферы	120—126
76, 77	Угол между векторами. Скалярное произведение векторов	127—129
78	Вычисление углов между прямыми и плоскостями	130—132
80—82	Центральная симметрия. Осевая симметрия. Зеркальная симметрия	133—136

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Бутузов Валентин Фёдорович
Глазков Юрий Александрович
Юдина Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая тетрадь
11 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

Базовый и углублённый уровни

Редакция математики и информатики
Заведующий редакцией *Е. В. Эргле*
Ответственный за выпуск *Л. В. Кузнецова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художник *О. П. Богомолова*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Компьютерная графика *В. В. Брагина*
Компьютерная вёрстка *Н. А. Артемьевой*
Техническое редактирование *О. В. Храбровой*
Корректор *Е. В. Барановская*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93—953000.
Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 22.10.2020.
Формат $70\times100^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать цифровая.
Уч.-изд. л. 4,79. Тираж 860 экз. Заказ № 12378МПР.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16,
стр. 3, этаж 4, помещение I.

Предложения по оформлению и содержанию учебников —
электронная почта «Горячей линии» — fpu@prosv.ru.

Отпечатано в России.

Отпечатано в ООО "Типография "Миттель Пресс".
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

Дополнительные материалы размещены
в электронном каталоге издательства **«Просвещение»**
на интернет-ресурсе **www.prosv.ru**

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВНИ

МГУ – ШКОЛЕ

Завершённая предметная линия учебников по геометрии для 10—11 классов:

- **Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10—11 классы (авторы Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.)**

Учебно-методический комплект по геометрии для 11 класса:

- Сборник рабочих программ
- Учебник (авторы Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.)
- **Рабочая тетрадь** (авторы В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, И. И. Юдина)
- Дидактические материалы (автор Б. Г. Зив)
- Самостоятельные работы (автор М. А. Иченская)
- Контрольные работы. (автор М. А. Иченская)
- Поурочные разработки (авторы С. М. Саакян, В. Ф. Бутузов)

ISBN 978-5-09-080067-9

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
www.prosv.ru