11 АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

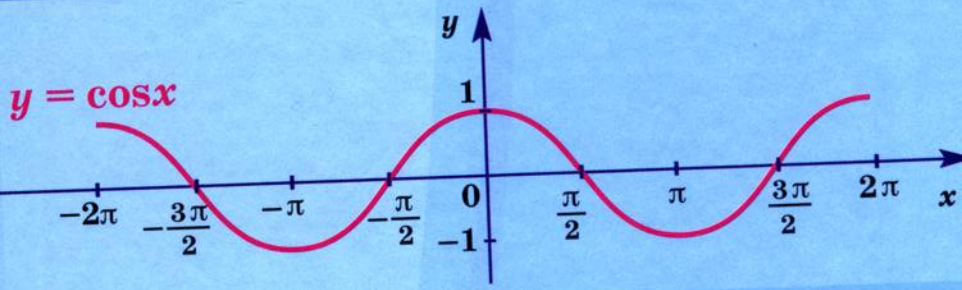
Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

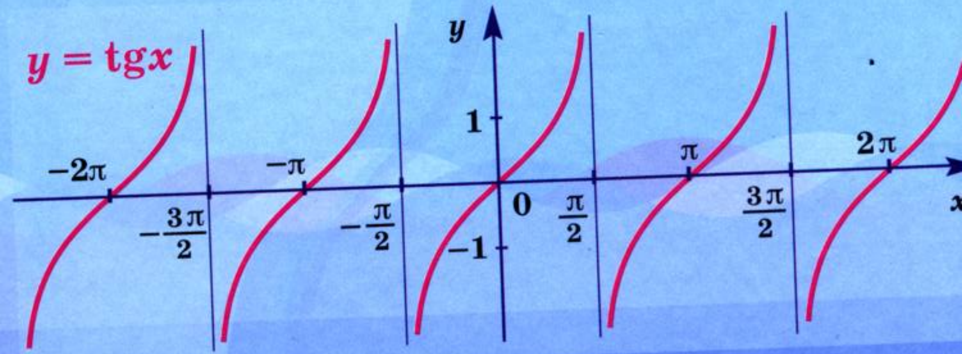
АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

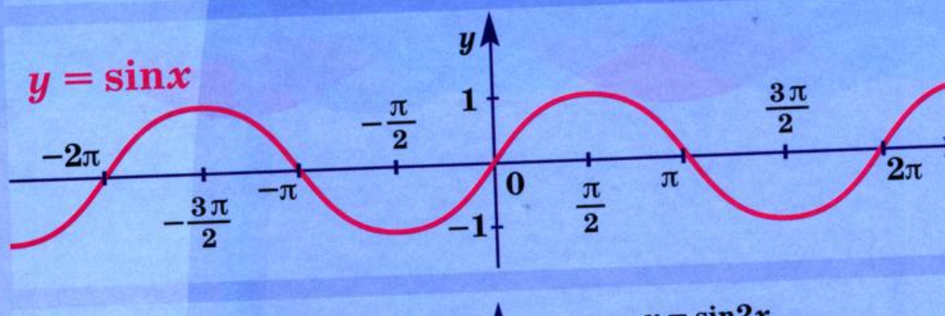
11

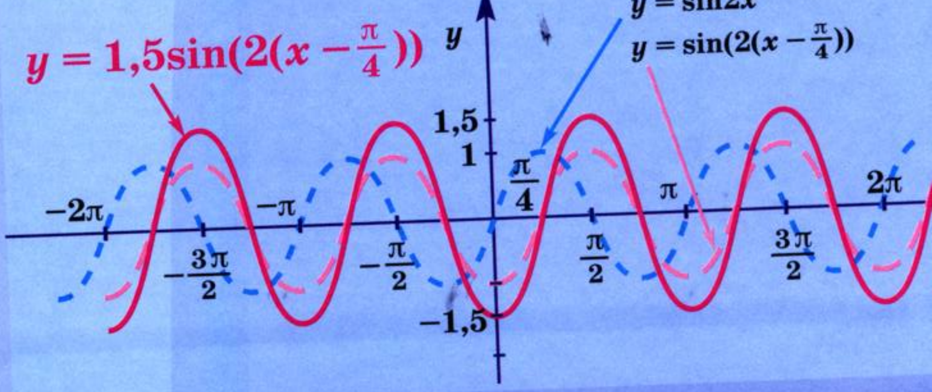
ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ









ПРОИЗВОДНАЯ

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f''(x) = (f'(x))'$$

$(kx+b)' = k$

$(x^p)' = px^{p-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln x$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$(cf(x))' = cf'(x)$

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'$

ИНТЕГРАЛ

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

$$F'(x) = f(x)$$

Функция	Первообразная
$x^p,\ p \neq -1$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\dfrac{1}{x},\ x > 0,\ x < 0$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11 класс

Учебник

для общеобразовательных организаций

Базовый и углублённый уровни

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

4-е издание

Москва
«Просвещение»
2017

УДК 373.167.1:[512 + 517]
ББК 22.14я72
М34

Авторы:
Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова,
М. И. Шабунин

Учебник имеет **положительные экспертные заключения** по результатам **научной** (заключение РАН № 10106-5215/80 от 15.10.2013 г.), **педагогической** (заключения РАО № 409 от 29.01.2014 г., № 212 от 05.02.2015 г.) и **общественной** (заключения РКС № 394 от 07.02.2014 г., № 882 от 01.04.2015 г.) экспертиз.

Математика: алгебра и начала математического
М34 анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин]. — 4-е изд. — М. : Просвещение, 2017. — 384 с. : ил. — ISBN 978-5-09-049531-8.

Данный учебник является второй частью комплекта учебников «Алгебра и начала математического анализа» для 10 и 11 классов. В этих учебниках изложены по принципу структурного вложения фактически два курса, соответствующие стандартам образования: один на базовом, другой на углублённом уровне.

Комплект обладает свойством преемственности со всеми действующими учебниками алгебры основной школы. Наилучшие преемственные связи установлены с комплектом учебников алгебры для 7—9 классов авторов Ю. М. Колягина, М. В. Ткачёвой, Н. Е. Фёдоровой, М. И. Шабунина.

В учебнике содержится избыточная разноуровневая система задач и упражнений (многие задачи приведены с решениями и указаниями), позволяющая успешно подготовиться к ЕГЭ. Практическая, прикладная и мировоззренческая направленность курса обеспечивает понимание роли математики во всех сферах деятельности человека.

УДК 373.167.1:[512 + 517]
ББК 22.14я72 + 22.161я72

ISBN 978-5-09-049531-8

Введение

Уважаемые одиннадцатиклассники!

В этом году вам предстоит с помощью учебника завершить изучение тригонометрии и приступить к освоению элементов математического анализа. Математический анализ занимается исследованием самых разнообразных функций методами дифференциального и интегрального исчислений, в основе которых лежит идея разбиения целого на бесконечно малые элементы. Освоив эти методы, вы сможете, например, быстро находить промежутки возрастания и убывания функции, наибольшее и наименьшее её значения, строить графики различных функций, находить площади сложных фигур, решать оптимизационные задачи и многое другое.

Методы математического анализа позволяют решать разнообразные практические и прикладные задачи техники, астрономии, экономики, физики и других естественных наук.

Две главы этого учебника посвящены изучению вопросов стохастики (науки о случайном). С их помощью вы научитесь видеть закономерности в массовых случайных явлениях (которые окружают нас и в повседневной жизни), сможете находить вероятности различных событий, поймёте, как рассчитать шансы выигрыша в лотерее или игре, как найти вероятность одновременного наступления двух событий и др.

Последняя глава этого учебника посвящена повторению всего курса алгебры и начал математического анализа 10—11 классов. В этой главе систематизируются все ранее изученные вами методы решения уравнений, неравенств и их систем, а также даются подходы к решению задач с параметрами. Думаем, что материал этой главы будет полезен всем учащимся при подготовке к итоговой аттестации, особенно тем, кто планирует на ЕГЭ приступать к решению задач группы С.

Как устроен учебник и как им пользоваться, вы уже поняли в прошлом году (учебник для 11 класса организован так же, как и учебник для 10 класса). Напомним лишь обозначения, которые используются на его страницах:

материал для изучения на углублённом уровне

материал для интересующихся математикой

▷ ◀ решение задачи

○ ● обоснование утверждения или вывод формулы

25 упражнения для базового уровня

<u>**26**</u> упражнения для углублённого уровня

$\boxed{\mathbf{27}}$ упражнения для интересующихся математикой

Глава I

Тригонометрические функции

Я не мог понять содержание вашей статьи, так как она не оживлена иксами и игреками.

У. Томсон

Курс алгебры и начал математического анализа 10 класса завершился двумя главами, посвящёнными преобразованиям тригонометрических выражений, решению тригонометрических уравнений и неравенств. Вы узнали, что история появления и развития основных тригонометрических понятий охватывает более чем двухтысячелетний период, что начиная с XIII в. тригонометрия стала выделяться из астрономии как самостоятельный раздел математики. А в начале XVII в. потребности прикладных наук в выполнении сложных тригонометрических расчётов обусловили открытие логарифмов (первые логарифмические таблицы содержали только логарифмы тригонометрических выражений).

Вы знаете, что каждому действительному числу x соответствует единственная точка окружности с координатами $(\cos x; \sin x)$, т. е. каждому действительному числу x поставлены в соответствие числа $\cos x$ и $\sin x$. Поэтому можно говорить, что на множестве R определены функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$.

До XVII в. учение о тригонометрических функциях строилось на геометрической основе, его главной целью было решение треугольников, вычисление элементов геометрических фигур на земле, в космосе и в создаваемых технических сооружениях. С началом развития математического анализа в XVII в. тригонометрия постепенно становится его частью. Основоположником аналитической теории тригонометрических функций считается Л. Эйлер (1707—1783), именно он придал этой теории современный вид.

С XIX в. тригонометрия находит всё более широкое применение в механике, физике и технике, особенно при изучении периодических процессов (с понятием периода функции и свойством периодичности тригонометрических функций вы познакомитесь при изучении данной главы).

В курсе физики вы знакомились и ещё познакомитесь с рядом периодических явлений, в частности с колебательным движением. Например, уравнение гармонических колебаний имеет вид $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + a)$, а графиками гармонических колебаний являются синусоиды.

Свойства тригонометрических функций используются во многих сферах человеческой деятельности: при настройке многих механизмов (например, кривошипных механизмов, токарных станков), в землеустройстве (в частности, при расчёте сечений каналов, определении дорожных профилей), в расчётах петли разворота железнодорожной колеи, в определении размеров зоны видимости на автомобильных дорогах, при градуировании шкалы мерного циркуля и др.

При изучении этой главы вы познакомитесь не только со свойствами и графиками тригонометрических функций, но и со свойствами обратных тригонометрических функций и их графиками. Познакомитесь с формулами, позволяющими находить приближённые значения $\sin x$ и $\cos x$ с помощью многочленов.

§ 1. Область определения и множество значений тригонометрических функций

Известно, что каждому действительному числу x соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки $(1; 0)$ на угол x радиан; $\sin x$ — ордината этой точки, $\cos x$ — её абсцисса. Тем самым каждому действительному числу x поставлены в соответствие числа $\sin x$ и $\cos x$, т. е. на множестве $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел определены функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

Областью определения каждой из функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Напомним, что множество всех значений, которые функция принимает на области определения, называют множеством значений функции.

Таким образом, чтобы найти множество значений функции $y = \sin x$, нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x из области определения, т. е. установить, для каких значений y существуют такие значения x, при которых $\sin x = y$. Известно, что уравнение $\sin x = a$, так же как и уравнение $\cos x = a$, имеет корни, если $|a| \leqslant 1$, и не имеет корней, если $|a| > 1$.

Множеством значений каждой из функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ является отрезок $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ ограничены сверху и снизу (по определению ограниченной функции).

Задача 1. Найти область определения функции

$$y = \frac{1}{\sin x + \cos x}.$$

▷ Найдём значения x, при которых выражение $\frac{1}{\sin x + \cos x}$ не имеет смысла, т. е. такие значения x, при которых знаменатель равен нулю. Решая уравнение $\sin x + \cos x = 0$, находим $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, областью определения данной функции являются все значения $x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◀

Задача 2. Найти множество значений функции

$$y = 3 + \sin x \cos x.$$

▷ Нужно выяснить, какие значения может принимать y при различных значениях x, т. е. установить, для каких значений a уравнение $3 + \sin x \cos x = a$ имеет корни. Применяя формулу синуса двойного угла, запишем уравнение так: $3 + \frac{1}{2}\sin 2x = a$, откуда $\sin 2x = 2a - 6$. Для всех значений a, таких, что $|2a - 6| \leqslant 1$, т. е. $2{,}5 \leqslant a \leqslant 3{,}5$, это уравнение имеет корни. Таким образом, множеством значений данной функции является отрезок $2{,}5 \leqslant y \leqslant 3{,}5$.

Ответ. $[2{,}5;\ 3{,}5]$. ◀

Замечание. Задачу 2 можно решить иначе. Так как $y = 3 + \frac{1}{2}\sin 2x$, где $-1 \leqslant \sin 2x \leqslant 1$, то $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}\sin 2x \leqslant \frac{1}{2}$, откуда $2{,}5 \leqslant 3 + \frac{1}{2}\sin 2x \leqslant 3{,}5$. Следовательно, множество значений функции — отрезок $[2{,}5;\ 3{,}5]$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определяется формулой $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Значит, она определена при тех значениях x, для которых $\cos x \neq 0$, т. е. при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Областью определения функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

Множеством значений функции $y = \operatorname{tg} x$ является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел, так как уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни при любом действительном значении a.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$, где $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, определена при тех значениях x, для которых $\sin x \neq 0$, т. е. при $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, областью определения функции $y = \operatorname{ctg} x$ является множество $\boldsymbol{R}$ с выброшенными из него точками $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Так как уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет корни при любом действительном значении a, то множеством значений функции $y = \operatorname{ctg} x$ является множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ не являются ограниченными.

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ называются *тригонометрическими функциями*.

Задача 3. Найти область определения функции

$$y = \sin 3x + \operatorname{tg} 2x.$$

▷ Нужно выяснить, при каких значениях x выражение $\sin 3x + \operatorname{tg} 2x$ имеет смысл. Выражение $\sin 3x$ имеет смысл при любом значении x, а выражение $\operatorname{tg} 2x$ — при $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, т. е. при $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, областью определения данной функции является множество действительных чисел, таких, что $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \boldsymbol{Z}$. ◀

Задача 4. Найти множество значений функции

$$y = 3\sin x + 4\cos x.$$

▷ Преобразуем функцию, используя метод вспомогательного угла («Алгебра и начала математического анализа, 10», гл. IX, § 4). Умножим и разделим y на $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Получим $y = 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right)$. Так как $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, то существует угол α, такой, что $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. В качестве α можно взять $\arccos \frac{3}{5}$. Тогда $y = 5(\sin x \cos\alpha + \cos x \sin\alpha) = 5\sin(x + \alpha)$, где $-1 \leqslant \sin(x + \alpha) \leqslant 1$. Поэтому $-5 \leqslant y \leqslant 5$, т. е. множество значений данной функции — отрезок $[-5; 5]$. ◀

Задача 5. Найти множество значений функции

$$y = 3\sin^2 x + 4\sin x \cos x + \cos^2 x.$$

▷ Используя формулы двойного аргумента, получаем

$$y = 3 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 2\sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} = 2 + (2\sin 2x - \cos 2x).$$

Преобразовав выражение в скобках и применив метод вспомогательного угла, получим

$$2\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2x - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x\right) = \sqrt{5}\sin(2x - \alpha),$$

где $\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Тогда $y = 2 + \sqrt{5}\sin(2x - \alpha)$. Так как $-\sqrt{5} \leqslant \sqrt{5}\sin(2x - \alpha) \leqslant \sqrt{5}$, то $2 - \sqrt{5} \leqslant y \leqslant 2 + \sqrt{5}$. Следовательно, множество значений данной функции — отрезок $[2 - \sqrt{5};\ 2 + \sqrt{5}]$. ◀

Задача 6. Доказать, что функция $y = 3\cos 2x + 5\sin 2x$ ограничена.

▷ Для того чтобы доказать, что функция $y = 3\cos 2x + 5\sin 2x$ ограничена, нужно найти такое положительное число C, чтобы для любого значения x из области определения функции, т. е. для $x \in \boldsymbol{R}$, выполнялось неравенство $|3\cos 2x + 5\sin 2x| \leqslant C$.

Так как $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1$, $-1 \leqslant \sin 2x \leqslant 1$, то для любого значения x из области определения выполняются неравенства $-3 \leqslant 3\cos 2x \leqslant 3$, $-5 \leqslant 5\sin 2x \leqslant 5$, следовательно, $-8 \leqslant y \leqslant 8$ и функция ограничена на множестве $\boldsymbol{R}$. ◀

Задача 7. Доказать, что функция $y = \dfrac{x}{x^2+1}\sin 2x$ ограничена.

▷ Данная функция определена на множестве $\boldsymbol{R}$. Воспользуемся неравенством $x^2 + 1 \geqslant 2|x|$, которое равносильно неравенству $(|x| - 1)^2 \geqslant 0$. Тогда $|y| = \dfrac{|x|}{x^2+1}|\sin 2x| \leqslant \dfrac{1}{2}$, так как $\dfrac{|x|}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$, а $|\sin 2x| \leqslant 1$. Следовательно, функция ограничена на множестве $\boldsymbol{R}$. ◀

Задача 8. Доказать, что функция $y = x\sin x$ не является ограниченной на множестве $\boldsymbol{R}$.

▷ Пусть C — произвольное положительное число. Тогда найдётся натуральное число n, такое, что $x_n = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n > C$.

Так как $|y(x_n)| = x_n \sin x_n = x_n > C$, то функция не является ограниченной на множестве $\boldsymbol{R}$. ◀

Упражнения

1. Найти область определения функции:

1) $y = \sin\ 2x$; 2) $y = \cos\dfrac{x}{2}$; 3) $y = \cos\dfrac{1}{x}$;

4) $y = \sin\dfrac{2}{x}$; 5) $y = \sin\sqrt{x}$; 6) $y = \cos\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

2. Найти множество значений функции:

1) $y = 1 + \sin x$; 2) $y = 1 - \cos x$;

3) $y = 2\sin x + 3$; 4) $y = 1 - 4\cos 2x$;

5) $y = \sin 2x \cos 2x + 2$; 6) $y = \dfrac{1}{2}\sin x \cos x - 1$.

3. Найти область определения функции:

1) $y = \dfrac{1}{\cos x}$; 2) $y = \dfrac{2}{\sin x}$; 3) $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$; 4) $y = \operatorname{tg} 5x$.

4. Найти область определения функции $f(x)$ и вычислить её значение в заданных точках:

1) $f(x)=\frac{\cos 2x}{\sin x}$; $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{7\pi}{2}$;

2) $f(x)=\frac{x}{\cos\pi x}$; $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=100$.

Найти область определения функции (5—6).

5. 1) $y=\sqrt{\sin x+1}$; 2) $y=\sqrt{\cos x-1}$; 3) $y=\lg\sin x$;

4) $y=\sqrt{2\cos x-1}$; 5) $y=\sqrt{1-2\sin x}$; 6) $y=\ln\cos x$.

6. 1) $y=\frac{1}{2\sin^2 x-\sin x}$; 2) $y=\frac{2}{\cos^2 x-\sin^2 x}$;

3) $y=\frac{1}{\sin x-\sin 3x}$; 4) $y=\frac{1}{\cos^3 x+\cos x}$.

Найти множество значений функции (7—9).

7. 1) $y=2\sin^2 x-\cos 2x$; 2) $y=1-8\cos^2 x\sin^2 x$;

3) $y=\frac{1+8\cos^2 x}{4}$; 4) $y=10-9\sin^2 3x$;

5) $y=1-2|\cos x|$; 6) $y=\sin x+\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

8. 1) $y=\sin x-5\cos x$; 2) $y=\sin^2 x-2\sin x$;

3) $y=10\cos^2 x-6\sin x\cos x+2\sin^2 x$;

4) $y=\cos^2 x+3\cos x$.

9. 1) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$; 2) $y=\sin^6 x+\cos^6 x$.

10. Доказать ограниченность функции:

1) $y=\frac{\cos x}{1{,}5-\sin x}$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt{3}-(\sin x+\cos x)}$.

11. Доказать, что функция $f(x)$ не является ограниченной в области её определения, если:

1) $f(x)=\frac{\cos x}{x}$; 2) $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

§ 2. Чётность, нечётность, периодичность тригонометрических функций

Каждая из функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ определена на множестве $\boldsymbol{R}$, и для любого $x\in\boldsymbol{R}$ верны равенства

$$\sin(-x)=-\sin x,\ \cos(-x)=\cos x.$$

Следовательно, $y=\sin x$ — *нечётная функция*, а $y=\cos x$ — *чётная* функция.

Для любого значения x из области определения функции $y=\operatorname{tg} x$ верно равенство $\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}(x)$ и область определения функции $y=\operatorname{tg} x$ симметрична относительно начала координат. Поэтому $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ — *нечётные* функции.

Можно доказать следующие свойства чётных и нечётных функций:

1) сумма, разность, произведение и частное двух чётных функций являются функциями чётными;
2) сумма и разность двух нечётных функций являются функциями нечётными;
3) произведение и частное двух нечётных функций являются чётными функциями;
4) произведение и частное чётной и нечётной функций являются нечётными функциями.

Задача 1. Выяснить, является ли функция

$$y=2+\sin x\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

чётной или нечётной.

▷ Функция определена на множестве $\boldsymbol{R}$. Используя формулу приведения, запишем данную функцию в виде $y=2+\sin^2 x$. Так как $\sin(-x)=-\sin x$, то $(\sin(-x))^2=\sin^2 x$, и поэтому $y(-x)=y(x)$, т. е. данная функция является чётной. ◀

Известно, что для любого значения x верны равенства $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\cos(x+2\pi)=\cos x$. Из этих равенств следует, что значения синуса и косинуса периодически повторяются при изменении аргумента на 2π. Такие функции называются периодическими с периодом 2π.

Определение

Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T\neq 0$, что для любого x из области определения этой функции значения $x+T$ и $x-T$ также принадлежат области определения и выполняются равенства $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$. Число T называется *периодом функции* $f(x)$.

Из этого определения следует, что если число x принадлежит области определения функции $f(x)$, то числа $x+nT$, $n\in\boldsymbol{Z}$ также принадлежат области определения этой функции и $f(x+nT)=f(x)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Задача 2. Доказать, что число 2π является наименьшим положительным периодом функции $y=\cos x$.

▷ Пусть $T>0$ — период косинуса, т. е. для любого x выполняется равенство $\cos(x+T)=\cos x$. Положив $x=0$, получим $\cos T=1$. Отсюда $T=2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Так как $T>0$, то T может принимать значения 2π, 4π, 6π, ..., и поэтому период не может быть меньше 2π. ◀

Аналогично можно доказать, что наименьший положительный период функции $y = \sin x$ также равен 2π.

Задача 3. Доказать, что $f(x) = \sin 3x$ — периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{3}$.

▷ Функция $f(x) = \sin 3x$ определена на $\boldsymbol{R}$. Поэтому достаточно показать, что для всех $x \in \boldsymbol{R}$ справедливы равенства

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x) \text{ и } f\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = f(x).$$

Имеем $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3x = f(x).$

Аналогично $f\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x - 2\pi) = f(x).$ ◀

Задача 4. Доказать, что функция $y = \operatorname{tg} x$ является периодической, и найти наименьший положительный период.

▷ Если x принадлежит области определения этой функции, т. е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то по формулам приведения получаем

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = -\operatorname{tg}(\pi - x) = -(-\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x, \ \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x.$$

Таким образом, $\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$. Следовательно, π — период функции $y = \operatorname{tg} x$. Покажем, что π — наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$.

Пусть T — период тангенса, тогда $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$, откуда при $x = 0$ получаем $\operatorname{tg} T = 0$, $T = k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Так как наименьшее целое положительное k равно 1, то π — наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$. ◀

Задача 5. Доказать, что $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$ — периодическая функция с периодом 3π.

▷ Область определения функции — множество $x \in \boldsymbol{R}$, таких, что $x \neq \frac{3\pi}{2} + 3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, отсюда следует, что если x принадлежит области определения, то $x + 3\pi$ и $x - 3\pi$ также принадлежат её области определения.

Так как $\operatorname{tg}\frac{x + 3\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \pi\right) = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{x - 3\pi}{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - \pi\right) = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$, то $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ — периодическая функция с периодом 3π. ◀

Задача 6. Доказать, что функция $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ является периодической с периодом 2π.

▷ Областью определения D функции являются все действительные числа x, кроме тех, при которых $\sin x = -1$, т. е. кроме чисел $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом, если $x \in D$, то числа $x+2\pi$ и $x-2\pi$ также принадлежат множеству D. Так как $y(x \pm 2\pi)=\frac{\cos(x \pm 2\pi)}{1+\sin(x \pm 2\pi)}=\frac{\cos x}{1+\sin x}=y(x)$, то $y(x)$ — периодическая функция с периодом 2π. ◀

Задача 7. Найти наименьший положительный период функции $y=3\sin x+\sin 2x$.

▷ Функция определена на множестве $\boldsymbol{R}$. Пусть T — период данной функции, т. е. для всех $x \in \boldsymbol{R}$ верно равенство

$$3\sin(x+T)+\sin 2(x+T)=3\sin x+\sin 2x. \qquad (1)$$

Если $x=0$, то из равенства (1) следует, что $3\sin T+\sin 2T=0$ или $3\sin T+2\sin T\cos T=0$, откуда получаем $\sin T(3+2\cos T)=0$.

Так как $3+2\cos T \neq 0$, то $\sin T=0$, и поэтому наименьший положительный период нужно искать среди чисел $T=\pi n$, $n \in Z$.

Покажем, что число π не является периодом данной функции, т. е. равенство (1) для $T=\pi$ не выполняется хотя бы при одном значении $x \in \boldsymbol{R}$.

Пусть $x=\frac{\pi}{2}$. Вычислим $y\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)$ и $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Имеем $y\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=$ $=3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)+\sin 2\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=-3$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\frac{\pi}{2}+\sin 2\frac{\pi}{2}=3$. Таким образом, для $T=\pi$ равенство (1) не является верным при $x=\frac{\pi}{2}$.

При $T=2\pi$ равенство (1) является верным для любого $x \in \boldsymbol{R}$, так как $y(x+2\pi)=3\sin(x+2\pi)+\sin 2(x+2\pi)=3\sin x+$ $+\sin 2x=y(x)$. Следовательно, $x=2\pi$ — наименьший период функции. ◀

Задача 8. Доказать, что функция $y=\sin\frac{1}{x}$ не является периодической.

▷ Областью определения данной функции являются все действительные числа, кроме числа 0. Пусть T — произвольное положительное число, тогда из того, что $-T \neq 0$, следует, что точка $x_0=-T$ принадлежит области определения. Но точка $x_0+T=$ $=-T+T=0$ не принадлежит области определения.

Пришли к тому, что для любого $T>0$ существует такое число $x=x_0$ (из области определения функции y), что точка $x+T$ не принадлежит области определения. Следовательно, функция $y=\sin\frac{1}{x}$ не является периодической. ◀

Задача 9. Доказать, что функция $y=\sin x^2$ не является периодической.

▷ Достаточно доказать, что функция не имеет положительного периода, так как если бы число $T<0$ было периодом, то

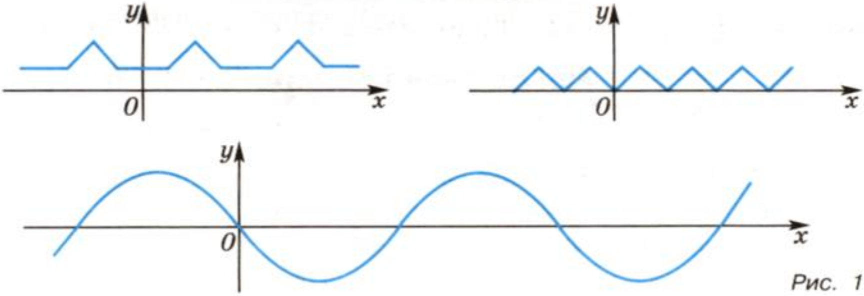


Рис. 1

число $-T$ было бы положительным периодом. Доказательство проведём методом от противного.

Допустим, что число $T>0$ — период функции, т. е. для любого $x \in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство $\sin (x+T)^2=\sin x^2$.

1) При $x=0$ отсюда следует, что $\sin T^2=0$, т. е. $T^2=\pi n$, а $T=\sqrt{\pi n}$ при некотором $n \in \boldsymbol{N}$.

2) Если $0<x<\sqrt{\pi}$, то $\sin x^2 \neq 0$, а поскольку $\sqrt{\pi n}$ — период, то и $\sin\left(x+\sqrt{\pi n}\right)^2 \neq 0$. Если же $x=\sqrt{\pi}$, то $\sin\left(\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n}\right)^2=\sin\left(\sqrt{x}\right)^2=0$. Значит, число $\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n}$ является ближайшим справа к $\sqrt{\pi n}$ числом, при котором $\sin x^2=0$. Отсюда $\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n} \leqslant \sqrt{\pi(n+1)}$, так как $\sqrt{\pi(n+1)}>\sqrt{\pi n}$ и $\sin(\sqrt{\pi(n+1)})^2=0$. Но неравенство $\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi n} \leqslant$ $\leqslant \sqrt{\pi(n+1)}$, равносильное неравенству $1 \leqslant \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, неверно для любого $n \in \boldsymbol{N}$, так как $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<1$. Значит, неверно и допущение о периодичности функции $\sin x^2$. ◄

Периодическими функциями описываются многие физические процессы (колебания маятника, вращение планет, переменный ток и т. д.). На рисунке 1 изображены графики некоторых периодических функций.

Упражнения

Выяснить, является ли данная функция чётной или нечётной **(12—13)**.

12. 1) $y=\cos 3x$; 2) $y=2\sin 4x$; 3) $y=\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}^2 x$;

4) $y=x\cos\dfrac{x}{2}$; 5) $y=x\sin x$; 6) $y=2\sin^2 x$.

13. 1) $y=\sin x+x$; 2) $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)-x^2$;

3) $y=3-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\sin(\pi-x)$;

4) $y=\dfrac{1}{2}\cos 2x\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)+3$; 5) $y=x^2+\dfrac{1+\cos x}{2}$.

14. Доказать, что функция $y = f(x)$ является периодической с периодом 2π, если:

1) $y = \cos x - 1$; 2) $y = \sin x + 1$; 3) $y = 3\sin x$;

4) $y = \frac{\cos x}{2}$; 5) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 6) $y = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

15. Доказать, что функция $y = f(x)$ является периодической с периодом T, если:

1) $y = \sin 2x,\ T = \pi$; 2) $y = \cos\frac{x}{2},\ T = 4\pi$;

3) $y = \operatorname{tg} 2x,\ T = \frac{\pi}{2}$; 4) $y = \sin\frac{4x}{5},\ T = \frac{5}{2}\pi$.

16. Определить, является ли данная функция чётной или нечётной:

1) $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$; 2) $y = \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{1 + \cos 2x}$; 3) $y = \frac{\cos 2x - x^2}{\sin x}$;

4) $y = \frac{x^3 + \sin 2x}{\cos x}$; 5) $y = x|\sin x|\sin^3 x$; 6) $y = 3^{\cos x}$;

7) $y = x^2 \sin\frac{1}{x}$; 8) $y = \log_3\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$.

17. Доказать, что:

1) произведение и частное двух нечётных функций являются чётными функциями;

2) произведение и частное чётной и нечётной функций являются нечётными функциями.

Найти наименьший положительный период функции (18—19).

18. 1) $y = \cos\frac{2}{5}x$; 2) $y = \sin\frac{3}{2}x$; 3) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 4) $y = |\sin x|$.

19. 1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$;

3) $y = \sin x \cdot \sin 3x$; 4) $y = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

20. Выяснить, является ли периодической функция:

1) $y = \sqrt{\sin x}$; 2) $y = \sin\sqrt{x}$; 3) $y = |\sin|x||$.

21. Доказать, что функция не является периодической:

1) $y = \sin\sqrt{|x|}$; 2) $y = \sin x + \sin\sqrt{2}x$.

22. Доказать, что функция $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ периодическая, и найти её наименьший положительный период.

23. Доказать, что функция периодическая, и найти её наименьший положительный период:

1) $y = \sin(\cos x)$; 2) $y = \cos(\sin x)$.

24. График функции $y = f(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$, симметричен относительно каждой из прямых $x = a$, $x = b$, где $a \neq b$. Доказать, что $y = f(x)$ является периодической, и найти её период.

25. График функции $y = f(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$, симметричен относительно точки A $(a; b)$ и прямой $x = c$ $(c \neq a)$. Доказать, что функция $y = f(x)$ является периодической, и найти её период.

26. Доказать, что функция $y = f(x)$ является периодической, если существует $T \neq 0$ такое, что для любых трёх значений x, $x + T$ и $x - T$ из области определения функции выполнено условие $f(x + T) = -f(x)$. Найти период функции f.

27. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Доказать, что:
1) $f(x) + f(-x)$ — чётная функция;
2) $f(x) - f(-x)$ — нечётная функция.

§ 3. Свойства функции $y = \cos x$ и её график

Напомним, что функция $y = \cos x$ определена на всей числовой прямой и множеством её значений является отрезок $[-1; 1]$. Следовательно, функция ограничена и график её расположен в полосе между прямыми $y = -1$ и $y = 1$.

Так как функция $y = \cos x$ периодическая с периодом 2π, то достаточно построить её график на каком-нибудь промежутке длиной 2π, например на отрезке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. Тогда на промежутках, получаемых сдвигами выбранного отрезка на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, график будет таким же.

Функция $y = \cos x$ является чётной. Поэтому её график симметричен относительно оси Oy. Для построения графика на отрезке $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ достаточно построить его для $0 \leqslant x \leqslant \pi$, а затем симметрично отразить его относительно оси Oy.

Прежде чем перейти к построению графика, покажем, что функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

○ В самом деле, при повороте точки P $(1; 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол от 0 до π абсцисса точки, т. е. $\cos x$, уменьшается от 1 до -1. Поэтому если $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \pi$, то $\cos x_1 > \cos x_2$ (рис. 2). Это и означает, что функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $[0; \pi]$. ●

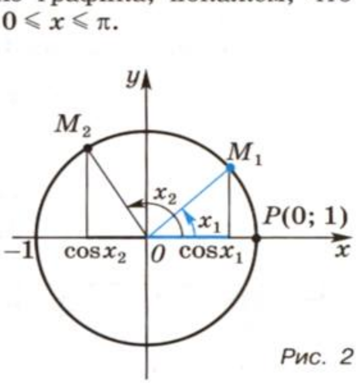


Рис. 2

Используя свойство убывания функции $y = \cos x$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ и найдя несколько точек, принадлежащих графику, построим его на этом отрезке (рис. 3).

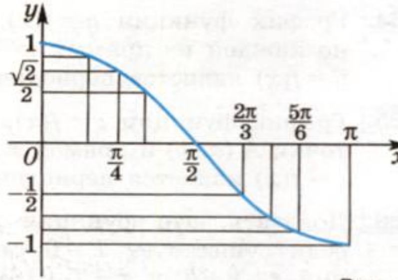


Рис. 3

Пользуясь свойством чётности функции $y = \cos x$, отразим построенный на отрезке $[0; \pi]$ график симметрично относительно оси Oy. Получим график этой функции на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 4).

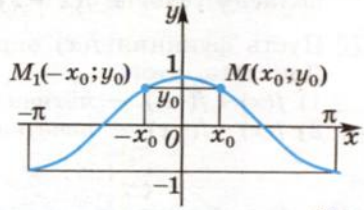


Рис. 4

Так как $y = \cos x$ — периодическая функция с периодом 2π и её график построен на отрезке $[-\pi; \pi]$, длина которого равна периоду, распространим его по всей числовой прямой с помощью сдвигов на 2π, 4π и т. д. вправо, на -2π, -4π и т. д. влево, т. е. вообще на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 5).

Итак, график функции $y = \cos x$ построен на всей числовой прямой, начиная с построения его части на отрезке $[0; \pi]$.

Поэтому свойства функции $y = \cos x$ можно получить, опираясь на свойства этой функции на отрезке $[0; \pi]$. Например, функция $y = \cos x$ возрастает на отрезке $[-\pi; 0]$, так как она убывает на отрезке $[0; \pi]$ и является чётной.

Основные свойства функции $y = \cos x$

1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

2) Множество значений — отрезок $[-1; 1]$.

3) Периодическая, $T = 2\pi$.

4) Чётная.

5) Функция принимает:

— значение, равное 0, при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— наибольшее значение, равное 1, при $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

— наименьшее значение, равное -1, при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

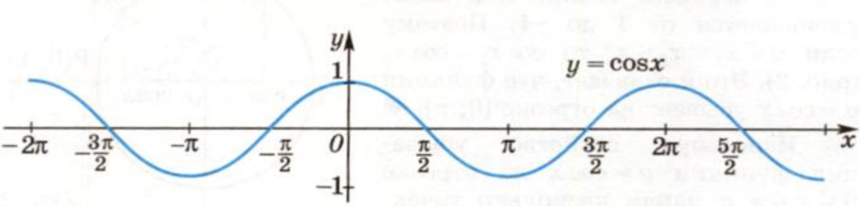


Рис. 5

— положительные значения на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
— отрицательные значения на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
6) Возрастающая на отрезке $[\pi; 2\pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
убывающая на отрезке $[0; \pi]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 1. Найти все корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

▷ Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = -\frac{1}{2}$ на данном отрезке (рис. 6). Эти графики пересекаются в трёх точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$. На отрезке $[0; \pi]$ корнем уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ является число $x_1 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Из рисунка 6 видно, что точки x_2 и x_1 симметричны относительно оси Oy, т. е.

$$x_2 = -x_1 = -\frac{2\pi}{3}, \text{ а } x_3 = x_2 + 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Ответ. $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$, $x_3 = \frac{4\pi}{3}$. ◀

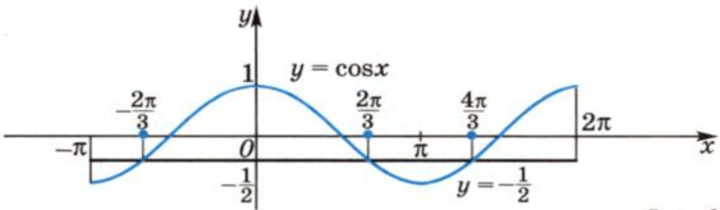


Рис. 6

Задача 2. Найти все решения неравенства $\cos x > -\frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

▷ Из рисунка 6 видно, что график функции $y = \cos x$ лежит выше графика функции $y = -\frac{1}{2}$ на промежутках $\left(-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right]$.

Ответ. $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} < x \leqslant 2\pi$. ◀

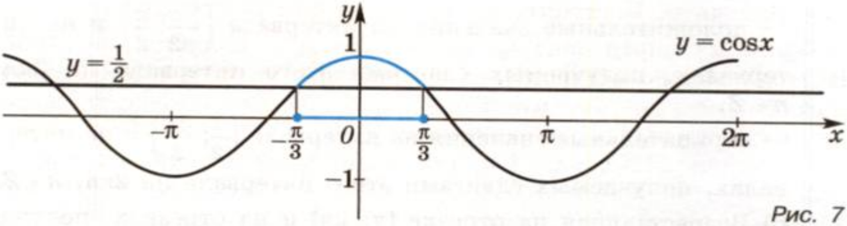


Рис. 7

Задача 3. Решить неравенство $4\cos^2 x - 8\cos x + 3 < 0$.

▷ Пусть $\cos x = t$, тогда получаем квадратное неравенство $4t^2 - 8t + 3 < 0$, равносильное неравенству $\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{3}{2}\right)<0$. Поэтому исходное неравенство равносильно каждому из неравенств:

$$\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x - \frac{3}{2}\right) < 0,\ \left(\frac{3}{2} - \cos x\right)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) > 0,\ \cos x > \frac{1}{2}.$$

Построим график функции $y = \cos x$ (рис. 7). На отрезке $[-\pi;\ \pi]$ уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ имеет корни $-\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{3}$, а решениями неравенства $\cos x > \frac{1}{2}$ на этом отрезке являются все числа из интервала $\left(-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right)$. Множество решений неравенства $\cos x > \frac{1}{2}$ и равносильного ему исходного неравенства представляет собой объединение интервалов $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $-\frac{\pi}{3}+2\pi n < x < \frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ◀

Задача 4. Построить график функции $y = \cos^2 x$.

▷ Область определения данной функции — множество $\boldsymbol{R}$, множество значений — отрезок $[0;\ 1]$, функция чётная с периодом π и $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$. График функции $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ можно получить из графика функции $y = \cos x$ сжатием вдвое вдоль оси Ox, сжатием вдвое вдоль оси Oy, сдвигом на $\frac{1}{2}$ вверх вдоль оси Oy (рис. 8). ◀

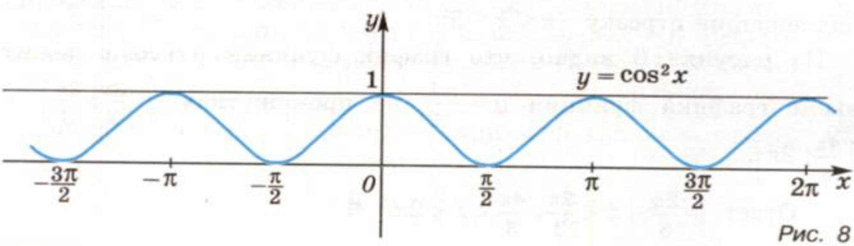


Рис. 8

Задача 5. Построить график функции $y = x\cos x$.

▷ Функция определена на множестве $\boldsymbol{R}$ и является нечётной. Поэтому можно построить её график при $x \geqslant 0$, а затем с помощью симметрии относительно начала координат изобразить его для отрицательных значений x.

Так как $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ при $x \in \boldsymbol{R}$, то при $x \geqslant 0$ справедливо неравенство $-x \leqslant x\cos x \leqslant x$ или $-x \leqslant y \leqslant x$. Отсюда следует, что при $x \geqslant 0$ график данной функции расположен между лучами $y = -x$ и $y = x$ $(x \geqslant 0)$. При этом точки графика функции $y = x\cos x$ лежат на луче $y = x$ $(x \geqslant 0)$, если $\cos x = 1$, т. е. $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \geqslant 0$. Аналогично при $x = \pi(2n - 1)$, $n \in \boldsymbol{N}$, точки графика этой функции лежат на луче $y = -x (x \geqslant 0)$. График функции $y = x\cos x$ изображён на рисунке 9. ◀

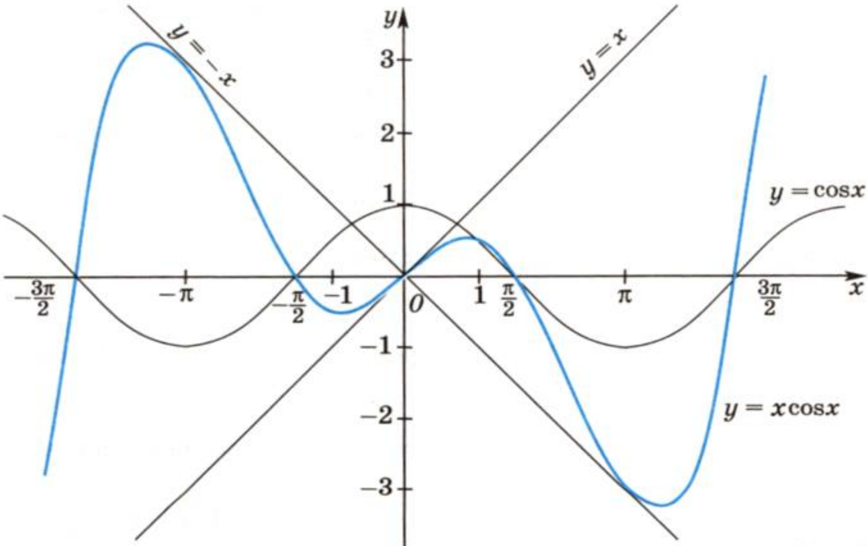


Рис. 9

Упражнения

Упражнения **28, 32—35** выполнить с помощью графика функции $y = \cos x$.

28. (Устно.) Выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \cos x$ принимает: 1) значение, равное 0, 1, −1; 2) положительные значения; 3) отрицательные значения.

29. Найти значения функции $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ при $x = a$, если:

1) $a = \frac{\pi}{6}$; 2) $a = \frac{\pi}{3}$; 3) $a = \frac{\pi}{2}$; 4) $a = \frac{7\pi}{6}$.

30. Найти значения функции $y=\cos^2 x$ при:

1) $x=\frac{\pi}{4}$; 2) $x=\frac{\pi}{2}$; 3) $x=\frac{2\pi}{3}$; 4) $x=\frac{4\pi}{3}$.

31. Выяснить, принадлежит ли графику функции $y=\cos x$ точка с координатами:

1) $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; 2) $\left(\frac{10\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$; 3) $\left(\frac{25\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\left(-\frac{19\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

32. (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y=\cos x$ на отрезке:

1) $[3\pi; 4\pi]$; 2) $[-2\pi; -\pi]$; 3) $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$;

4) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$; 5) $[1; 3]$; 6) $[-2; -1]$.

33. Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y=\cos x$ возрастала, а на другом убывала:

1) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

34. С помощью свойства возрастания или убывания функции $y=\cos x$ сравнить числа:

1) $\cos\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{8\pi}{9}$; 2) $\cos\frac{8\pi}{7}$ и $\cos\frac{10\pi}{7}$;

3) $\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$;

5) $\cos 1$ и $\cos 3$; 6) $\cos 4$ и $\cos 5$.

35. Найти все принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$ корни уравнения:

1) $\cos x=\frac{1}{2}$; 2) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x=-\frac{1}{2}$.

36. Найти все принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$ решения неравенства:

1) $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$; 2) $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$; 3) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

37. Построив график функции $y=f(x)$, найти: а) область определения функции; б) множество значений; в) промежутки возрастания:

1) $f(x)=\begin{cases}\cos x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\\ x^2, \text{ если } x<0;\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}\cos x, \text{ если } -3\pi \leqslant x < -\frac{\pi}{2},\\ \frac{2x}{\pi}+1, \text{ если } x \geqslant -\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

38. Выразив синус через косинус по формулам приведения, сравнить числа:

1) $\cos\frac{\pi}{5}$ и $\sin\frac{\pi}{5}$; 2) $\sin\frac{\pi}{7}$ и $\cos\frac{\pi}{7}$;

3) $\cos\frac{3\pi}{8}$ и $\sin\frac{5\pi}{8}$; 4) $\sin\frac{3\pi}{5}$ и $\cos\frac{\pi}{5}$;

5) $\cos\frac{\pi}{6}$ и $\sin\frac{5\pi}{14}$; 6) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\sin\frac{3\pi}{10}$.

39. Найти все принадлежащие промежутку $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ корни уравнения:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

40. Найти все корни уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие множеству решений неравенства $\log_2(x-1) < 3$.

41. Найти все принадлежащие промежутку $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ решения неравенства:

1) $\cos 2x < \frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

42. Найти множество значений функции $y = \cos x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$; 2) $\left(\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

43. Найти промежутки возрастания функции $y = \cos 2x + \sin^2 x$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

44. Решить графически уравнение:

1) $\cos x = 1 - \frac{2x}{\pi}$; 2) $\cos x = \sqrt{x - \frac{\pi}{2}}$;

3) $\cos x = 1 + \sqrt{x - 2\pi}$; 4) $\cos x = x + \frac{\pi}{2}$.

45. С помощью графиков выяснить, имеет ли решение система уравнений:

1) $\begin{cases} y = \log_2 x - 1, \\ y = \cos x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \frac{x^2+2}{x^2}, \\ y = \cos x. \end{cases}$

46. Сколько решений имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} y = \cos\frac{x}{2}, \\ y = -x^2 + 6x - 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = \cos x, \\ y = \log_7 x? \end{cases}$

47. Построить график и установить свойства функции:

1) $y = 1 + \cos x$; 2) $y = \cos 2x$; 3) $y = 3\cos x$;

4) $y = 2\cos\frac{x}{2}$; 5) $y = \frac{\cos 2x}{2} - 1$; 6) $y = 2 - \cos 3x$.

48. Построить график функции:

1) $y = |\cos x|$; 2) $y = 3 - 2\cos(x-1)$;

3) $y = \sin x \operatorname{ctg} x$; 4) $y = 2^{\cos x}$.

49. В одной системе координат построить графики функций $y = \cos x$ и $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$.

50. Решить неравенство:

1) $\cos^2 x > \dfrac{3}{4}$;

2) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 > 0$;

3) $\sqrt[4]{\dfrac{7-\cos 4x}{2}} > -2\cos x$.

§ 4. Свойства функции $y = \sin x$ и её график

Функция $y = \sin x$ определена на всей числовой прямой, является нечётной и периодической с периодом 2π. Её график можно построить таким же способом, как и график функции $y = \cos x$, начиная с построения, например, на отрезке $[0; \pi]$. Однако проще воспользоваться формулой $\sin x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Эта формула показывает, что график функции $y = \sin x$ можно получить сдвигом графика функции $y = \cos x$ вдоль оси абсцисс вправо на $\dfrac{\pi}{2}$ (рис. 10).

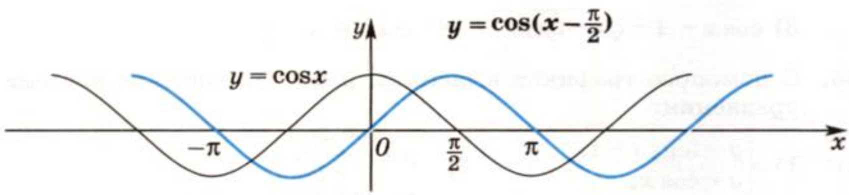


Рис. 10

График функции $y = \sin x$ изображён на рисунке 11.

Кривая, являющаяся графиком функции $y = \sin x$, называется *синусоидой*.

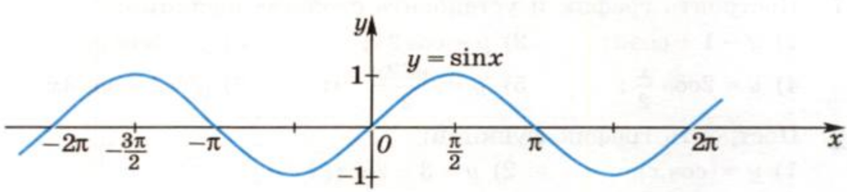


Рис. 11

Так как график функции $y = \sin x$ получается сдвигом графика функции $y = \cos x$, то свойства функции $y = \sin x$ можно получить из свойств функции $y = \cos x$.

Основные свойства функции $y = \sin x$

1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
2) Множество значений — отрезок $[-1; 1]$.
3) Периодическая, $T = 2\pi$.
4) Нечётная.
5) Функция принимает:
— значение, равное 0, при $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
— наибольшее значение, равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
— наименьшее значение, равное -1, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
— положительные значения на интервале $(0; \pi)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
— отрицательные значения на интервале $(\pi; 2\pi)$ и на интервалах, получаемых сдвигами этого интервала на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
6) Возрастающая на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
убывающая на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ и на отрезках, получаемых сдвигами этого отрезка на $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 1. Найти все принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$.

▷ Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$ на данном отрезке (рис. 12). Эти графики пересекаются в двух точках, абсциссы которых являются корнями уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$. На отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ уравнение имеет корень $x_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Второй корень $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, так как $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$.

Ответ. $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. ◀

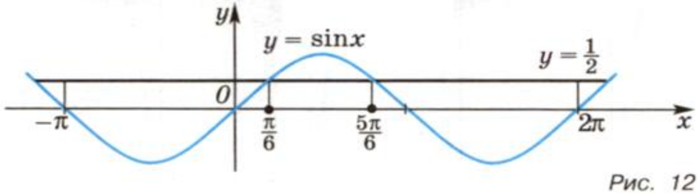


Рис. 12

Задача 2. Найти все решения неравенства $\sin x < \frac{1}{2}$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$.

▷ Из рисунка 12 видно, что график функции $y = \sin x$ лежит ниже графика функции $y = \frac{1}{2}$ на промежутках $\left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$. ◀

Задача 3. Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить её график:

1) $y = \log_2 \sin x$; 2) $y = \frac{1}{\sin|x|}$.

▷ 1) Областью определения функции являются все значения x, при которых $\sin x > 0$, т. е. $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Так как $0 < \sin x \leqslant 1$, то по свойствам логарифмической функции с основанием $a > 1$ получаем $\log_2 \sin x \leqslant 0$, т. е. множество значений функции — промежуток $(-\infty; 0]$.

Функция $y = \log_2 \sin x$ — периодическая с наименьшим положительным периодом 2π, как и функция $y = \sin x$. Поэтому достаточно исследовать эту функцию на интервале $(0; \pi)$.

Функции $f(x) = \sin x$ и $y(t) = \log_2 t$ являются возрастающими на промежутках $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ и $(0; 1]$, откуда следует, что функция $y = \log_2 \sin x$ также является возрастающей на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ и принимает все значения из промежутка $(-\infty; 0]$. Так как значения функции $y = \sin x$ в точках промежутка $(0; \pi)$, симметричных относительно точки $x = \frac{\pi}{2}$, равны, то график функции $y = \log_2 \sin x$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ симметричен графику этой функции на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, а функция $y = \log_2 \sin x$ является убывающей при $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Прямые $x = 0$ и $x = \pi$ — вертикальные асимптоты графика функции $y = \log_2 \sin x$ на промежутке $(0; \pi)$. Теперь можно строить график функции (рис. 13).

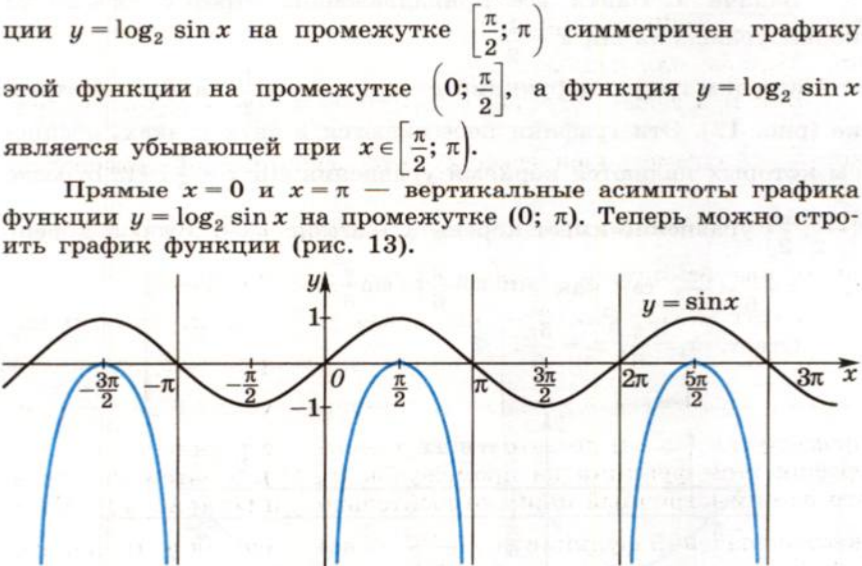


Рис. 13

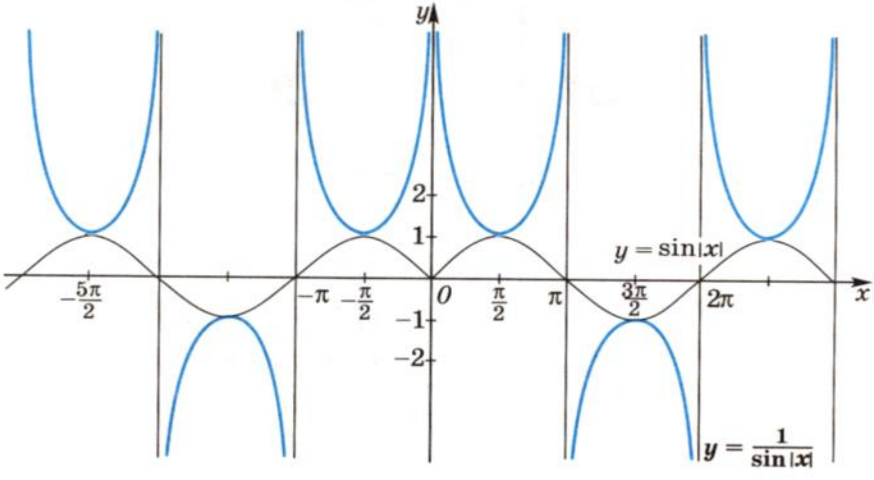


Рис. 14

2) Функция $y = \frac{1}{\sin|x|}$ является чётной и периодической с периодом 2π и областью определения $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

На промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $f(x) = \sin x$ возрастает, множество её значений — промежуток $(0; 1]$, а функция $y(t) = \frac{1}{t}$ на промежутке $(0; 1]$ убывает. Поэтому $y = \frac{1}{\sin|x|} = \frac{1}{\sin x}$ — убывающая функция на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, принимает все значения, больше или равные 1.

Как и в задаче **2**, график функции $y = \frac{1}{\sin|x|}$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ симметричен графику этой функции на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$. Прямые $x = 0$ и $x = \pi$ — вертикальные асимптоты графика функции на интервале $(0; \pi)$.

Пусть $x \in (\pi; 2\pi)$. Так как $\sin(x + \pi) = -\sin x$, то в точке $x = x_0 + \pi$, где $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, функция $\sin x$ принимает значение $-\sin x_0$. Поэтому для построения графика функции $y = \frac{1}{\sin|x|}$ на промежутке $(\pi; 2\pi)$ достаточно перенести построенный на $(0; \pi)$ график этой функции на промежуток $(\pi; 2\pi)$, а затем заменить его на симметричный с ним относительно оси Ox (рис. 14). Множество значений функции $y = \frac{1}{\sin|x|}$ — все значения y, такие, что $|y| \geqslant 1$.

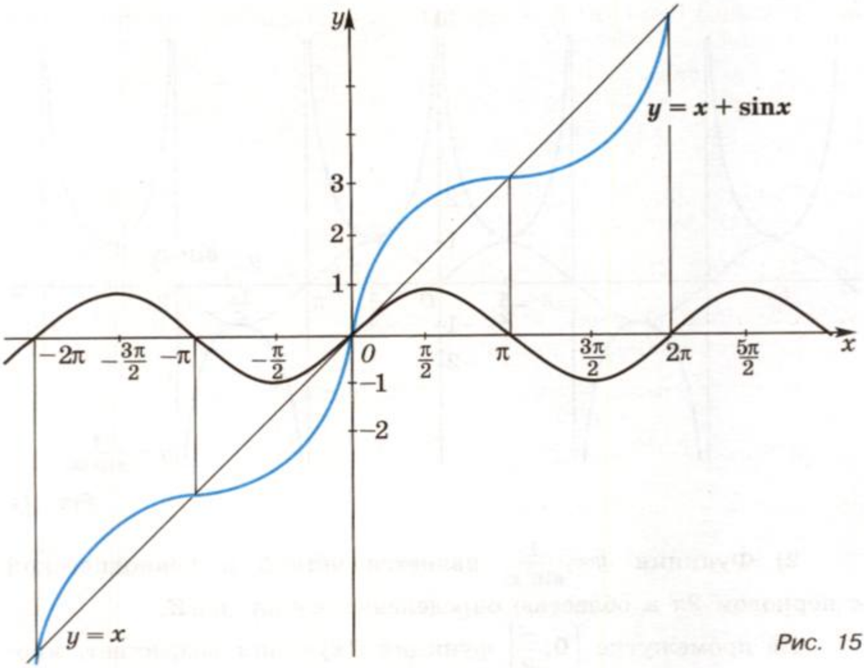


Рис. 15

Задача 4. Построить график функции $y = x + \sin x$.

▷ Функции $y_1 = x$ и $y_2 = \sin x$ определены на множестве $\boldsymbol{R}$. Для построения графика сложим ординаты точек графиков $y_1 = x$ и $y_2 = \sin x$ с одинаковыми абсциссами (рис. 15). ◀

Упражнения

Упражнения **51, 55—59** выполнить с помощью графика функции $y = \sin x$.

51. (Устно.) Выяснить, при каких значениях x, принадлежащих отрезку $[0; 3\pi]$, функция $y = \sin x$ принимает: 1) значение, равное 0, 1, -1; 2) положительные значения; 3) отрицательные значения.

52. Найти значения функции $y = \sin 2x$ при:

1) $x = \frac{\pi}{4}$; 2) $x = \frac{\pi}{3}$; 3) $x = -\frac{2\pi}{3}$; 4) $x = -\frac{5\pi}{6}$.

53. Найти значения функции $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ при:

1) $x = -\frac{\pi}{2}$; 2) $x = \frac{3\pi}{4}$; 3) $x = -\frac{10\pi}{3}$; 4) $x = -\frac{19\pi}{4}$.

54. Выяснить, принадлежат ли графику функции $y = \sin x$ точки с координатами:

1) $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$; 3) $\left(\frac{3\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 4) $\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

55. (Устно.) Выяснить, возрастает или убывает функция $y = \sin x$ на промежутке:

1) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$;

4) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 5) $[2; 4]$; 6) $(6; 7)$.

56. Разбить данный отрезок на два отрезка так, чтобы на одном из них функция $y = \sin x$ возрастала, а на другом убывала:

1) $[0; \pi]$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$; 3) $[-\pi; 0]$; 4) $[-2\pi; -\pi]$.

57. С помощью свойств возрастания или убывания функции $y = \sin x$ сравнить числа:

1) $\sin\frac{7\pi}{10}$ и $\sin\frac{13\pi}{10}$; 2) $\sin\frac{13\pi}{7}$ и $\sin\frac{11\pi}{7}$;

3) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ и $\sin\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; 4) $\sin 7$ и $\sin 6$.

58. Найти все принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$ корни уравнения:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

59. Найти все принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$ решения неравенства:

1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$; 4) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

60. Построив график функции $y = f(x)$, найти: а) область определения функции; б) множество значений; в) промежутки убывания:

1) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 3\pi, \\ \sqrt{-x}, \text{ если } x < 0; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ если } \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2\pi, \\ \cos x, \text{ если } -2\pi \leqslant x < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

---

61. Выразив косинус через синус по формулам приведения, сравнить числа:

1) $\sin\frac{\pi}{9}$ и $\cos\frac{\pi}{9}$; 2) $\sin\frac{9\pi}{8}$ и $\cos\frac{9\pi}{8}$;

3) $\sin\frac{\pi}{5}$ и $\cos\frac{5\pi}{14}$; 4) $\sin\frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{3\pi}{10}$.

62. Найти все принадлежащие промежутку $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ корни уравнения:

1) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

63. Найти все принадлежащие множеству решений неравенства $\sqrt{x-1}<2$ корни уравнения $\sin x=-\frac{1}{2}$.

64. Найти все принадлежащие промежутку $-\frac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant \pi$ решения неравенства:

1) $\sin 2x \geqslant -\frac{1}{2}$; 2) $\sin 3x<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

65. Найти множество значений функции $y=\sin x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[\frac{\pi}{6}; \pi\right]$; 2) $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

66. Найти промежутки убывания функции на заданном отрезке:

1) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right), \left[-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$;

2) $y=-\sin x$, $[-\pi; 2\pi]$.

67. Решить графически уравнение:

1) $\sin x=\frac{2}{3\pi}x-\frac{2}{3}$; 2) $\sin x=2-\frac{2}{\pi}x$;

3) $-\sin x=\sqrt{x}$; 4) $\sin x=\cos x$.

68. С помощью графиков функций выяснить, имеет ли решение система уравнений:

1) $\begin{cases} y-1=\sin x, \\ y=\sqrt{x-\frac{\pi}{2}}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=-\sin x, \\ y=-\frac{2}{x^2}-1. \end{cases}$

69. Сколько решений имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} y=2\sin x, \\ y=\log_{\frac{1}{3}} x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y+1=-\sin x, \\ y=\sqrt[3]{x}? \end{cases}$

70. Построить график и выяснить свойства функции:

1) $y=1-\sin x$; 2) $y=2+\sin x$; 3) $y=\sin 3x$;

4) $y=2\sin x$; 5) $y=3\sin\frac{x}{2}$; 6) $y=2-\sin 2x$.

71. Построить график функции:

1) $y=\sin|x|$; 2) $y=|\sin x|$;

3) $y=\sin x-x$; 4) $y=\log_{\frac{1}{2}}\sin x$.

72. Сила переменного электрического тока является функцией, зависящей от времени, и выражается формулой $I=A\sin(\omega t+\varphi)$, где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза. Построить график функции, если:

1) $A=2$, $\omega=1$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$; 2) $A=1$, $\omega=2$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

73. Решить неравенство:

1) $\sin^2 x>\frac{1}{4}$; 2) $3\sin x-2\cos^2 x<0$.

§ 5. Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, является нечётной и периодической с периодом π; поэтому достаточно построить её график на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Затем, отразив его симметрично относительно начала координат, получить график на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Наконец, используя периодичность, построить график функции $y = \operatorname{tg} x$ на всей области определения.

Прежде чем построить график функции на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, покажем, что на этом промежутке функция возрастает.

Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$.

Докажем, что $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$, т. е. $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$.

По условию $0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, откуда по свойствам функции $y = \sin x$ имеем $0 \leqslant \sin x_1 < \sin x_2$, а по свойствам функции $y = \cos x$ также имеем

$$\cos x_1 > \cos x_2 > 0,$$

откуда $0 < \frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$.

Перемножив неравенства $\sin x_1 < \sin x_2$ и $\frac{1}{\cos x_1} < \frac{1}{\cos x_2}$, получим $\frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2}$, т. е. $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$.

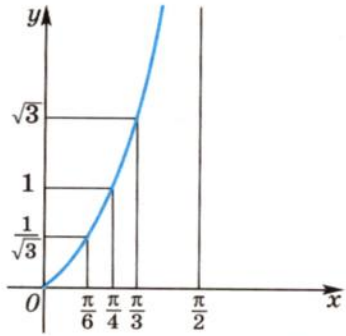


Рис. 16

Зная, что функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, найдём несколько точек, принадлежащих графику, и построим его на этом промежутке (рис. 16).

Исходя из свойства нечётности функции $y = \operatorname{tg} x$, отразим построенный на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ график симметрично относительно начала координат, получим график этой функции на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 17).

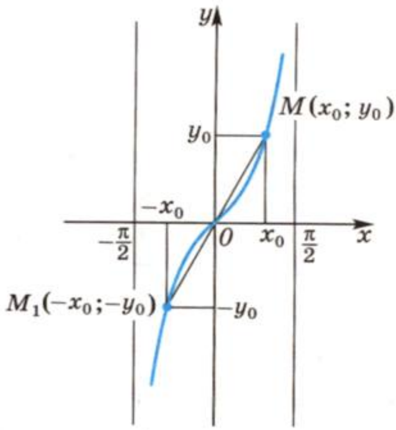


Рис. 17

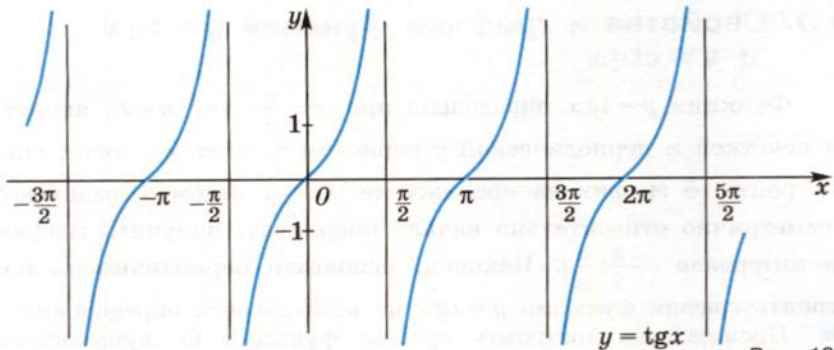


Рис. 18

Напомним, что при $x = \pm\frac{\pi}{2}$ функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена. Если $x < \frac{\pi}{2}$ и x приближается к $\frac{\pi}{2}$, то $\sin x$ приближается к 1, а $\cos x$, оставаясь положительным, стремится к нулю. При этом дробь $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ неограниченно возрастает, и прямые $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = -\frac{\pi}{2}$ являются вертикальными асимптотами.

Перейдём к построению графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на всей области определения. Функция $y = \operatorname{tg} x$ — периодическая с периодом π. Следовательно, график этой функции получается из её графика на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (см. рис. 17) сдвигами вдоль оси абсцисс на πn, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 18).

Итак, весь график функции $y = \operatorname{tg} x$ строится с помощью геометрических преобразований его части, построенной на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить, опираясь на свойства этой функции на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Например, функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, так как эта функция возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ и является нечётной.

<u>Основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$</u>

1) Область определения — множество всех действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2) Множество значений — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.

3) Прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, являются вертикальными асимптотами.

4) Периодическая, $T = \pi$.

5) Нечётная.

6) Функция принимает:
— значение, равное 0, при $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
— положительные значения на интервалах $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
— отрицательные значения на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
7) Возрастающая на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 1. Найти все корни уравнения $\operatorname{tg} x = 2$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

▷ Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 2$ на данном отрезке (рис. 19, *а*). Эти графики пересекаются в трёх точках, абсциссы которых x_1, x_2, x_3 являются корнями уравнения $\operatorname{tg} x = 2$. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ уравнение имеет корень $x_1 = \operatorname{arctg} 2$. Так как функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π, то $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$.

Ответ. $x_1 = \operatorname{arctg} 2$, $x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi$, $x_3 = \operatorname{arctg} 2 - \pi$. ◀

Задача 2. Найти все решения неравенства $\operatorname{tg} x \leqslant 2$, принадлежащие отрезку $-\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

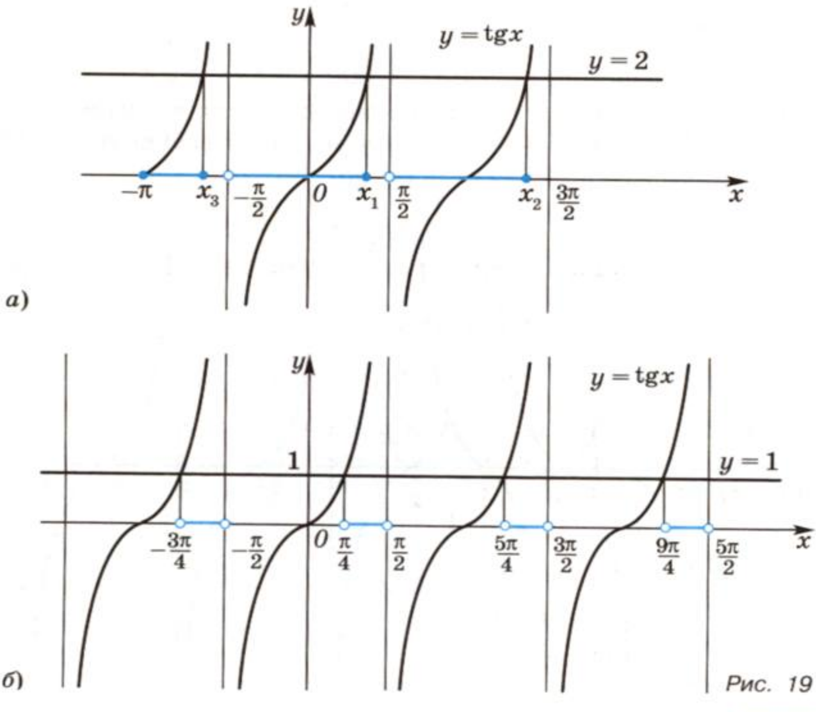


Рис. 19

▷ Из рисунка 19, *а* видно, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит не выше прямой $y = 2$ на промежутках $[-\pi; x_3]$, $\left(-\frac{\pi}{2}; x_1\right]$ и $\left(\frac{\pi}{2}; x_2\right]$, т. е. $-\pi \leqslant x \leqslant -\pi + \operatorname{arctg} 2$, $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant \operatorname{arctg} 2$, $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi + \operatorname{arctg} 2$. ◀

Задача 3. Решить неравенство $\operatorname{tg} x > 1$.

▷ Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = 1$ (рис. 19, *б*). Рисунок показывает, что график функции $y = \operatorname{tg} x$ лежит выше прямой $y = 1$ на промежутке $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, а также на промежутках, полученных сдвигами его на π, 2π, 3π, $-\pi$, -2π и т. д.

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ ◀

По формулам приведения функция $y = \operatorname{ctg} x$ может быть представлена как $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$ можно получить, исследуя функцию $y = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Основные свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$

1) Область определения — все действительные числа, кроме $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
2) Множество значений — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
3) Прямые $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, являются вертикальными асимптотами.
4) Периодическая, $T = \pi$.
5) Нечётная.
6) Убывающая на интервалах $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ можно построить сдвигом графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево, затем осуществить симметрию относительно оси Ox (рис. 20).

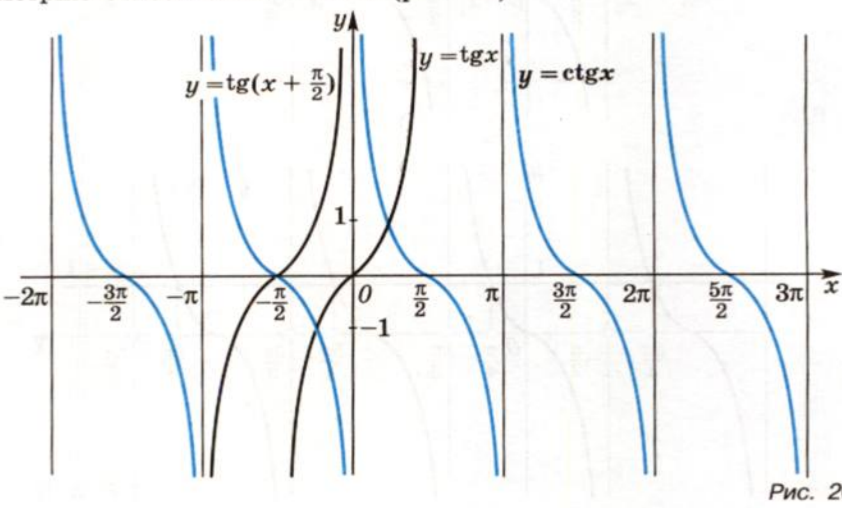


Рис. 20

Задача 4. Построить график функции $y=\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

▷ Очевидно, что $\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\left(2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)$. Функция $y=$ $=\operatorname{ctg}\left(2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)$ периодическая с периодом $\frac{\pi}{2}$, её график можно построить с помощью преобразований графика функции $y=\operatorname{ctg}x$ так:

1) выполнить сдвиг на $\frac{\pi}{6}$ единиц влево;

2) выполнить сжатие графика функции $y=\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ вдоль оси абсцисс к прямой $x=-\frac{\pi}{6}$ в 2 раза.

Полученный график изображён на рисунке 21. ◀

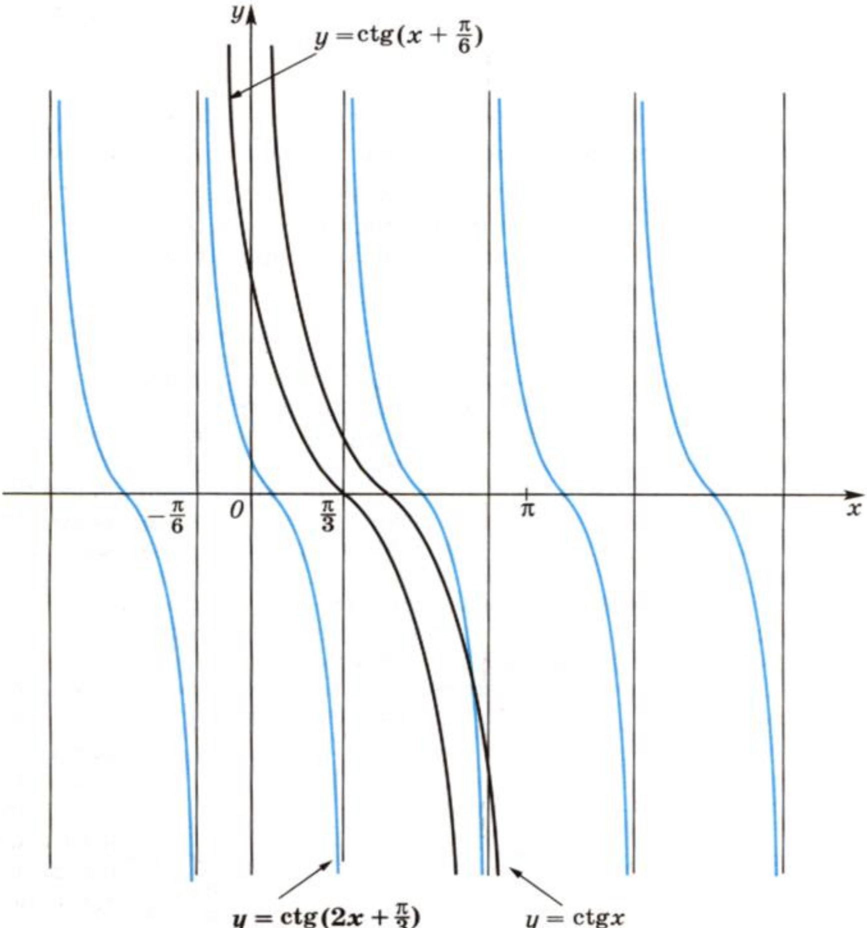


Рис. 21

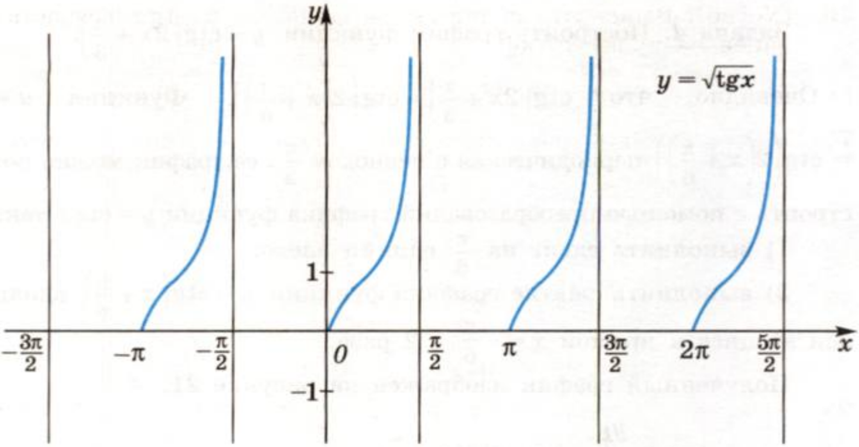


Рис. 22

Задача 5. Построить график функции $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$.

▷ Заданная функция определена при условии, что $\operatorname{tg} x$ принимает неотрицательные значения, т. е. при $\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Функция периодическая с периодом π, так как если x принадлежит области определения, то $x-\pi$ и $x+\pi$ принадлежат области определения и при этом $\sqrt{\operatorname{tg}(x \pm \pi)}=\sqrt{\operatorname{tg} x}$.

Функция возрастает при $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ (по свойству сложной функции) и принимает только неотрицательные значения. График функции изображён на рисунке 22. ◀

Тригонометрические функции широко применяются в математике, физике и технике. Например, многие процессы, такие, как колебания струны, маятника, напряжение в цепи переменного тока и т. д., описываются функциями, которые задаются формулами вида $y=A\sin(\omega x+\varphi)$. Такие процессы называют гармоническими колебаниями, а описывающие их функции — гармониками (от греческого слова harmonikos — соразмерный). График функции $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ получается из синусоиды $y=\sin x$ сжатием или растяжением её вдоль координатных осей и сдвигом вдоль оси Ox. Обычно гармоническое колебание является функцией времени t, т. е. $y=A\sin(\omega t+\varphi)$, где A — амплитуда колебания, ω — частота, φ — начальная фаза, а $\frac{2\pi}{\omega}$ — период колебания.

Упражнения

74. (Устно.) Выяснить, при каких значениях x из промежутка $-\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ функция $y=\operatorname{tg} x$ принимает: 1) значение, равное 0; 2) положительные значения; 3) отрицательные значения.

75. (Устно.) Выяснить, является ли функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастающей на промежутке:

1) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$; 4) $[2; 3]$.

76. Найти значение функции при заданном значении аргумента:

1) $y = \operatorname{tg} x,\ x = \frac{3\pi}{4}$; 2) $y = \operatorname{tg} 3x,\ x = \frac{2\pi}{3}$;

3) $y = \operatorname{ctg} x,\ x = \frac{5\pi}{6}$; 4) $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2},\ x = \frac{\pi}{2}$.

77. Найти значение функции $y = \frac{1}{|\operatorname{tg} x|}$ при:

1) $x = \frac{5\pi}{6}$; 2) $x = \frac{3\pi}{4}$; 3) $x = -\frac{\pi}{6}$; 4) $x = -\frac{2\pi}{3}$.

78. Выяснить, принадлежит ли графику функции $y = \operatorname{tg} 2x$ точка с координатами:

1) $\left(\frac{3\pi}{8}; -1\right)$; 2) $\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

3) $\left(\frac{14\pi}{3}; \sqrt{3}\right)$; 4) $\left(-\frac{17\pi}{8}; -1\right)$.

79. С помощью свойств функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ сравнить числа:

1) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$; 2) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{8}$ и $\operatorname{ctg} \frac{8\pi}{9}$;

3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$;

5) $\operatorname{ctg} 2$ и $\operatorname{ctg} 3$; 6) $\operatorname{tg} 1$ и $\operatorname{tg} 1{,}5$.

80. Найти все принадлежащие промежутку $(-\pi; 2\pi)$ корни уравнения:

1) $\operatorname{ctg} x = 1$; 2) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} x = -1$.

81. Найти все принадлежащие промежутку $(-\pi; 2\pi)$ решения неравенства:

1) $\operatorname{tg} x \geqslant 1$; 2) $\operatorname{tg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{ctg} x < -1$; 4) $\operatorname{ctg} x \geqslant -\sqrt{3}$.

82. Построив график функции $y = f(x)$, найти: а) область определения; б) множество значений; в) промежутки возрастания:

1) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, \text{ если } \pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2}, \\ \sin x, \text{ если } -\pi \leqslant x < \pi; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x, \text{ если } -\pi < x < -\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \leqslant x < 2\pi, \\ \cos x, \text{ если } -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$

83. Решить неравенство:

1) $\operatorname{ctg} x < 1$; 2) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{tg} x > -1$.

84. Найти все принадлежащие промежутку $[0; 3\pi]$ корни уравнения:

1) $\operatorname{tg} x = 3$; 2) $\operatorname{ctg} x = -2$.

85. Найти все принадлежащие промежутку $[0; 3\pi]$ решения неравенства:

1) $\operatorname{tg} x \geqslant 3$; 2) $\operatorname{tg} x < 4$; 3) $\operatorname{tg} x \leqslant -4$; 4) $\operatorname{tg} x > -3$.

86. Решить неравенство:

1) $\operatorname{ctg} x > 4$; 2) $\operatorname{tg} x \leqslant 5$; 3) $\operatorname{ctg} x < -4$; 4) $\operatorname{tg} x \geqslant -5$.

87. Найти все принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ корни уравнения:

1) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$; 2) $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = -1$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\operatorname{ctg} 3x = 1$.

88. Найти все принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ решения неравенства:

1) $\operatorname{tg} 2x \leqslant 1$; 2) $\operatorname{tg} 3x < -\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} \geqslant 1$.

89. Построить график и выяснить свойства функции:

1) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

3) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.

90. Найти множество значений функции $y = \operatorname{tg} x$, если x принадлежит промежутку:

1) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; 2) $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $(0; \pi)$; 4) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Построить график функции **(91—93)**.

91. 1) $y = \operatorname{tg}|x|$; 2) $y = |\operatorname{tg} x|$; 3) $y = \operatorname{ctg} x$; 4) $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$.

92. 1) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$; 2) $y = \sin x \operatorname{ctg} x$; 3) $y = 2^{\operatorname{tg} x}$; 4) $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$.

93. 1) $y = \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

94. Решить неравенство:

1) $\operatorname{tg}^2 x < 1$; 2) $\operatorname{tg}^2 x \geqslant 3$; 3) $3\sin^2 x + \sin x \cos x > 2$.

§ 6. Обратные тригонометрические функции

1. Функция $y = \arcsin x$

По определению арксинуса числа (см. учебник 10 класса) для каждого $x \in [-1; 1]$ определено одно число $y = \arcsin x$. Тем самым на отрезке $[-1; 1]$ задана функция

$$y = \arcsin x.$$

Покажем, что функция $y = \arcsin x$ является обратной к функции $y = \sin x$, рассматриваемой на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

○ Рассмотрим уравнение $\sin x = y$, где y — заданное число из отрезка $-1 \leqslant y \leqslant 1$, а x — неизвестное. На отрезке $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ это уравнение по определению арксинуса числа имеет единственный корень $x = \arcsin y$.

Поменяв в этой формуле местами x и y, получим $y = \arcsin x$. ●

Таким образом, свойства функции $y = \arcsin x$ можно получить из свойств функции $y = \sin x$. График функции $y = \arcsin x$ симметричен графику функции $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, относительно прямой $y = x$ (рис. 23, 24).

Основные свойства функции $y = \arcsin x$

1) Область определения — отрезок $[-1; 1]$.
2) Множество значений — отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
3) Нечётная, так как $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
4) Возрастающая.

Для функции $y = \sin x$ обратную можно найти, например, на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. На нём функция $y = \sin x$ убывает от 1 до -1, т. е. на этом промежутке функция имеет обратную. Для её нахождения возьмём произвольное значение y_0 из множества $[-1; 1]$ и найдём соответствующее значение x_0, исходя из того, что $y_0 = \sin x_0$, $x_0 \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Очевидно, что $x_0 = \pi - \arcsin y_0$. Поменяв местами x и y, получим функцию $y = \pi - \arcsin x$. Таким образом, для функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ обратной будет функция $y = \pi - \arcsin x$ с областью определения $[-1; 1]$

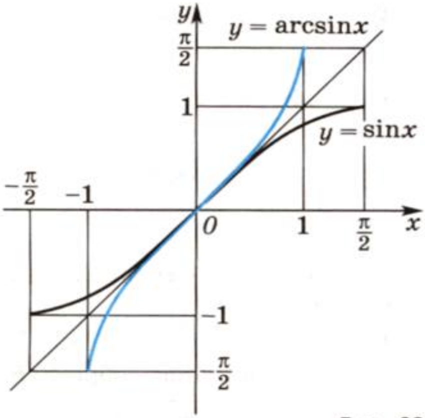


Рис. 23

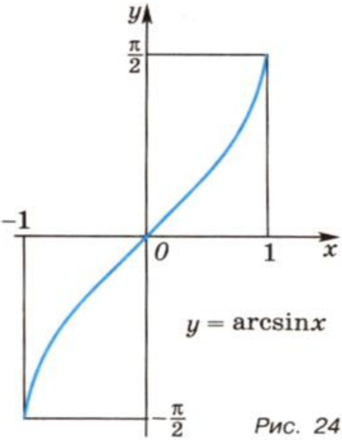


Рис. 24

и множеством значений $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (рис. 25).

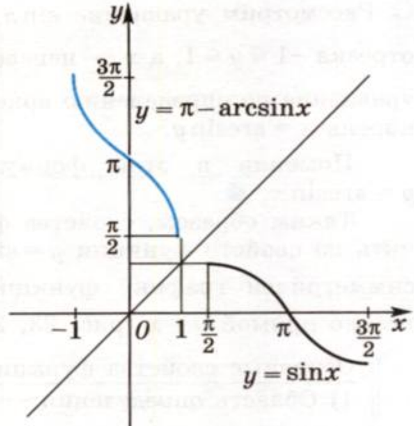


Рис. 25

2. Функция $y = \arccos x$

По определению арккосинуса числа для каждого $x \in [-1; \ 1]$ определено одно число $y = \arccos x$. Тем самым на отрезке $[-1; \ 1]$ определена функция $y = \arccos x$. Эта функция является обратной к функции $y = \cos x$, рассматриваемой на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$. График функции $y = \arccos x$ симметричен графику функции $y = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, относительно прямой $y = x$ (рис. 26, 27).

Основные свойства функции $y = \arccos x$

1) Область определения — отрезок $[-1; 1]$.
2) Множество значений — отрезок $[0; \pi]$.
3) Убывающая.

3. Функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$

По определению арктангенса числа для каждого действительного x определено одно число $y = \operatorname{arctg} x$. Тем самым на всей числовой прямой определена функция $y = \operatorname{arctg} x$. Эта функция является обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$, рассматриваемой на интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. График функции $y = \operatorname{arctg} x$

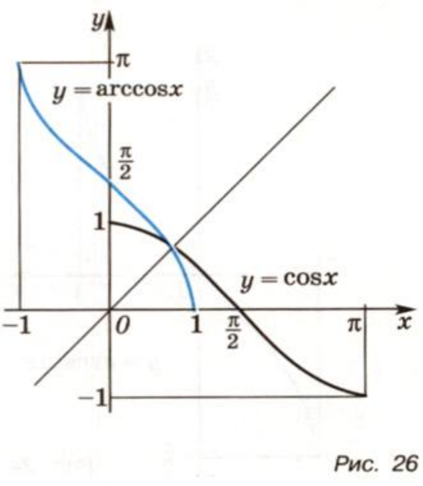


Рис. 26

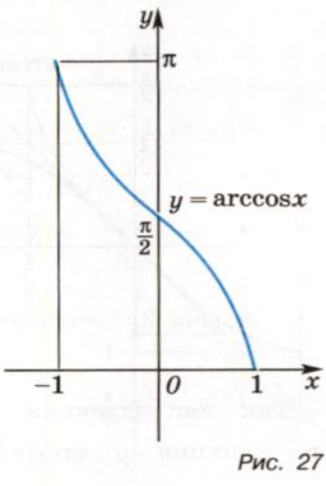


Рис. 27

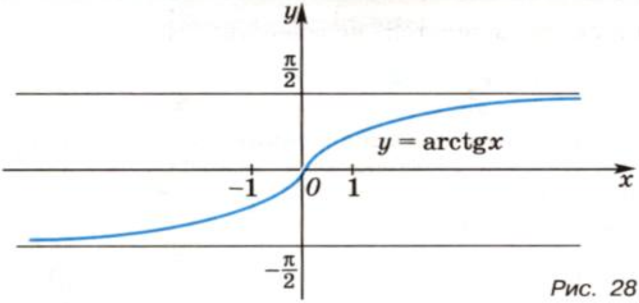


Рис. 28

(рис. 28) получается из графика функции $y = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 17), симметрией относительно прямой $y = x$.

Основные свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$

1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел.
2) Множество значений — интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
3) Возрастающая.
4) Нечётная, $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

По определению арккотангенса числа для каждого действительного x определено одно число $y = \operatorname{arcctg} x$. Тем самым на всей числовой прямой определена функция $y = \operatorname{arcctg} x$. Эта функция является обратной к функции $y = \operatorname{ctg} x$, рассматриваемой на интервале $(0; \pi)$. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ получается из графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, симметрией относительно прямой $y = x$.

Основные свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$

1) Область определения — множество $\boldsymbol{R}$.
2) Множество значений — интервал $(0; \pi)$.
3) Убывающая.
4) Нечётная, $\operatorname{arcctg}(-x) = -\operatorname{arcctg} x$.

Задача 1. Решить уравнение $\arccos(3x + 1) = \frac{2\pi}{3}$.

▷ Так как $\frac{2\pi}{3} \in [0; \pi]$, то по определению арккосинуса числа данное уравнение равносильно уравнению $3x + 1 = \cos\frac{2\pi}{3}$, откуда $3x + 1 = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$. ◀

Задача 2. Найти область определения функции

$$y = \arcsin\frac{x-2}{3}.$$

▷ Так как функция $y = \arcsin t$ определена при $-1 \leqslant t \leqslant 1$, то функция $y = \arcsin\frac{x-2}{3}$ определена для тех значений x, для которых выполняется неравенство $-1 \leqslant \frac{x-2}{3} \leqslant 1$. Отсюда $-3 \leqslant x-2 \leqslant 3$, $-1 \leqslant x \leqslant 5$. ◀

<u>Задача 3.</u> Найти значение функции $y = \operatorname{tg} x$ при $x = \arcsin\frac{2}{3}$.

▷ Так как $x = \arcsin\frac{2}{3}$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\sin x = \frac{2}{3}$, т. е. x — угол первой четверти.

Найдём $\cos x$ по формуле $|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Так как x — угол I четверти, то $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. ◀

<u>Задача 4.</u> Построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

▷ Функция определена на всём множестве действительных чисел, её период равен 2π. Построим график функции на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Если $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $y = x$. Если $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant x - \pi \leqslant \frac{\pi}{2}$ и из определения арксинуса следует, что $\arcsin(\sin(x-\pi)) = x - \pi$. Так как $\sin(x-\pi) = -\sin x$, то

$$\arcsin(\sin(x-\pi)) = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x).$$

Таким образом, если $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то $x - \pi = -\arcsin(\sin x)$ и $\arcsin(\sin x) = \pi - x$. Следовательно, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

$$y = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, \text{ если } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, \text{ если } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

График изображён на рисунке 29. ◀

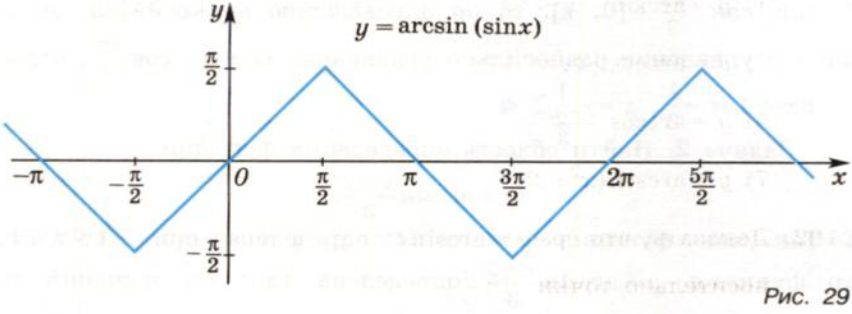


Рис. 29

Упражнения

Сравнить числа **(95—97)**.

95. 1) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arcsin \frac{2}{\sqrt{10}}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$;

3) $\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\arcsin \frac{\sqrt{5}}{3}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$.

96. 1) $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$;

3) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{4}$ и $\arccos \frac{\sqrt{7}}{7}$; 4) $\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{3}{7}\right)$.

97. 1) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}$ и $\operatorname{arctg} 3\sqrt{2}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

3) $\operatorname{arcctg} \sqrt{5}$ и $\operatorname{arcctg} \sqrt{7}$; 4) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ и $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{2}\right)$.

Решить уравнение **(98—100)**.

98. 1) $\arcsin(2-3x)=\frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin(3-2x)=\frac{\pi}{4}$;

3) $\arcsin \frac{x-2}{4}=-\frac{\pi}{4}$; 4) $\arcsin \frac{x+3}{2}=-\frac{\pi}{3}$.

99. 1) $\arccos(2x+3)=\frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos(3x+1)=\frac{\pi}{2}$;

3) $\arccos \frac{x+1}{3}=\frac{2\pi}{3}$; 4) $\arccos \frac{2x-1}{3}=\pi$.

100. 1) $\operatorname{arctg} \frac{1-x}{4}=\frac{\pi}{3}$; 2) $\operatorname{arctg} \frac{1+2x}{3}=\frac{\pi}{4}$;

3) $\operatorname{arctg}(2x+1)=-\frac{\pi}{3}$; 4) $\operatorname{arctg}(2-3x)=-\frac{\pi}{4}$.

101. Найти область определения функции:

1) $y=\arcsin \frac{x-3}{2}$; 2) $y=\arccos(2-3x)$;

3) $y=\arccos\left(2\sqrt{x}-3\right)$; 4) $y=\arcsin \frac{2x^2-5}{3}$;

5) $y=\arccos \frac{2-\sqrt{x}}{3}$; 6) $y=\arcsin\left(3\sqrt{x}-2\right)$;

7) $y=\arcsin(x^2-2)$; 8) $y=\arccos(x^2-x)$.

102. Доказать, что график функции $y=\arccos x$ симметричен относительно точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

103. Построить график функции:

1) $y = \arcsin(2x + 3)$; 2) $y = 2\arccos(x - 1)$;

3) $y = \operatorname{arcctg} x$; 4) $y = \operatorname{arcctg}(x + 1)$.

104. Доказать, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

105. Доказать, что $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

106. Построить график функции:

1) $y = \arccos(\cos x)$;

2) $y = \arcsin(\cos x)$.

107. Найти функцию, обратную к функции $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi; 0]$.

Упражнения к главе I

108. Найти область определения функции:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$; 3) $y = \sqrt{\sin x}$;

4) $y = \sqrt{\cos x}$; 5) $y = \frac{2x}{2\sin x - 1}$; 6) $y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x - \sin x}$.

109. Найти множество значений функции:

1) $y = 1 - 2\sin^2 x$; 2) $y = 2\cos^2 x - 1$;

3) $y = 3 - 2\sin^2 x$; 4) $y = 2\cos^2 x + 5$;

5) $y = \cos 3x \sin x - \sin 3x \cos x + 4$;

6) $y = \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x - 3$.

110. Выяснить, является ли чётной или нечётной функция:

1) $y = x^2 + \cos x$; 2) $y = x^3 - \sin x$;

3) $y = (1 - x^2)\cos x$; 4) $y = (1 + \sin x)\sin x$.

111. Доказать, что наименьший положительный период функции $y = f(x)$ равен T:

1) $y = \cos 7x$, $T = \frac{2\pi}{7}$; 2) $y = \sin \frac{x}{7}$, $T = 14\pi$.

112. Сравнить числа:

1) $\sin 1$ и $\cos 2$; 2) $\sin(-1)$ и $\cos 1$;

3) $\sin 3{,}5$ и $\operatorname{tg} 3{,}5$; 4) $\cos 3$ и $\operatorname{tg} 4$.

113. Выяснить, какая из функций $y = \sin x$ или $y = \cos x$ является убывающей на промежутке:

1) $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

114. Найти множество значений функции $y = f(x)$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$, если:

1) $f(x) = \sin x$; 2) $f(x) = \cos x$; 3) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

115. С помощью графика функции $y = \cos x$ найти такие значения x из заданного промежутка, при которых справедливо равенство:

1) $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

116. С помощью графиков функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ найти все такие значения x из заданного промежутка, при которых справедливо неравенство:

1) $\operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}$, $[-\pi; \pi]$; 2) $\operatorname{ctg} x \leqslant 1$, $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$;

3) $\operatorname{ctg} x \geqslant -1$, $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$; 4) $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}$, $\left(-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$.

117. Найти принадлежащие промежутку $[0; 3\pi]$ корни уравнения:

1) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; 2) $\sqrt{3} - \sin x = \sin x$;

3) $3\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 4) $\cos x + 1 = 0$.

118. Найти все принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\pi]$ решения неравенства:

1) $1 + 2\cos x \geqslant 0$; 2) $1 - 2\sin x < 0$;

3) $2 + \operatorname{tg} x > 0$; 4) $1 - 2\operatorname{tg} x \leqslant 0$.

119. С помощью графиков функций найти число корней уравнения:

1) $\cos x = x^2$; 2) $\sin x = \frac{x}{2}$.

120. Построить график функции:

1) $y = \frac{1}{2}\sin x$; 2) $y = \cos x - \frac{1}{2}$.

---

121. Расположить в порядке убывания числа:

1) $\operatorname{tg}\frac{15\pi}{14}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$;

2) $\operatorname{tg} 3$, $\operatorname{tg} 1{,}8$, $\operatorname{tg} 2$, $\operatorname{tg} 4{,}5$.

122. Найти область определения функции:

1) $y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

123. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \cos^4 x - \sin^4 x$; 2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = 1 - 2|\sin 3x|$; 4) $y = \sin^2 x - 2\cos^2 x$.

124. Выяснить, является ли чётной или нечётной функция:
1) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$; 2) $y = \sin x \operatorname{tg} x$; 3) $y = \sin x |\cos x|$.

125. Найти наименьший положительный период функции:

1) $y = 2\sin(2x + 1)$; 2) $y = 3\operatorname{tg}\frac{1}{4}(x+1)$.

126. Решить графически уравнение:

1) $\cos x = |x|$; 2) $\sin x = -|x + 1|$.

127. Найти нули функции:
1) $y = \cos^2 x - \cos x$;
2) $y = \cos x - \cos 2x - \sin 3x$.

128. Решить уравнение:

1) $\arccos(x - 3) = \frac{3\pi}{4}$; 2) $\arcsin\left(\frac{x+2}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

129. Найти все значения x, при которых функция

$$y = 1{,}5 - 2\sin^2\frac{x}{2}$$

принимает положительные значения.

130. Построить график функции:

1) $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 2$; 2) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$;

3) $y = \cos|x|$; 4) $y = -\sin x$;

5) $y = \sin x + |\sin x|$; 6) $y = 2^{\sin x}$.

131. Найти множество значений функции:
1) $y = 12\sin x - 5\cos x$; 2) $y = \cos^2 x - \sin x$.

132. Решить неравенство:
1) $\sin x \geqslant \cos x$; 2) $\operatorname{tg} x > \sin x$.

133. Сечение канала — равнобедренный треугольник площади S. Каким должен быть угол при вершине этого треугольника, чтобы канал имел наименьший *смоченный периметр* (длина границы сечения, соприкасающаяся с водой).

Вопросы к главе I

1. Назвать множество значений каждой из функций

$$y = \sin x,\ y = \cos x.$$

2. Назвать область определения каждой из функций

$$y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x.$$

3. Какая из функций

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x$$

является чётной?

4. Какая функция называется периодической?

5. Привести пример функции, у которой наименьший положительный период равен: 2π; π; $\frac{\pi}{2}$; 3π.

6. Назвать промежутки возрастания каждой из функций

$$y = \sin x,\ y = \cos x.$$

7. При каких значениях x каждая из функций

$$y = \operatorname{tg} x,\ y = \operatorname{ctg} x$$

принимает положительные значения?

8. При каких значениях x каждая из функций

$$y = \sin x,\ y = \cos x$$

принимает наибольшее и наименьшее значения?

9. Назвать область определения каждой из функций

$$y = \arcsin\ x,\ y = \arccos\ x.$$

10. Назвать множество значений каждой из функций

$$y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x.$$

Проверь себя!

1. Найти область определения функции $y = \operatorname{tg} 2x$. Является ли эта функция чётной?

2. Построить графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ на отрезке $[-2\pi; -\pi]$. Для каждой из этих функций найти значения x из данного отрезка, при которых:

   1) $y(x) = 1$; 2) $y(x) = -1$; 3) $y(x) = 0$;

   4) $y(x) > 0$; 5) $y(x) < 0$.

3. Найти все значения x из промежутка $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$, для которых выполняется неравенство $\cos\ x < -\frac{1}{2}$.

4. Расположить в порядке возрастания числа:

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3},\ \operatorname{ctg}\frac{7\pi}{8},\ \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{7},\ \operatorname{ctg}2.$$

---

1. Построить график функции $y=-\cos x$ и найти значения x, при которых функция: а) принимает отрицательные значения; б) убывает.

2. Построить график функции $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$ и найти значения x, при которых функция принимает положительные значения.

3. С помощью графиков функций выяснить, сколько корней имеет уравнение $\cos x=\lg x$.

4. Найти множество значений функции $y=\sin^2 x+2\cos 2x$.

5. Исследовать функцию $y=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$ и построить её график.

Историческая справка

Тригонометрические функции (получившие название от греч. trigonon — треугольник и metreo — измеряю) играют большую роль в математике и её приложениях.

Исследованием тригонометрических функций практически занимались ещё древнегреческие математики, изучая взаимное изменение величин в геометрии и астрономии. Отношения сторон в прямоугольных треугольниках, по своей сути являющиеся тригонометрическими функциями, рассматривались уже в IV—III вв. до н. э. в работах Евклида, Архимеда, Аполлония и других учёных.

Учение о тригонометрических величинах получило развитие в VIII—IX вв. в странах Среднего и Ближнего Востока. Так, в IX в. в Багдаде аль-Хорезми составил первые таблицы синусов. Аль-Бузджани в X в. сформулировал теорему синусов и с её помощью построил таблицу синусов с интервалом 15′, в которой значения синусов приведены с точностью до восьмого десятичного знака. Ахмад-аль-Беруни в XI в. вместо деления радиуса на части при определении значений синуса и косинуса, сделанного до него Птолемеем, начал использовать окружность единичного радиуса. В первой половине XV в. аль-Каши создал тригонометрические таблицы с шагом 1′, которые в последующие 250 лет были непревзойдёнными по точности. Самым крупным европейским представителем той эпохи, внёсшим вклад в развитие исследования тригонометрических функций, считается Региомонтан.

В начале XVII в. в развитии тригонометрии наметилось новое направление — аналитическое. Если до этого учения о тригонометрических функциях строились на геометрической основе, то в XVII—XIX вв. тригонометрия постепенно вошла в состав математического анализа и стала широко использоваться в механике и технике, особенно при рассмотрении колебательных процессов и иных периодических явлений.

О свойствах периодичности тригонометрических функций знал ещё Ф. Виет. Швейцарский математик И. Бернулли в своих работах начал применять символы тригонометрических функций. Однако близкую к принятой теперь символику ввёл Л. Эйлер в 1748 г. в своей работе «Введение в анализ бесконечных». В ней он рассмотрел вопрос о знаках всех тригонометрических функций любого аргумента.

Тригонометрические функции Эйлер рассматривал как особые числа, называя их общим термином *трансцендентные количества*, получающиеся из круга. Для вычисления приближённых значений $\sin x$ и $\cos x$ он получил их разложения в ряды:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots; \qquad (1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots. \qquad (2)$$

Можно показать, что графики функций, образованных разным числом членов ряда (1) или (2), постепенно приближаются к графику функции $y = \cos x$ или $y = \sin x$.

В XIX в. дальнейшее развитие теории тригонометрических функций было продолжено в работах русского математика Н. И. Лобачевского (1792—1856), а также в трудах других учёных, например в работах профессоров МГУ Д. Е. Меньшова, Н. К. Бари, А. Н. Колмогорова.

Глава II

Производная и её геометрический смысл

Все большие этапы развития математики всегда были связаны с воздействием тех или иных видов практической деятельности.

А. Н. Тихонов

Эта и две следующие главы учебника посвящены началам математического анализа. Вы уже вплотную подходили к вопросам математического анализа, когда изучали различные свойства элементарных функций. Чем же особенным занимается математический анализ (который считается разделом высшей математики)?

Знакомая вам элементарная математика (арифметика, геометрия, алгебра преобразований и уравнений) в основном является математикой постоянных величин. Но всё окружающее нас так или иначе изменяется во времени, и на практике мы чаще всего имеем дело с переменными, а не постоянными величинами. Различные виды движения описываются с помощью функций, поэтому функции являются объектами изучения таких наук, как физика, астрономия, биология, социология и др. А математический анализ — это основа языка описания переменных величин и зависимостей одних величин от других (т. е. функций). Важнейшие понятия математического анализа — это функция, предел, производная, дифференциал, интеграл, ряд. Методом исследования этого раздела математики является анализ бесконечно малых величин или, как говорят, анализ посредством предельных переходов (с которым вы впервые встретились в 10 классе при определении степени с действительным показателем).

Понятие предела (даже и проиллюстрированное) воспринимается непросто как молодыми, так и взрослыми людьми (отчасти поэтому вопросы математического анализа мы включили в содержание 11 класса, а не 10 класса). Ни у кого не вызывает затруднений следить за постепенным «движением» по дискретной (прерывистой) последовательности значений a_1, a_2, a_3 .... Однако при определении предела приходится иметь дело и с непрерывным переменным x, принимающим все действительные значения из некоторого промежутка числовой прямой. Далеко не всем бывает понятен процесс бесконечного приближения x к конкретному числу (пределу), если знать, что «следующего» числа за любым действительным числом просто не существует (между любыми двумя числами на числовой прямой находится бесконечно много действительных чисел).

Ещё со времён Евдокса (жившего в IV в. до н. э.) и вплоть до XVII в. попытки учёных дать точную математическую формулировку интуитивному представлению о непрерывности движения были безуспешны. И лишь в XIX в. произошёл истинный прорыв в теории пределов. Тогда великий французский математик О. Коши (1789—1859) осознал, что в описании процесса приближения переменного x к конкретному числу дело касается лишь математических понятий, а интуитивные и метафизические представления о непрерывном движении не должны в нём использоваться.

Определения пределов, с которыми вы познакомитесь в этой главе (идущие от Коши) статичные, но они подвергают точному математическому анализу само непрерывное движение и разрешают, в частности, парадоксы Зенона (с которыми вы знакомились в курсе 10 класса).

При изучении многих процессов возникают задачи определения скорости этих процессов. Решение таких задач подводит к понятию производной, которая определяется с помощью предельного перехода. Понятие производной функции тесно связано с построением касательной к графику этой функции. Проведение касательных, в свою очередь, связано с нахождением скоростей: если точка движется по кривой линии, вектор скорости в каждый момент времени направлен по касательной к кривой, а его длина равна линейной скорости движущейся точки.

Декарт рассматривал касательную как секущую, у которой обе точки пересечения с кривой сливаются в одну. Нахождение точек пересечения секущей с кривой он сводил к решению алгебраических уравнений (оставалось найти общие корни полученных уравнений). Продолжая исследования Декарта и обобщая опыт своих предшественников в вопросах построения касательных, И. Ньютон и Г. Лейбниц (независимо друг от друга) пришли к открытию дифференциального исчисления — важнейшей части математического анализа.

В наши дни без знания математического анализа невозможно, например, рассчитать траектории космических объектов, закономерности движения земной коры, невозможно экономично управлять хозяйством, технологическими процессами, так как всё это развивающиеся, динамические явления.

В этой главе, помимо представления о пределе, будут определены понятия непрерывности функции и её производной, обоснованы правила дифференцирования (нахождения производной) многих элементарных функций, установлен геометрический смысл производной.

Надеемся, что параллельно с изучением материала главы вы самостоятельно более подробно познакомитесь с историей математического анализа и с его применением в естественных науках, в практике.

§ 1. Предел последовательности

1. Числовые последовательности

Обратимся к понятию числовой последовательности, рассмотренному в курсе алгебры 9—10 классов.

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* (или просто последовательность)

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots\ .$$

Кратко последовательность обозначают символом $\{x_n\}$ или (x_n), при этом x_n называют *членом* или *элементом* этой последовательности, n — номером члена x_n.

Числовая последовательность — это функция, область определения которой есть множество N всех натуральных чисел. Множество значений этой функции, т. е. совокупность чисел x_n, $n \in N$, называют *множеством значений последовательности.*

Множество значений последовательности может быть как конечным, так и бесконечным, в то время как множество её элементов всегда является бесконечным: любые два разных элемента последовательности различаются своими номерами.

Например, множество значений последовательности $\{(-1)^n\}$ состоит из двух чисел 1 и -1, а множества значений последовательностей $\{n^2\}$ и $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ бесконечны.

Последовательность может быть задана с помощью формулы, позволяющей вычислить каждый член последовательности по его номеру. Например, если $x_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}$, то каждый нечётный член последовательности равен 0, а каждый чётный член равен 1.

Иногда последовательность задаётся *рекуррентной формулой*, позволяющей находить каждый член последовательности по известному предыдущему (или по известным предыдущим). При таком способе задания последовательности обычно указывают:

а) первый член последовательности x_1 (или несколько членов, например x_1, x_2);

б) формулу, связывающую n-й член с предыдущими членами.

Так, арифметическая прогрессия с разностью d и геометрическая прогрессия со знаменателем $q \neq 0$ задаются соответственно рекуррентными формулами

$$a_{n+1} = a_n + d,$$
$$b_{n+1} = b_n q.$$

Зная первый член каждой прогрессии a_1 и b_1, можно получить формулу $(n+1)$-го члена соответствующей прогрессии:

$$a_{n+1} = a_1 + nd,$$
$$b_{n+1} = b_1 q^n, \ n \in \boldsymbol{N}.$$

Рекуррентной формулой $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 3$, и условиями $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ задаётся *последовательность Фибоначчи*.

В некоторых случаях последовательность может быть задана описанием её членов. Например, если x_n — простое число с номером n, то $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 7$, $x_5 = 11$ и т. д.

Отметим, наконец, что последовательность $\{x_n\}$ можно изобразить:

а) точками с координатами $(n;\ x_n)$, $n \in \boldsymbol{N}$, на плоскости;

б) точками x_n, $n \in \boldsymbol{N}$, на числовой оси.

2. Определение предела последовательности

Понятие предела последовательности было введено в учебнике алгебры и начал математического анализа для 10 класса (глава IV, § 1) и использовалось при вычислении суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Предваряя введение строгого определения предела последовательности, рассмотрим примеры числовых последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где

$$x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, \ y_n = \frac{1}{2^n}.$$

$$\{x_n\}\colon 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \frac{9}{8}, \frac{8}{9}, \ldots;$$

$$\{y_n\}\colon \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots.$$

Изобразим члены этих последовательностей точками на числовой прямой (рис. 30, 31).

Заметим, что члены последовательности $\{x_n\}$ как бы «сгущаются» около точки 1 (см. рис. 30), располагаясь правее точки 1 при чётных n и левее точки 1 при нечётных n. С увеличением n расстояние от точки x_n до точки 1 уменьшается (стремится к нулю). Поэтому число 1 называют пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$ и пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$.

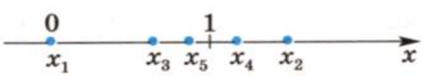


Рис. 30

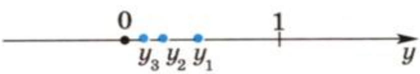


Рис. 31

Аналогично члены последовательности $\{y_n\}$ с ростом n «приближаются» к точке 0 (см. рис. 31), и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Введём определение предела последовательности.

Определение

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N_ε, что для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Если a — предел последовательности, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Последовательность, у которой существует предел, называют *сходящейся*. Последовательность, не являющуюся сходящейся, называют *расходящейся*; иначе говоря, последовательность называют расходящейся, если никакое число не является её пределом.

Заметим, что если $x_n = a$ для всех $n \in \boldsymbol{N}$ (такую последовательность называют *стационарной*), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Из определения предела последовательности следует, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный a, тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n - a\}$ имеет предел, равный нулю.

Задача 1. Доказать, что предел последовательности $\{x_n\}$ равен a:

1) $x_n = \dfrac{n-1}{n}$, $a = 1$; 2) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $a = 0$;

3) $x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$, $a = 0$;

4) $x_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$, $a = 1$.

▷ 1) Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Так как $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$, то $|x_n - 1| = \dfrac{1}{n}$. Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$. Неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ будет выполняться, если $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, т. е. при $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Выберем в качестве N_ε какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию $N_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$, например число $N_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, где $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ — целая часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее $\dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда для всех $n \geqslant N_\varepsilon$ будет выполняться неравенство $|x_n - 1| = \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$. По определению предела это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$.

2) Воспользуемся тем, что $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}$ и при $\varepsilon>0$ неравенство $\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$ равносильно каждому из неравенств $\frac{1}{n}<\varepsilon^2$, $n>\frac{1}{\varepsilon^2}$. Пусть $N_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$, тогда $\frac{1}{N_\varepsilon}<\varepsilon^2$, $\frac{1}{\sqrt{N_\varepsilon}}<\varepsilon$ и при всех $n\geqslant N_\varepsilon$ выполняются неравенства $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{N_\varepsilon}}<\varepsilon$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$.

Аналогично можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$, если $\alpha>0$.

3) Умножив и разделив x_n на $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}$, получим

$$x_n=\frac{\left(\sqrt{n+2}\right)^2-\left(\sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},$$

откуда $|x_n|<\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Неравенство $\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$ будет выполняться, если $\sqrt{n}>\frac{1}{2\varepsilon}$, т. е. при $n>\frac{1}{4\varepsilon^2}$. Пусть $N_\varepsilon=\left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right]+1$, тогда для всех $n\geqslant N_\varepsilon$ выполняются неравенства $|x_n|<\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{N_\varepsilon}}<\varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+1}\right)=0$.

4) Так как $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, то $x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$, откуда $|x_n-1|=\frac{1}{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. ◀

Обратимся ещё раз к определению предела. Согласно определению число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, если при всех $n\geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$, которое можно записать в виде $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$.

Другими словами, для каждого $\varepsilon>0$ найдётся номер N_ε, начиная с которого все члены последовательности $\{x_n\}$ принадлежат интервалу $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$. Этот интервал называют *ε-окрестностью точки a* (рис. 32).

Итак, число a — предел последовательности $\{x_n\}$, если для каждой ε-окрестности точки a найдётся номер, начиная с которого все члены последовательности принадлежат этой окрестности, так что вне этой окрестности либо нет ни одного члена последовательности, либо содержится лишь конечное число членов.

Рис. 32

3. Свойства сходящихся последовательностей

Перечислим основные свойства сходящихся последовательностей.

Свойство 1. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то она ограничена, т. е. существуют числа c_1 и c_2, такие, что $c_1 \leqslant x_n \leqslant c_2$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Замечание. Из ограниченности последовательности не следует её сходимость. Например, последовательность $\{(-1)^n\}$ ограничена, но не является сходящейся.

Свойство 2. Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ таковы, что $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ для всех $n \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то последовательность $\{y_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство свойства 2 основано на том, что в любой окрестности точки a содержатся все члены последовательностей $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$, за исключением, быть может, конечного числа. Этим же свойством обладает и последовательность $\{y_n\}$, так как все её члены заключены между соответствующими членами последовательностей $\{x_n\}$ и $\{z_n\}$.

Задача 2. Пусть $\alpha_n \geqslant -1$ при всех $n \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{1+\alpha_n} = 1,\ k \in \mathbf{N},\ k \geqslant 2. \quad (1)$$

▷ Докажем сначала, что

$$1 - |\alpha_n| \leqslant \sqrt[k]{1+\alpha_n} \leqslant 1 + |\alpha_n|,\ n \in \mathbf{N},\ k \in \mathbf{N}. \quad (2)$$

В самом деле, если $\alpha_n \geqslant 0$, то

$$1 \leqslant \sqrt[k]{1+\alpha_n} \leqslant \left(\sqrt[k]{1+\alpha_n}\right)^k = 1 + \alpha_n = 1 + |\alpha_n|,$$

если $-1 \leqslant \alpha_n < 0$, то

$$1 \geqslant \sqrt[k]{1+\alpha_n} \geqslant \left(\sqrt[k]{1+\alpha_n}\right)^k = 1 + \alpha_n = 1 - |\alpha_n|,$$

откуда следуют неравенства (2). Применяя свойство 2, получаем утверждение (1). ◀

Замечание. Если $x_n = \sqrt[k]{a+\alpha_n}$, где $a > 0$, $a + \alpha_n \geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то $x_n = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{1 + \frac{\alpha_n}{a}}$ и из (1) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a+\alpha_n} = \sqrt[k]{a}$.

Свойство 3. Если $x_n \geqslant y_n$ для всех n и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $a \geqslant b$.

4. Предел монотонной последовательности

Определение 1

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей*, если каждый её последующий член больше предыдущего, т. е. если $x_n < x_{n+1}$ для всех n.
Если $x_n \leqslant x_{n+1}$ для всех n, то последовательность $\{x_n\}$ называют *неубывающей*.

Определение 2

Последовательность $\{x_n\}$ называется *убывающей*, если каждый предыдущий её член больше последующего, т. е. $x_n > x_{n+1}$ для всех n.
Если $x_n \geqslant x_{n+1}$ для всех n, то последовательность $\{x_n\}$ называют *невозрастающей*.

Возрастающие, неубывающие, убывающие и невозрастающие последовательности называют *монотонными*.

Теорема 1

Если последовательность $\{x_n\}$ является возрастающей (или неубывающей) и ограничена сверху, т. е. $x_n \leqslant M$ для всех n, то она имеет предел.

Теорема 2

Если последовательность $\{x_n\}$ является убывающей (или невозрастающей) и ограничена снизу, т. е. $x_n \geqslant m$ для всех n, то она имеет предел.

Доказательство теорем 1 и 2 обычно даётся в курсе высшей математики. Эти теоремы широко применяются в математике и, в частности, в геометрии. Рассмотрим квадрат $ABCD$, вписанный в круг радиуса R (рис. 33). Соединив отрезками вершины этого квадрата с серединами дуг AB, BC, CD и DA, получим правильный 8-угольник, вписанный в тот же круг.

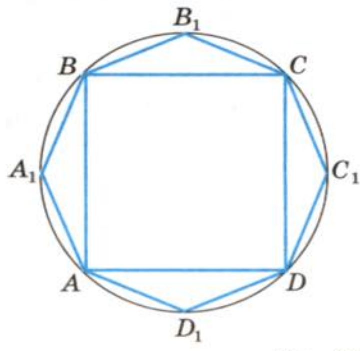


Рис. 33

Продолжая аналогичные построения, образуем последовательность правильных 2^n-угольников ($n \geqslant 2$), каждый из которых вписан в тот же круг и получен из предыдущего удвоением числа его сторон.

Последовательность площадей этих правильных многоугольников является возрастающей, так как каждый последующий многоугольник содержит предыдущий. Кроме того, эта последовательность ограничена сверху: площадь каждого из этих многоугольников меньше площади квадрата, описанного около круга радиуса R. По теореме 1 данная последовательность имеет предел. Этот предел равен πR^2.

5. Число e

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Можно доказать, что $\{x_n\}$ — возрастающая и ограниченная сверху последовательность. По теореме 1 она имеет предел, который обозначается e, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число e играет важную роль в математике и её приложениях. Оно является иррациональным, причём

$$e \approx 2{,}718281828459045.$$

6. Вычисление пределов последовательностей

При вычислении пределов последовательностей используются определение предела, свойство 2 (п. 3), теорема о пределе монотонной последовательности, а также теорема 3, связанная с арифметическими действиями над последовательностями и сформулированная ниже.

Теорема 3

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$, в частности если $y_n = C$ для всех n, то $\lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n) = C\lim\limits_{n\to\infty} x_n = Ca$, т. е. постоянный множитель можно вынести за знак предела;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ при условии, что $y_n \neq 0$ для всех n и $b \neq 0$.

Задача 3. Найти предел последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n = \frac{2n^3+3n-5}{3n^3+2n^2-4}$; 2) $x_n = \frac{\sqrt{2n^2-n+3}}{n}$; 3) $x_n = \frac{\sqrt[3]{3n^3+4n^2+5}}{n}$.

▷ 1) Разделив числитель и знаменатель дроби на n^3, получим $x_n = \frac{2+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{3+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^3}}$. Так как $\frac{1}{n^k}\to 0$ при $n\to\infty$ $(k\in \boldsymbol{N})$, то предел числителя равен 2, а предел знаменателя равен 3. Поэтому по теореме 3 получим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

2) Так как

$$\sqrt{2n^2-n+3}=n\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2n}+\frac{3}{2n^2}},$$

где $-\frac{1}{2n}+\frac{3}{2n^2}\to 0$ при $n\to\infty$, то, используя результат задачи **2**, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2n}+\frac{3}{2n^2}}=\sqrt{2}$.

3) Пользуясь тем, что

$$x_n=\frac{n\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{1+\frac{4}{3n}+\frac{5}{3n^3}}}{n},$$

и снова, используя результат задачи 2, находим $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{3}$. ◀

Задача 4. Найти предел последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n=\sqrt{2n^2+4n+5}-\sqrt{2n^2-2n+3}$; 2) $x_n=\frac{2^n}{n!}$.

▷ 1) Умножив и разделив x_n на выражение $\sqrt{2n^2+4n+5}+$ $+\sqrt{2n^2-2n+3}$, которое называют сопряжённым с x_n, получим

$$x_n=\frac{2n^2+4n+5-(2n^2-2n+3)}{\sqrt{2n^2+4n+5}+\sqrt{2n^2-2n+3}}=\frac{6n+2}{n\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{2n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{3}{2n^2}}\right)}=$$

$$=\frac{6+\frac{2}{n}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{5}{2n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{3}{2n^2}}\right)},$$

откуда следует (задача **2** и теорема 3), что

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{6}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

2) Так как

$$x_{n+1}=\frac{2}{n+1}x_n, \tag{1}$$

а $\frac{2}{n+1}\leqslant 1$, то при всех n выполняется неравенство $x_{n+1}\leqslant x_n$, т. е. $\{x_n\}$ — невозрастающая последовательность. Кроме того, $x_n>0$ при всех n, т. е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу.

По теореме 2 эта последовательность имеет предел. Обозначим его a. Чтобы найти число a, перейдём к пределу в равенстве (1), учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$. Отсюда, используя теорему 3, получаем $a=0\cdot a$, т. е. $a=0$.

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. ◀

Упражнения

134. Изобразить на числовой прямой несколько членов последовательности $\{x_n\}$ и выяснить, к какому числу они приближаются:

1) $x_n = \frac{1}{n}$; 2) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$; 3) $x_n = \frac{n+1}{n}$; 4) $x_n = \frac{n-2}{n}$.

135. Исходя из определения предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$:

1) $x_n = \frac{1}{n+1}$; 2) $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; 3) $x_n = \frac{1}{n^3}$;

4) $x_n = \frac{1}{2^n}$; 5) $x_n = \frac{1}{3n+2}$; 6) $x_n = \frac{n+1}{n^2}$.

136. Найти предел последовательности $\{x_n\}$, если:

1) $x_n = \frac{n-1}{n}$; 2) $x_n = \frac{2n^2-1}{n^2}$;

3) $x_n = \frac{3n+4}{n}$; 4) $x_n = \frac{n-3}{n+1}$.

137. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной, если:

1) $x_n = \sin\frac{\pi\sqrt{n}}{4}$; 2) $x_n = \frac{n+2}{n^2+4}$; 3) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (138—139).

138. 1) $x_n = \frac{5n+2}{3n+4}$; 2) $x_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+7}$;

3) $x_n = \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$;

4) $x_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$;

5) $x_n = \sqrt{\frac{3n+5}{2n-1}}$; 6) $x_n = \sqrt{n^2-n+2} - n$.

139. 1) $x_n = \sqrt[3]{\frac{n^2+2n+3}{4n^2-n+2}}$; 2) $x_n = \frac{\sqrt[3]{8n^3+2n^2+1}}{n}$;

3) $x_n = \sqrt{3n^2+4n+1} - \sqrt{3n^2-2n+5}$; 4) $x_n = \sqrt[3]{n^3+2n} - n$.

140. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}}\right)$, где $\{a_k\}$ — арифметическая прогрессия, все члены и разность d которой отличны от нуля.

§ 2. Предел функции

1. Определение предела функции

Важную роль в математике играет понятие предела, связанное с поведением функции в окрестности данной точки, т. е. на некотором интервале, содержащем эту точку.

Предваряя определение предела функции, рассмотрим две задачи.

Задача 1. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ в окрестности точки $x=1$.

▷ Эта функция определена при $x\neq 1$, и $f(x)=x+1$ при $x\neq 1$. Графиком функции $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ (рис. 34) является прямая $y=x+1$ с «выколотой» точкой (1; 2). С помощью стрелок на рисунке показано, что если значения x приближаются к 1, то соответствующие значения функции приближаются к 2. Число 2 называют пределом функции $f(x)$ в точке $x=1$ (при x, стремящемся к 1) и пишут

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2 \text{ или } f(x)\to 2 \text{ при } x\to 1. \blacktriangleleft$$

Задача 2. Исследовать функцию

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 \text{ при } x>0, \\ 0 \text{ при } x=0, \\ x+1 \text{ при } x<0 \end{cases}$$

в окрестности точки $x=0$.

▷ Функция $f(x)$ определена при всех $x\in\boldsymbol{R}$, её график изображён на рисунке 35. Из рисунка видно, что при значениях x, близких к $x=0$, значения функции близки к 1. В этом случае $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$. ◀

Замечание. В задаче 1 функция $f(x)$ не определена в точке $x=1$, а $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$. В задаче 2 функция $f(x)$ определена в точке $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, а значение функции в точке $x=0$ равняется 0.

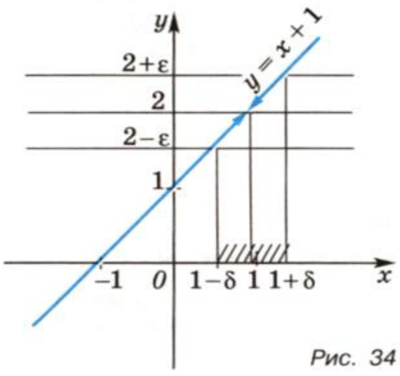


Рис. 34

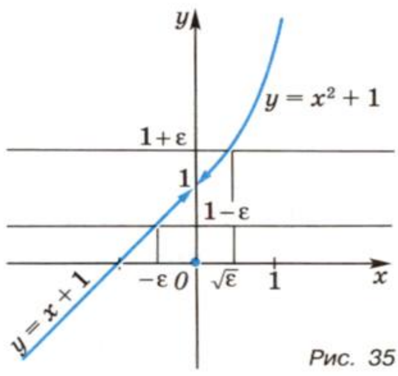


Рис. 35

В задаче **1** абсолютную величину разности $f(x) - 2$ можно сделать сколь угодно малой (меньше любого положительного числа ε), если значения аргумента x будут достаточно близки к точке $x = 1$, причём с уменьшением величины $|f(x) - 2|$ будет уменьшаться окрестность точки a, в которой выполняется неравенство $|f(x) - 2| < \varepsilon$ (сама точка $x = 1$ из рассмотрения исключается). Придадим этому утверждению точную формулировку.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Найдём такое число $\delta > 0$, чтобы для всех x, таких, что $|x - 1| < \delta$, $x \neq 1$, выполнялось неравенство $|f(x) - 2| < \varepsilon$. Иначе говоря, найдём такое $\delta > 0$, чтобы для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - 1| < \delta$, соответствующие точки графика функции $y = f(x)$ лежали в горизонтальной полосе, ограниченной прямыми $y = 2 - \varepsilon$ и $y = 2 + \varepsilon$ (см. рис. 34). В качестве δ в задаче **1** можно взять число $\delta = \varepsilon$.

Обратимся к задаче **2**, в которой $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Пусть $\varepsilon > 0$. Проведём прямые $y = 1 - \varepsilon$ и $y = 1 + \varepsilon$. Тогда в горизонтальной полосе, ограниченной этими прямыми, лежат все точки графика функции $y = f(x)$, если $0 < |x| < \delta$, где в качестве δ выбрано наименьшее из чисел ε и $\sqrt{\varepsilon}$ (см. рис. 35).

Определение

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* a (*при* x, *стремящемся к* a), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Множество точек x, таких, что $|x - a| < \delta$, $x \neq a$, или $0 < |x - a| < \delta$, называют *проколотой δ-окрестностью точки a*.

Заметим, что число δ, вообще говоря, зависит от ε (задачи 1, 2). Если A — предел функции $f(x)$ в точке a, то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Задача 3. Показать, что функция $f(x) = (x - 3)^2 + 5$ имеет в точке $x = 3$ предел, равный 5.

▷ Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Покажем, что найдётся число $\delta > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - 3| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$. Так как $|f(x) - 5| = (x - 3)^2$, то неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$ равносильно неравенству $|x - 3| < \sqrt{\varepsilon}$. Возьмём $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, тогда из неравенства $|x - 3| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$. По определению предела это означает, что $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$. ◀

2. Различные типы пределов

Односторонние конечные пределы

Задача 4. Исследовать функцию $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leqslant 1, \\ x + 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$ в окрестности точки $x = 1$.

▷ График функции $y = f(x)$ изображён на рисунке 36. Видно, что если значения x близки к 1, но меньше 1, то значения функции $f(x)$ близки к 1; если же значения x близки к 1, но больше 1, то значения функции $f(x)$ близки к 2. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x = 1$ предел слева, равный 1, и предел справа, равный 2, и пишут $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = 2$. Эти пределы называют односторонними.

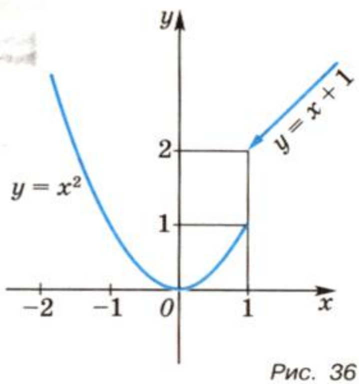


Рис. 36

Определение 1

Число A_1 называется *пределом слева функции* $f(x)$ *в точке* a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $a - \delta < x < a$, выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = A_1$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A_1$.

Определение 2

Число A_2 называется *пределом справа функции* $f(x)$ *в точке* a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A_2| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = A_2$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A_2$.

Из определений предела функции $f(x)$ в точке a и односторонних пределов следует, что функция $f(x)$ имеет в точке a предел, равный A, тогда и только тогда, когда существуют пределы этой функции слева и справа и эти пределы совпадают ($A_1 = A_2 = A$).

Бесконечный предел в конечной точке

Задача 5. Исследовать функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ в окрестности точки $x = 0$.

▷ Функция $y = \frac{1}{x}$, график которой изображён на рисунке 37, определена при $x \neq 0$. При приближении к точке $x = 0$ слева и справа значения этой функции по абсолютной величине неограниченно возрастают, причём знак y совпадает со знаком x.

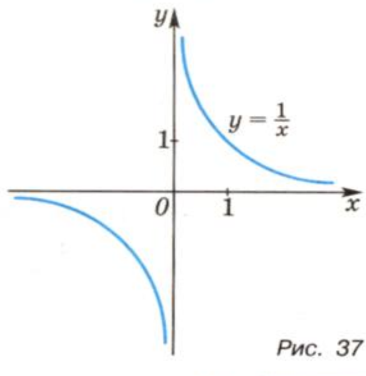


Рис. 37

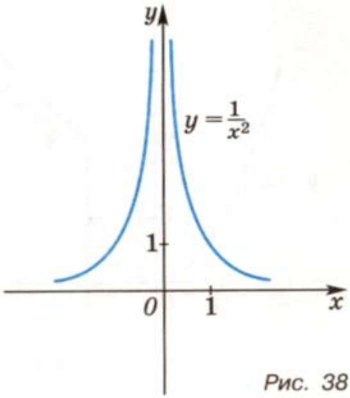


Рис. 38

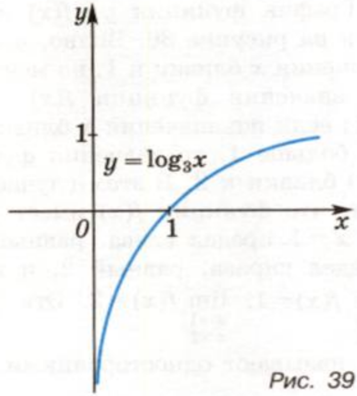


Рис. 39

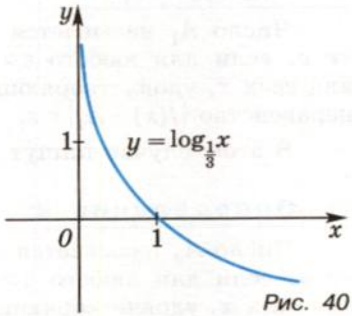


Рис. 40

В этом случае говорят, что функция $f(x)=\frac{1}{x}$ имеет в точке $x=0$ бесконечный предел (является бесконечно большой), и пишут $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$. Если $x<0$ и x стремится к нулю, то $|f(x)|$ неограниченно возрастает и $f(x)<0$. В этом случае пишут $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty$ или $\lim\limits_{x\to -0} f(x)=-\infty$ и говорят, что функция $f(x)$ имеет предел слева в точке $x=0$, равный минус бесконечности. Если $x>0$ и x стремится к нулю, то функция $f(x)=\frac{1}{x}$ имеет предел справа в точке $x=0$, равный плюс бесконечности:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty \text{ или } \lim_{x\to +0} f(x)=+\infty.$$

В общем случае запись $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство

$$|f(x)|>\varepsilon. \qquad (1)$$

Если неравенство (1) можно заменить неравенством $f(x)>\varepsilon$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$. Например, если $f(x)=\frac{1}{x^2}$, то $\lim\limits_{x\to +0} f(x)=+\infty$ (рис. 38).

Аналогично рассматриваются записи вида $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=+\infty$ и т. д. Например, если $f(x)=\log_3 x$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ (рис. 39), а если $f(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$ (рис. 40).

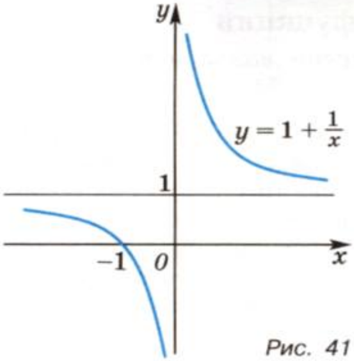


Рис. 41

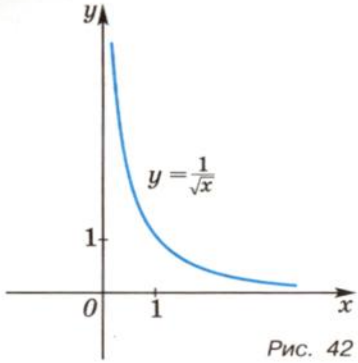


Рис. 42

Прямую $x = 0$ (ось Oy) называют *вертикальной асимптотой* графиков функций

$$y = \frac{1}{x},\ y = \frac{1}{x^2},\ y = \log_3 x,\ y = \log_{\frac{1}{3}} x \text{ (см. рис. 37—40).}$$

Предел в бесконечности

Рассмотрим функцию $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, график которой изображён на рисунке 41. При больших по абсолютной величине значениях x значения этой функции близки к 1.

Поэтому говорят, что существует предел функции $f(x)$ при x, *стремящемся к бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.

Прямую $y = 1$ называют *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = 1 + \frac{1}{x}$ при $x \to \infty$.

Аналогично прямая $y = 0$ — асимптота графиков функций $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{1}{x^2}$ при $x \to \infty$ (см. рис. 37, 38).

В общем случае запись $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Если неравенство (2) справедливо при всех $x > \delta$, то пишут

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A,$$

а если при всех $x < -\delta$, то пишут

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A.$$

Например, если $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (рис. 42), то $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, а если $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$, то $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (рис. 43).

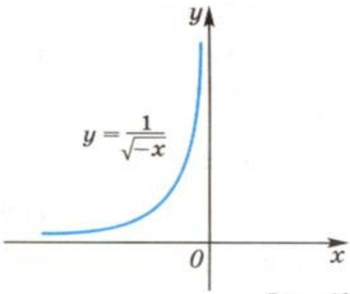


Рис. 43

3. Бесконечно малые функции

Функцию $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Бесконечно малые функции обладают следующим свойством:

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to a$, а c_1 и c_2 — некоторые постоянные, то $c_1\alpha(x) + c_2\beta(x)$ также является бесконечно малой функцией при $x \to a$.
В частности, сумма и разность бесконечно малых функций — бесконечно малые функции. Кроме того, произведение $\alpha(x)\beta(x)$ бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ также является бесконечно малой функцией.

Например, функции $3x$, $4x^3$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$. Если $x \to 0$ и $x > 0$, то $\sqrt{x} \to 0$, т. е. $\sqrt{x}$ — бесконечно малая функция при $x \to +0$. Аналогично $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$ при $x \to +\infty$, т. е. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ — бесконечно малая функция при $x \to +\infty$.

Если $x \to \infty$, то $\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{2}{x^2} \to 0$, т. е. $\frac{1}{x}$, $\frac{2}{x^2}$ — бесконечно малые функции при $x \to \infty$.

З а м е ч а н и е. Из определений предела функции и бесконечно малой функции следует, что число A является пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, т. е. $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

4. Свойства пределов функций

С в о й с т в о 1. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, то

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

$$\lim_{x \to a} (f(x)\,g(x)) = AB,$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \text{ при условии, что } B \neq 0.$$

С в о й с т в о 2. Если в некоторой проколотой окрестности точки a справедливы неравенства $f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$, то $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)$ существует и равен A.

Для доказательства свойства 1 можно воспользоваться свойствами бесконечно малых функций и замечанием п. 3; а свойства 1 и 2 следуют из определения предела функции.

Задача 6. Пусть $b > 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$. Доказать, что

$$\lim_{x \to a} \sqrt{b + \alpha(x)} = \sqrt{b}.$$

▷ Обозначим $\varphi(x) = \sqrt{b + \alpha(x)} - \sqrt{b}$. Нужно доказать, что $\varphi(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$, т. е. $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$. Умножив и разделив $\varphi(x)$ на $\sqrt{b+\alpha(x)}+\sqrt{b}$, получим $\varphi(x)=\frac{\alpha(x)}{\sqrt{b+\alpha(x)}+\sqrt{b}}$, где $b+\alpha(x)>0$ в некоторой окрестности точки a, так как $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ и $b>0$. Тогда $|\varphi(x)|=\frac{|\alpha(x)|}{\sqrt{b+\alpha(x)}+\sqrt{b}}<\frac{|\alpha(x)|}{\sqrt{b}}$, и поэтому $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$. ◀

Задача 7. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3+x+4x^2}{1-2x+3x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+5}{2x^2+x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x}$.

▷ 1) Так как Cx^k, где C — постоянная, $k\in N$, является бесконечно малой функцией при $x\to 0$, то предел числителя равен 3, а предел знаменателя равен 1. Поэтому искомый предел равен 3 (свойство 1).

2) Умножив числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{x-1}+1$, получим $\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{1+(x-2)}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+(x-2)}+1}$ при $x\neq 2$, где $\sqrt{1+(x-2)}\to 1$ при $x\to 2$ (задача **6**). Используя свойство 1 пределов, находим, что искомый предел равен $\frac{1}{2}$.

3) Разделив числитель и знаменатель дроби на x^2, запишем её в виде $\frac{3-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$. Так как $\frac{C}{x^k}\to 0$ при $x\to\infty$ (C — постоянная, $k\in N$), то искомый предел равен $\frac{2}{3}$.

4) Последовательно преобразуем данную функцию ($x>0$): $\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x}=\sqrt{\frac{x^2+2x+3}{x^2}}=\sqrt{1+\frac{2}{3}+\frac{3}{x^2}}$. Отсюда следует (задача **6**), что искомый предел равен 1. ◀

Упражнения

141. Построить график функции $y=f(x)$ и найти $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, если:

1) $f(x)=\frac{x^2}{|x|}$, $a=0$; 2) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$, $a=-3$;

3) $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$, $a=1$; 4) $f(x)=\frac{2x^2-x-6}{x-2}$, $a=2$.

142. Найти пределы слева и справа функции $f(x)$ в точке a, если:

1) $f(x)=\begin{cases}1-x^2 \text{ при } x<0,\\ x+2 \text{ при } x>0,\end{cases}$ $a=0$; 2) $f(x)=\frac{3x-|x|}{2x}$, $a=0$;

3) $f(x)=\begin{cases}|x|-1 \text{ при } x<-1,\\ \sqrt{x+2} \text{ при } x>-1,\end{cases}$ $a=-1$;

4) $f(x)=\begin{cases}x^2-2|x| \text{ при } x<-1,\\ x+3 \text{ при } x>-1,\end{cases}$ $a=-1$.

143. Используя определение предела, доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x+6)=2$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}((x-1)^4+3)=3$.

144. Найти вертикальные асимптоты графика функции:

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$; 2) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+3}$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-|x|}$.

145. Найти горизонтальную асимптоту графика функции:

1) $f(x)=\dfrac{3x+2}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{5x-4}{x+1}$; 3) $f(x)=\dfrac{1-x}{3x+2}$.

146. Вычислить:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-x+x^3}{2+2x-x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x+7}{6x^2-x+5}$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+4x+7}}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

§ 3. Непрерывность функции

1. Понятие непрерывности

Обратимся к графику функции, изображённому на рисунке 36 (§ 2, задача 4). Он состоит из двух «кусков»: $y=x^2$, $x\leqslant 1$, и $y=x+1$, $x>1$. Каждый из них может быть нарисован непрерывным движением карандаша без отрыва от бумаги. Однако эти «куски» не соединены непрерывно: в точке $x=1$ происходит скачкообразное изменение функции.

Поэтому все значения x, кроме $x=1$, называют *точками непрерывности* функции $y=f(x)$, а точку $x=1$ — *точкой разрыва* этой функции.

Аналогично функция, график которой изображён на рисунке 34 (§ 2, задача **1**), непрерывна в каждой точке x, кроме точки 1, хотя функция имеет предел в этой точке, равный 2. Функция не является непрерывной при $x=1$, так как она не определена в точке $x=1$.

Функция $y=\dfrac{1}{x}$ (§ 2, задача **5**, рис. 37) непрерывна при $x<0$ и при $x>0$, точка $x=0$ — точка разрыва этой функции.

Дадим определение непрерывности.

Определение 1

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Например, функция $f(x) = (x-3)^2 + 2$ (§ 2, задача 3) непрерывна в точке $x = 3$, так как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(3) = 2$.

Функция $f(x)$ *непрерывна в точке a*, если выполнены следующие условия:

а) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a (включая точку a);

б) существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$;

в) $A = f(a)$.

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то говорят, что точка a — точка разрыва функции $f(x)$.

Задача 1. Выяснить, является ли функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+8}{x+2} \text{ при } x \neq -1, \\ 10 \text{ при } x = -2 \end{cases}$$ непрерывной в точке $x = -2$.

▷ Если $x \neq -2$, то $f(x) = x^2 - 2x + 4$, и поэтому $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 12$. Так как $f(-2) = 10$, то $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$. Следовательно, функция $f(x)$ не является непрерывной в точке $x = -2$, т. е. $x = -2$ — точка разрыва функции $f(x)$. ◀

Заметим, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$.

Если $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$, то функцию $f(x)$ называют *непрерывной слева в точке a*, если же $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$, то функцию называют *непрерывной справа в точке a*. Отсюда следует, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, когда она непрерывна как слева, так и справа в точке a.

Обозначим $x - a = h$ и назовем h *приращением аргумента*. Разность $f(x) - f(a) = f(a+h) - f(a)$ назовем *приращением функции* и обозначим Δf. В этих обозначениях равенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ примет вид $\lim\limits_{h \to 0} \Delta f = 0$.

Таким образом, непрерывность функции $f(x)$ в точке a означает, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. $\Delta f \to 0$ при $h \to 0$.

Задача 2. Функция $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ не определена в точке $x=1$. Определить её в точке $x=1$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна при $x=1$.

▷ В задаче **1** из § 2 было показано, что $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ существует и равен 2. Если положить $f(x)=2$, т. е. рассмотреть функцию $\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) \text{ при } x\neq 1, \\ 2 \text{ при } x=1, \end{cases}$ то эта функция непрерывна в точке $x=1$. В таком случае говорят, что функция $f(x)$ доопределена по непрерывности в точке a. ◀

В задаче **4**, § 2, была рассмотрена функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ при } x\leqslant 1, \\ x+1 \text{ при } x>1. \end{cases}$$

Она не является непрерывной в точке $x=1$, но $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=$ $=f(1)=1$. Поэтому данная функция непрерывна слева в точке 1, но не является непрерывной справа в этой точке: $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=2$.

Отметим, что все основные элементарные функции (степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические) непрерывны в каждой точке своей области определения. В частности, любой многочлен — функция, непрерывная в каждой точке $x\in \boldsymbol{R}$; рациональная функция (отношение многочленов) — функция, непрерывная во всех точках, где знаменатель этой рациональной функции не равен нулю.

Определение 2

Функцию $f(x)$ называют ***непрерывной на интервале*** $(a;\ b)$, если она непрерывна в каждой точке x из этого интервала.

Определение 3

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на интервале $(a;\ b)$, а также непрерывна справа в точке a и слева в точке b, то её называют ***непрерывной на отрезке*** $[a;\ b]$.

Задача 3. Найти числа b и c, такие, при которых функция

$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ при } x<2, \\ b \text{ при } x=2, \\ x+c \text{ при } x>2 \end{cases}$ непрерывна в точке $x=2$.

▷ Так как $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=4$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=2+c$, $f(2)=b$, то непрерывность в точке 2 будет только при условиях $4=2+c$ и $2+c=b$, которые выполняются при $b=4$, $c=2$. ◀

2. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 1

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то она принимает на этом отрезке своё наибольшее и своё наименьшее значения, т. е. существуют точки $x_1 \in [a;\ b]$, $x_2 \in [a;\ b]$, такие, что для всех $x \in [a;\ b]$ выполняются неравенства $f(x) \geqslant f(x_1)$, $f(x) \leqslant f(x_2)$.

Теорема 2 (о промежуточных значениях)

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то она принимает на этом отрезке любое значение C, заключённое между $f(a)$ и $f(b)$, т. е. существует точка x_0, такая, что $a < x_0 < b$ и $f(x_0) = C$.

В частности, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, т. е.

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

то существует точка $c \in (a;\ b)$, такая, что $f(c) = 0$ (рис. 44).

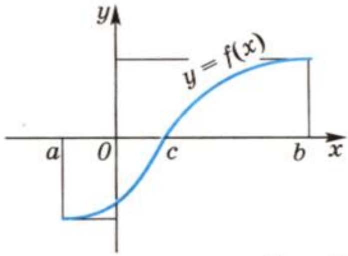


Рис. 44

Задача 4. Доказать, что уравнение $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$ имеет корень на отрезке $[-1;\ 0]$.

▷ Функция $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ непрерывна на отрезке $[-1;\ 0]$, $f(-1) = -2$, $f(0) = 3$. По теореме 2 на интервале $(-1;\ 0)$ существует точка c, такая, что $f(c) = 0$, т. е. данное уравнение имеет корень на отрезке $[-1;\ 0]$. ◀

Теорема 3 (об обратной функции)

Если функция $f(x)$ непрерывна и возрастает на отрезке $[a;\ b]$, то на отрезке $[f(a);\ f(b)]$ определена обратная к $f(x)$ функция, которая является непрерывной и возрастающей.

Например, функция $y = \sin x$, где $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, непрерывна и возрастает. Обратная функция $y = \arcsin x$ определена на отрезке $[-1;\ 1]$, является непрерывной и возрастающей.

Упражнения

147. Принадлежит ли графику функции $y = f(x)$ точка A, если:

1) $y = 2^{\frac{x^2-4}{x+2}}$, $A(2;\ 1)$; 2) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$, $A\left(\frac{3\pi}{4};\ 0\right)$;

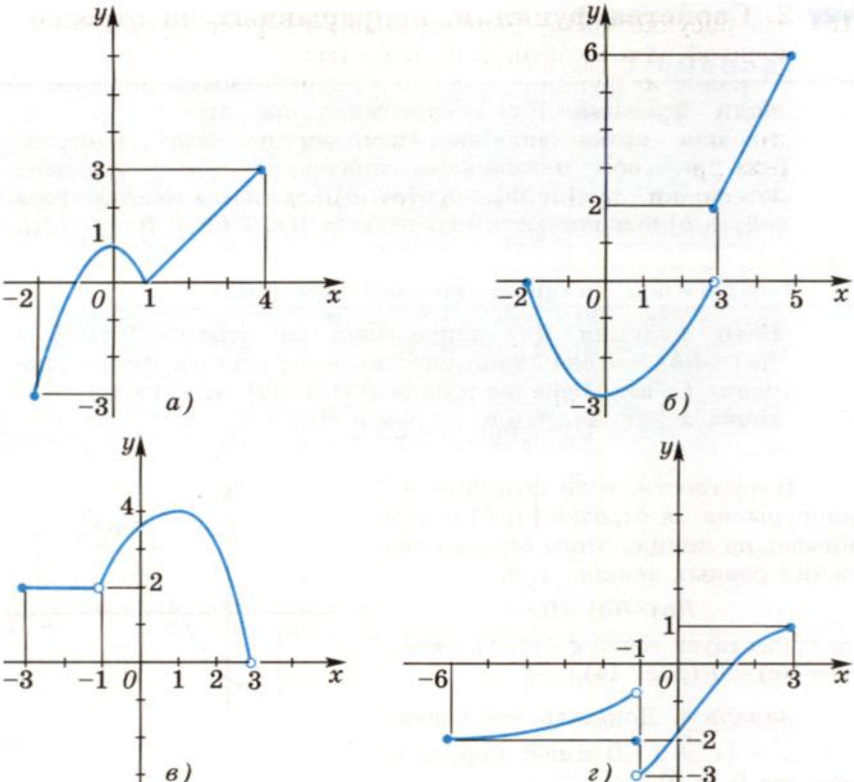


Рис. 45

3) $y = 3^{\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}}$, $A\left(-\sqrt{2};\ 1\right)$; 4) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$, $A\left(\frac{3\pi}{4};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$?

148. Функция $y = f(x)$ задана графиком (рис. 45). Найти область определения и множество значений функции.

149. Найти область определения и множество значений функции:

1) $y = x^2 - 3x - 4$; 2) $y = 3 - 2x - x^2$;

3) $y = \frac{1}{x-1}$; 4) $y = \frac{2+x}{x+1}$.

150. Построить график функции:

1) $y = \begin{cases} x - 2 \text{ при } x \neq 3, \\ 4 \text{ при } x = 3; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 1 - x^2 \text{ при } x \neq 2, \\ 3 \text{ при } x = 2; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} x^2 - 2x \text{ при } x \leqslant 3, \\ x - 3 \text{ при } x > 3; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2}x^2 \text{ при } x < 2, \\ x^2 - 4 \text{ при } x \geqslant 2. \end{cases}$

151. На рисунке 45 (*а—г*) изображены графики функций. Для каждой из этих функций выяснить:

1) какие из функций являются непрерывными на своей области определения;

2) какие точки являются точками разрыва на отрезке $[-2; 2]$;

3) какие из функций являются непрерывными на интервале $(-2; 1)$.

152. Построить график функции:

1) $f(x)=\begin{cases}2^x \text{ при } x<2,\\ 4+\sqrt{x-2} \text{ при } x>2;\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}\log_2 x \text{ при } x\leqslant 2,\\ x^2-4x+3 \text{ при } x>2;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}|x-2| \text{ при } x<2,\\ |x-4| \text{ при } x>2;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} \text{ при } x\geqslant 2,\\ x-1 \text{ при } x<2.\end{cases}$

Выяснить:

а) имеет ли эта функция предел при $x\to 2$; б) является ли эта функция непрерывной на всей числовой прямой; в) на каких промежутках функция непрерывна.

153. Выяснить, является ли непрерывной в точке x_0 функция:

1) $y=\dfrac{1+x}{x+3}$, $x_0=-3$;

2) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+4}{x+2} \text{ при } x\neq -2,\\ 3 \text{ при } x=-2,\end{cases}$ $x_0=-2$;

3) $f(x)=\begin{cases}x^2+4 \text{ при } x<2,\\ x+6 \text{ при } x\geqslant 2,\end{cases}$ $x_0=2$;

4) $f(x)=\begin{cases}\sin x \text{ при } x<\pi,\\ 6+|x-\pi| \text{ при } x\geqslant\pi,\end{cases}$ $x_0=\pi$.

154. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке a, если:

1) $f(x)=\begin{cases}1-x^2 \text{ при } x<2,\\ 3x-9 \text{ при } x\geqslant 2,\end{cases}$ $a=2$;

2) $f(x)=\begin{cases}|\cos x| \text{ при } x<\pi,\\ (x-\pi)^2+1 \text{ при } x\geqslant\pi,\end{cases}$ $a=\pi$.

155. Найти число b, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a, если:

1) $f(x)=\begin{cases}\log_2(x+1) \text{ при } x\leqslant 1,\\ \dfrac{b}{x^2} \text{ при } x>1,\end{cases}$ $a=1$;

2) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{x}{2} \text{ при } x<\pi, \\ bx \text{ при } x\geqslant\pi,\end{cases}$ $a=\pi$;

3) $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x}{1+x^3} \text{ при } x\neq -1, \\ b \text{ при } x=-1,\end{cases}$ $a=-1$;

4) $f(x)=\begin{cases}\cos x \text{ при } x\leqslant 0, \\ b(x-1) \text{ при } x>0,\end{cases}$ $a=0$.

§ 4. Определение производной

Пусть материальная точка движется вдоль оси Os, где O (начало отсчёта) определяет положение материальной точки в момент времени $t=0$.

Если в момент времени t координата движущейся точки равна $s\ (t)$, то говорят, что функция $s\ (t)$ задаёт закон движения.

Пусть рассматриваемое движение не является равномерным, тогда за равные промежутки времени материальная точка может совершать перемещения, разные как по величине, так и по направлению.

Средняя скорость движения за промежуток времени от t до $t+h$ определяется формулой $v_{\text{ср}}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$.

Определение

Скоростью точки в момент t *(мгновенной скоростью)* называют предел, к которому стремится средняя скорость, когда $h\to 0$, т. е. скорость $v\ (t)$ в момент t определяется равенством $v(t)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$.

Таким образом, скорость в момент времени t — предел отношения приращения координаты движущейся точки за промежуток времени от t до $t+h$, т. е. разности $s\ (t+h)-s\ (t)$, к приращению времени h, когда $h\to 0$.

Например, если материальная точка движется по закону $s=\frac{gt^2}{2}$ (закон свободного падения), то

$$v_{\text{ср}}=\frac{s(t+h)-s(t)}{h}=\frac{g}{2h}((t+h)^2-t^2),\ \text{ или } \ v_{\text{ср}}=gt+\frac{g}{2}h,\ \text{ откуда}$$

$$\lim_{h\to 0} v_{\text{ср}}=gt,\ \text{ т. е. } v\ (t)=gt.$$

Мгновенную скорость $v\ (t)$ называют *производной функции* $s\ (t)$ и обозначают $s'\ (t)$ (читается: «эс штрих от тэ»), т. е.

$$v\ (t)=s'\ (t).$$

1. Производная

Перейдём теперь к общему определению производной. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0, т. е.

на некотором интервале, содержащем точку x_0, и пусть точка x_0+h также принадлежит этому интервалу. Рассмотрим приращение функции $f(x_0+h)-f(x_0)$ и составим дробь

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \qquad (1)$$

Дробь (1) есть отношение приращения функции $f(x_0+h)-$ $-f(x_0)$ к приращению аргумента h. Эту дробь будем называть *разностным отношением*. Если существует предел дроби (1) при $h\to 0$, то этот предел называют производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$.

Определение

Производной функции $f(x)$ *в точке* x_0 называется предел разностного отношения при $h\to 0$, т. е.

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \qquad (2)$$

Из определения предела следует, что

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)=\alpha(h), \qquad (3)$$

где $\alpha(h)\to 0$ при $h\to 0$.

Запишем равенство (3) в виде

$$f(x_0+h)-f(x_0)=(f'(x_0)+\alpha(h))\ h. \qquad (4)$$

Если $h\to 0$, то правая часть равенства (4) стремится к нулю, поэтому $f(x_0+h)-f(x_0)=\Delta f\to 0$ при $h\to 0$. Это означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Итак, если функция имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Если существует $f'(x_0)$, то говорят, что функция $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, а если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что функция $f(x)$ *дифференцируема на этом промежутке*.

Заметим, что из непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 не следует её дифференцируемость в этой точке. Например, функция $f(x)=|x|$ непрерывна в точке $x=0$, но не имеет производной в этой точке. Действительно,

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1, \text{ если } h>0,\\ -1, \text{ если } h<0,\end{cases}$$

откуда следует, что разностное отношение $\frac{f(h)-f(0)}{h}$ не имеет предела при $h\to 0$.

Если функция $f(x)$ непрерывна слева в точке x_0 и существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то этот предел называется *левой производной функции* $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'_-(x_0)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0, то *правая производная* $f'_+(x_0)$ определяется равенством

$$f'_+(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{или} \quad f'_+(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Например, если $f(x) = |x|$, то $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$.

2. Нахождение производной функций $kx + b$, x^2, x^3

Задача 1. Найти производную постоянной, т. е. функции $f(x) = C$, принимающей при всех x одно и то же значение.

▷ Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{C - C}{h} = 0.$$

Следовательно, $f'(x) = 0$. ◀

Таким образом, производная постоянной равна нулю:

$$C' = 0.$$

Задача 2. Найти производную линейной функции

$$f(x) = kx + b.$$

▷ Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k(x+h) + b - (kx + b)}{h} = \frac{kh}{h} = k.$$

Следовательно, $(kx + b)' = k$. ◀

Например, $(2x + 5)' = 2$, $(-3x + 4)' = -3$, $(7x)' = 7$, $(x)' = 1$.

Задача 3. Найти производную функции $f(x) = x^2$.

▷ Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$$

Если $h \to 0$, то $2x + h \to 2x$. Отсюда получаем

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

Следовательно, $(x^2)' = 2x$. ◀

Задача 4. Найти $f'(x)$, если $f(x) = x^3$.

▷ $f(x+h) - f(x) = (x+h)^3 - x^3$. По формуле разности кубов $(x+h)^3 - x^3 = ((x+h) - x)((x+h)^2 + (x+h)\ x + x^2) = h\ (3x^2 + 3xh + h^2)$.

Составим теперь разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Если $h \to 0$, то $h^2 \to 0$ и $3xh \to 0$, поэтому $3x^2 + 3xh + h^2 \to 3x^2$, откуда

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2.$$

Следовательно, $(x^3)' = 3x^2$. ◀

Упражнения

156. Составить разностное отношение, если:
1) $f(x) = 4x$; 2) $f(x) = x - 1$; 3) $f(x) = 4x^2$;
4) $f(x) = x^2 + 2$; 5) $f(x) = x^3 - x^2$; 6) $f(x) = 2x^3 + x$.

157. Используя определение производной, найти производную функции:
1) $f(x) = 2x + 3$; 2) $f(x) = 5x - 6$;
3) $f(x) = -3x^2 + 2$; 4) $f(x) = 3x^2 + 5x$.

158. С помощью формулы $(kx + b)' = k$ (задача 2) найти производную функции:
1) $f(x) = 3x$; 2) $f(x) = -4x$;
3) $f(x) = -5x + 7$; 4) $f(x) = -7x + 8$.

---

159. Тело движется по закону $s\ (t) = 1 + 5t$. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени:
1) от $t_1 = 2$ до $t_2 = 5$; 2) от $t_1 = 0{,}9$ до $t_2 = 1$.

160. Закон движения задан формулой:
1) $s\ (t) = 2t + 1$; 2) $s\ (t) = 0{,}3t - 1$.
Найти среднюю скорость движения от $t_1 = 2$ до $t_2 = 8$ и скорость движения в момент $t_1 = 2$ и в момент $t_2 = 8$.

161. Найти мгновенную скорость движения точки в каждый момент времени t, если закон её движения $s\ (t)$ задан формулой:
1) $s\ (t) = \frac{3}{2}t^2$; 2) $s\ (t) = 5t^2$.

162. Дана функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x$.
1) Используя определение производной, найти $f'(x)$.
2) Найти значение $f'(x)$ в точке $x = 0{,}1$.

§ 5. Правила дифференцирования

1. Дифференцирование суммы, произведения, частного

Производная суммы равна сумме производных:
$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x). \quad (1)$$

Это правило означает, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то их сумма также дифференцируема в точке x и справедлива формула (1).

○ Пусть $F(x) = f(x) + g(x)$. Тогда
$$F(x + h) - F(x) = f(x + h) - f(x) + g(x + h) - g(x).$$
Поэтому разностное отношение равно
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

При $h \to 0$ первая дробь в правой части имеет предел, равный $f'(x)$, а вторая дробь имеет предел, равный $g'(x)$. Поэтому по свойствам пределов функций левая часть имеет предел, равный $F'(x) = f'(x) + g'(x)$, т. е. справедливо равенство (1). ●

Например, $(x^3 + x)' = (x^3)' + (x)' = 3x^2 + 1$.

Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$(cf(x))' = cf'(x). \tag{2}$$

○ Пусть $F(x) = cf(x)$. Тогда

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $h \to 0$, получаем $F'(x) = cf'(x)$. ●

Например, $(4x^2)' = 4 \cdot (x^2)' = 4 \cdot 2x = 8x$.

Задача 1. Найти производную функции $f(x) = 5x^2 + 7x$.

▷ Так как $(x^2)' = 2x$, $(x)' = 1$, то по формулам (1) и (2) получаем $(5x^2 + 7x)' = (5x^2)' + (7x)' = 5(x^2)' + 7(x)' = 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 = 10x + 7$. ◀

Формула (1) справедлива не только для суммы двух функций, но и для суммы трёх, четырёх и более функций.

Задача 2. Найти производную функции

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 8.$$

▷ $(2x^3 - 5x^2 + 3x + 8)' = (2x^3)' + (-5x^2)' + (3x)' + (8)' = 2(x^3)' - 5(x^2)' + 3(x)' = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 3 \cdot 1 = 6x^2 - 10x + 3$. ◀

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда в этой точке функция $f(x) \cdot g(x)$ имеет производную, которая выражается формулой

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x). \tag{3}$$

Задача 3. Пользуясь формулой (3), найти производную функции

$$\varphi(x) = (x^2 + x - 6)(x^2 - x - 2).$$

▷ По формуле (3) находим $\varphi'(x) = (2x + 1)(x^2 - x - 2) + (x^2 + x - 6) \times (2x - 1) = (2x + 1)(x + 1)(x - 2) + (x + 3)(x - 2)(2x - 1) = (x - 2)(2x^2 + 3x + 1 + 2x^2 + 5x - 3) = 2(x - 2)(2x^2 + 4x - 1)$. ◀

Задача 4. Пусть k и b — постоянные,

$$f(x) = (kx + b)^2, \quad g(x) = (kx + b)^3.$$

Доказать, что

$$f'(x) = ((kx + b)^2)' = 2k(kx + b), \tag{4}$$

$$g'(x) = ((kx + b)^3)' = 3k(kx + b)^2. \tag{5}$$

▷ Так как $f(x) = (kx + b)(kx + b)$, то, применяя формулу (3), получаем $f'(x) = k(kx + b) + (kx + b)k = 2k(kx + b)$. Аналогично, используя равенство $g(x) = f(x)\,(kx + b)$, формулы (3) и (4), находим $g'(x) = 2k(kx + b)(kx + b) + (kx + b)^2 k = 3k(kx + b)^2$. ◀

Задача 5. Пусть
$$f(x) = (x - 2)^2\,(x + 1)^3.$$
Найти корни уравнения $f'(x) = 0$.

▷ Применяя правило дифференцирования произведения и формулы (4) и (5), получаем $f'(x) = 2(x - 2)(x + 1)^3 + (x - 2)^2\,3(x + 1)^2 = (x - 2)\,(x + 1)^2(2x + 2 + 3x - 6)$, т. е.
$$f'(x) = (x - 2)(x + 1)^2(5x - 4),$$
откуда следует, что корнями уравнения $f'(x) = 0$ являются числа $-1,\ \frac{4}{5},\ 2$. ◀

Задача 6. Доказать формулу (3).

▷ Обозначим $\varphi(x) = f(x)g(x)$, $\Delta f = f(x + h) - f(x)$, $\Delta g = g(x + h) - g(x)$, $\Delta\varphi = \varphi(x + h) - \varphi(x)$. Тогда $f(x + h) = f(x) + \Delta f$, $g(x + h) = g(x) + \Delta g$,
$$\frac{\Delta\varphi}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{(f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x)}{h},$$
$$\frac{\Delta\varphi}{h} = f(x)\frac{\Delta g}{h} + g(x)\frac{\Delta f}{h} + \frac{\Delta f}{h}\Delta g. \tag{6}$$

По определению производной $\frac{\Delta g}{h} \to g'(x)$, $\frac{\Delta f}{h} \to f'(x)$ при $h \to 0$. Кроме того, $\Delta g \to 0$ при $h \to 0$, так как дифференцируемая в точке x функция непрерывна в этой точке (§ 4). Следовательно, правая часть (6) имеет при $h \to 0$ предел, равный правой части формулы (3). Поэтому существует предел в левой части (3), который равен производной функции $f(x)g(x)$. ◀

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x и $g(x) \neq 0$. Тогда функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x, которая выражается формулой
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}. \tag{7}$$

Формулу производной частного можно доказать тем же способом, что и формулу (3).

Задача 7. Найти $f'(x)$, если $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2}$, и решить уравнение $f'(x) = 0$.

▷ Применяя формулы (7) и (5), получаем
$$f'(x) = \frac{((x-1)^3)'x^2 - (x-1)^3(x^2)'}{x^4} = \frac{3(x-1)^2x^2 - (x-1)^3\,2x}{x^4} = \frac{(x-1)^2(3x - 2(x-1))}{x^3},$$
$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3},$$
откуда следует, что корнями уравнения $f'(x) = 0$ являются числа 1 и -2. ◀

Задача 8. Решить неравенство $f'(x) > 0$, если

$$f(x) = \frac{x^3}{(2x-1)^2}.$$

▷ Найдём $f'(x)$, используя формулы (7) и (5):

$$f'(x) = \frac{3x^2(2x-1)^2 - x^3 \cdot 4(2x-1)}{(2x-1)^4} = \frac{x^2(6x-3-4x)}{(2x-1)^3},$$

$$f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{(2x-1)^3},$$

откуда следует, что $f'(x) > 0$, если $x < \frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ и $x > \frac{3}{2}$, т. е. при $x < 0$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > \frac{3}{2}$. ◀

2. Производная сложной функции

Если имеется функция $f(kx+b)$, где k и b — постоянные и $k \neq 0$, то

$$(f(kx+b))' = kf'(kx+b). \tag{8}$$

Докажем эту формулу.

○ Обозначим $F(x) = f(kx+b)$, $t = kx+b$, тогда

$$\frac{\Delta F}{h} = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(k(x+h)+b) - f(kx+b)}{h} = \frac{f(t+kh) - f(t)}{h}, \tag{9}$$

$$\frac{\Delta F}{h} = k\frac{f(t+kh) - f(t)}{kh}. \tag{10}$$

Если $h \to 0$, то $h_1 = kh \to 0$ и $\frac{f(t+kh) - f(t)}{kh} = \frac{f(t+h_1) - f(t)}{h_1} \to$ $\to f'(t)$ при $h_1 \to 0$. Следовательно, правая часть в формуле (10) имеет при $h \to 0$ предел, равный $kh'(t) = kh'(kx+b)$.

Но тогда существует предел в левой части этой формулы, который равен $(f(kx+b))'$. ●

Напомним понятие сложной функции. Пусть задана функция $f(y)$, где y, в свою очередь, является функцией от x, т. е. $y = g(x)$. Тогда функцию $F(x) = f(g(x))$ называют сложной функцией (или суперпозицией) функций $y = g(x)$ и $f(y)$. При этом предполагается, что множество значений функции $g(x)$ содержится в области определения функции $f(y)$.

Например, если $f(y) = e^y$, $y = g(x) = 2x^3$, то $F(x) = f(g(x)) = e^{2x^3}$.

Пусть функция $g(x)$ имеет производную в точке x, а функция $f(t)$ имеет производную в точке $t = g(x)$. Тогда сложная функция $f(g(x))$ имеет производную в точке x, которая выражается формулой

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{11}$$

Задача 9. Найти производную функции $(3x^2+4)^3$.

▷ Здесь $y = g(x) = 3x^2 + 4$, $f(y) = y^3$. Так как $f'(y) = 3y^2$, а $g'(x) = 6x$, то по формуле (11) находим

$$((3x^2+4)^3)' = 3\ (3x^2+4)^2 \cdot 6x = 18x(3x^2+4)^2. \text{ ◀}$$

3. Производная обратной функции

Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ — взаимно обратные функции. Тогда для всех $y \in \boldsymbol{Y}$, где $\boldsymbol{Y}$ — область определения функции φ, справедливо равенство

$$f(\varphi(y)) = y. \qquad (12)$$

Предположив, что функции f и φ дифференцируемы, из равенства (12) по правилу дифференцирования сложной функции получим $f'(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y) = 1$, откуда $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(\varphi(y))}$, если $f'(\varphi(y)) \neq 0$. Заменив y на x, получим формулу производной обратной функции

$$\boldsymbol{\varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))}}. \qquad (13)$$

С помощью формулы (13) в § 7 будут найдены формулы производных обратных тригонометрических функций.

Упражнения

163. Найти производную функции:
1) $x^2 + x$; 2) $x^2 - x$; 3) $8x^2$; 4) $-27x^2$;
5) $-4x^3$; 6) $0{,}6x^3$; 7) $13x^2 + 26$; 8) $8x^2 - 16$.

164. Продифференцировать функцию:
1) $3x^2 - 6x + 6$; 2) $6x^2 + 5x - 7$;
3) $x + 12x^2$; 4) $x - 8x^2$;
5) $x^3 + 6x$; 6) $-12x^3 + 18x$;
7) $2x^3 - 8x^2 + 6x + 1$; 8) $-3x^3 + 2x^2 - x - 5$.

165. Найти $f'(0)$ и $f'(2)$, если:
1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$; 2) $f(x) = x^3 - 2x$;
3) $f(x) = -x^3 + 2x^2$; 4) $f(x) = 3x^2 + x + 1$.

166. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0 (решить уравнение $f'(x) = 0$), если:
1) $f(x) = x^3 - 2x$; 2) $f(x) = -x^2 + 3x + 1$;
3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$; 4) $f(x) = (x-3)(x+4)$;
5) $f(x) = (x-2)^2(x+1)$; 6) $f(x) = (x+1)^3$.

167. Найти производную функции:
1) $(x-3)^2x^3$; 2) $(x^2 - 2x)(x^3 + x)$; 3) $(x+3)x^3$; 4) $(x-4)3x^2$.

Найти $f'(1)$ **(168—169).**

168. 1) $f(x) = (2x-3)^2(x-1)$; 2) $f(x) = (x+1)^3(x+2)$.

169. 1) $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$; 2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$;
3) $f(x) = \frac{2x-3}{5-4x}$; 4) $f(x) = \frac{2x^2}{1-7x}$.

170. Найти производную функции:
1) $\frac{x^3+x^2+x}{x+1}$; 2) $\frac{2x^3+3x^2+1}{x-1}$.

171. Записать формулой функцию $f(g(x))$; найти её область определения и множество значений, если:

1) $f(y)=y^2,\ y=g(x)=x+1$; 2) $f(y)=\lg y,\ y=g(x)=\sqrt{x-1}$;

3) $f(y)=\dfrac{y+1}{y-2},\ y=g(x)=\log_2 x$;

4) $f(y)=\sqrt{y},\ y=g(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$.

172. С помощью формулы (8) найти производную функции:

1) $(2x-1)^3$; 2) $(x+3)^2$; 3) $(3x^2-2x)^2$; 4) $(x^3-x^2)^3$.

173. Выяснить, при каких значениях x производная функции $f(x)$ принимает отрицательные значения, если:

1) $f(x)=x^2-7x+10$; 2) $f(x)=-x^2+4x$;
3) $f(x)=-3x^3+3x^2+4$; 4) $f(x)=(1-3x)^3$.

174. Выяснить, при каких значениях x производная функции $f(x)$ принимает положительные значения, если:

1) $f(x)=(x+2)^2x^3$; 2) $f(x)=(x-3)3x^2$.

175. Выяснить, при каких значениях x производная функции $f(x)$ принимает отрицательные значения, если:

1) $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{1-2x}$; 2) $f(x)=\dfrac{3x^3}{1-3x}$.

176. Записать формулой функцию $f(g(x))$ и найти её производную, если:

1) $f(y)=\sqrt{y^2-1},\ y=g(x)=\sqrt{x^2+1}$;

2) $f(y)=\sqrt{1-y^2},\ y=g(x)=\cos x$.

177. Найти производную функции $g(x)$, обратной к функции $f(x)$, если:

1) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$; 2) $f(x)=x^2,\ x>0$.

178. Найти производную функции:

1) $f(x)=(3x^3-4x^2+2x-1)^2$; 2) $f(x)=(x^3-2x^2+3x+2)^3$.

§ 6. Производная степенной функции

Рассмотрим степенную функцию $y=x^p$. При $p=1,\ 2,\ 3$ эта функция дифференцируема и её производная равна соответственно $1,\ 2x,\ 3x^2$ (§ 4), т. е.

$$(x)'=1,\ (x^2)'=2x,\ (x^3)'=3x^2.$$

Производная степенной функции при любом действительном показателе p находится по формуле

$$(x^p)'=px^{p-1}. \qquad (1)$$

Эта формула справедлива при тех значениях x, при которых имеют смысл обе части равенства (1). Она будет доказана в § 7.

Задача 1. Доказать справедливость формулы (1) при $p=-1$, т. е. доказать, что

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

▷ Пусть $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$. Тогда

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}.$$

Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\frac{1}{(x+h)x}.$$

При $h\to 0$ знаменатель дроби стремится к x^2, поэтому $\lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{(x+h)x}\right)=-\frac{1}{x^2}$. Таким образом, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, т. е. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

Полученное равенство можно записать так:

$$(x^{-1})'=(-1)x^{-2}.$$

Это и означает, что формула (1) верна при $p=-1$. ◀

Задача 2. Доказать формулу (1) при $p=\frac{1}{2}$.

▷ Пусть $f(x)=\sqrt{x}$, $x>0$. Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.$$

Умножим числитель и знаменатель на сумму $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$. Получим

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

Если $h\to 0$, то $\sqrt{x+h}\to\sqrt{x}$ (§ 2, задача 6), поэтому знаменатель последней дроби стремится к $2\sqrt{x}$. Следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad \left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Полученное равенство можно записать так:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1},$$

т. е. формула (1) справедлива при $p=\frac{1}{2}$. ◀

Задача 3. Найти $f'(1)$, если $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

▷ Так как $f(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$, то по формуле (1) получаем

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

Следовательно, $f'(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$. ◀

Задача 4. Вычислить $f'(-3)$, если $f(x)=\sqrt{4-7x}$.

▷ Так как $f(x)=(-7x+4)^{\frac{1}{2}}$, то, используя формулу (1) и формулу (8) из § 5, получаем $f'(x)=\frac{1}{2}(-7x+4)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-7)$, откуда находим

$f'(-3)=-\frac{7}{2}(-7(-3)+4)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{7}{2}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}=-0{,}7$. ◀

Задача 5. Найти $f'(x)$, если $f(x)=x\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}$, $x\neq 0$.

▷ Так как $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}}$, то

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\cdot(x+3)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{3}(x+3)^{-\frac{2}{3}}=x^{-\frac{1}{3}}\cdot(x+3)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{2(x+3)+x}{3},$$

$$f'(x)=x^{-\frac{1}{3}}\cdot(x+3)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x+2),\ x\neq 0,\ x\neq -3.$$ ◀

Задача 6. Доказать, что $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ при $x\neq 0$.

▷ Если $x>0$, то $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ и по формуле (1) получаем

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Если $x<0$, то $\sqrt[3]{x}=-\sqrt[3]{-x}=-(-x)^{\frac{1}{3}}$. Используя формулу (1) и правила дифференцирования, находим

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)'=(-1)\frac{1}{3}(-x)^{-\frac{2}{3}}(-1)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$ ◀

Упражнения

Найти производную функции (179—180).

179. 1) x^6; 2) x^{12}; 3) $3x^4+2x^{13}$;

4) $7x^3-3x^7$; 5) $\frac{3}{x^4}$; 6) $x^3+\frac{1}{x^2}$.

180. 1) $\sqrt[3]{x}$; 2) $\sqrt[5]{x}$; 3) $2\sqrt[6]{x}-\sqrt[3]{x}$; 4) $3\sqrt[6]{x}+7\sqrt[14]{x}$;

5) $\frac{2}{5\sqrt{x}}$; 6) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$; 7) $\frac{x^3+1}{x}$; 8) $\frac{x^4-\sqrt{x}}{x}$.

181. Найти $f'(3)$ и $f'(1)$, если:

1) $f(x)=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}+1$;

3) $f(x)=\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{x^3}$; 4) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}$;

5) $f(x)=(x-1)^2(x-3)$; 6) $f(x)=(x-3)^3(x-1)$;

7) $f(x)=(x^2-1)(x+3)$; 8) $f(x)=(x^2-9)(x+1)$.

182. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0:

1) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$; 2) $f(x)=x^4+4x^3-8x^2-5$;

3) $f(x)=(x^2+3)(2x^2+5)$; 4) $f(x)=x+\frac{1}{x}$;

5) $f(x)=(x-1)^2x\sqrt{x}$; 6) $f(x)=3x^4-4x^3+6x^2-12x$.

183. Найти $f'(1)$, если:

1) $f(x)=(x-1)^9(2-x)^8$; 2) $f(x)=(2x-1)^5(1+x)^4$;

3) $f(x)=\sqrt[3]{2-x}\cdot(2-3x)^6$; 4) $f(x)=(5x-4)^6\cdot\sqrt{3x-2}$.

184. При каких значениях x значение производной функции $y=(x-3)^5(2+5x)^6$ равно 0?

Найти производную функции (**185—189**).

185. 1) $\frac{x^5+x^3+x}{x+1}$; 2) $\frac{x^4+x^2+1}{x-1}$.

186. 1) $-\frac{2}{x^4}$; 2) $4x^{-\frac{3}{2}}$; 3) $x^{-\frac{3}{2}}+6x^{\frac{5}{6}}$;

4) $2\sqrt[7]{x^2}-3\sqrt[5]{x^{-2}}$; 5) $6\sqrt[6]{x^5}-\frac{5}{\sqrt[5]{x^4}}$; 6) $2x\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x\sqrt[4]{x^3}}$.

187. 1) $(x+2)\sqrt[3]{x}$; 2) $(x+1)\sqrt{x}$; 3) $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^2$;

4) $\frac{x^3+2}{\sqrt[3]{x}}$; 5) $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$; 6) $\left(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}\right)^2$.

188. 1) $(2x-3)^5(3x^2+2x+1)$; 2) $(x-1)^4(x+1)^7$;

3) $\sqrt[4]{3x+2}\cdot(3x-1)^4$; 4) $\sqrt[3]{2x+1}\cdot(2x-3)^3$.

189. 1) $\frac{2x^2-3x+1}{x+1}$; 2) $\frac{3x^2+2x-1}{2x+1}$;

3) $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{1}{x}$; 4) $\frac{2-x}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2-x}$.

190. Найти точки, в которых значение производной функции $f(x)$ равно 1:

1) $f(x)=x^4+8x^3+x-3$; 2) $f(x)=2x^5+5x^2+x+4$;

3) $f(x)=\frac{x^3+x^2+16}{x}$; 4) $f(x)=\frac{x\sqrt[3]{x}+3x+18}{\sqrt[3]{x}}$.

191. Решить неравенство $f'(x) > 0$, если:

1) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$;
2) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3$;
3) $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$;
4) $f(x) = \frac{x^3 + 16}{x}$;
5) $f(x) = (x + 2)^2 \sqrt{x}$;
6) $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$.

192. Угол поворота тела вокруг оси изменяется в зависимости от времени t по закону $\varphi(t) = 0{,}1t^2 - 0{,}5t + 0{,}2$. Найти угловую скорость (рад/с) вращения тела в момент времени $t = 20$ с.

193. Тело, масса которого $m = 5$ кг, движется прямолинейно по закону $s(t) = 1 - t + t^2$ (где s выражается в метрах, t — в секундах). Найти кинетическую энергию тела $\frac{mv^2}{2}$ через 10 с после начала движения.

194. В тонком неоднородном стержне длиной 25 см его масса (в граммах) распределена по закону $m(l) = 2l^2 + 3l$, где l — длина стержня, отсчитываемая от его начала. Найти линейную плотность: 1) в точке, отстоящей от начала стержня на 3 см; 2) в конце стержня.

195. Найти производную функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ при $x < 2$ и при $x > 3$.

§ 7. Производные элементарных функций

Показательная, логарифмическая и тригонометрические функции дифференцируемы в каждой точке, где они определены. Приведём некоторые формулы производных этих функций:

1. $(\sin x)' = \cos x$.
2. $(\cos x)' = -\sin x$.
3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.
4. $(e^x)' = e^x$.

Доказательство формул **1** и **2** основано на использовании равенства

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \tag{1}$$

а при выводе формул **3** и **4** используется равенство

$$\lim_{t \to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e. \tag{2}$$

Соотношения (1) и (2) называют *замечательными пределами*, их доказательство даётся в курсе высшей математики.

Докажем формулу **1**, используя предел (1).

○ Если $f(x) = \sin x$, то

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Так как $\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to 1$ при $h \to 0$ (равенство (1)), а $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \to \cos x$ (непрерывность косинуса), то существует $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x$, т. е. справедлива формула **1**.

Применяя формулы **1**, **3**, **4** и правила дифференцирования, выведем формулу **2** и докажем равенства:

5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq k\pi$, $k \in Z$.

7. $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

8. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$.

9. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

10. $(x^p)' = px^{p-1}$, $p \in R$, $x > 0$.

2. Так как $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, то, применив формулу **1**, получим $(\cos x)' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

5. Применив правило дифференцирования частного и формулы **1** и **2**, получим

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

6. Аналогично

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

7. Пусть $x < 0$, тогда $|x| = -x$ и $\ln|x| = \ln(-x)$, откуда, применяя формулу **3** и правило дифференцирования сложной функции, получаем $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$. Отсюда и из формулы **3** следует, что

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x},\ x \neq 0.$$

8. Возводя обе части равенства $a = e^{\ln a}$ в степень x, получаем $a^x = e^{x \ln a}$. Применяя формулу **4** и правило дифференцирования сложной функции, находим

$$(a^x)' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

9. Так как $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, то, применяя формулу **3**, получаем

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

10. Воспользуемся равенством $x^p = e^{\ln x^p} = e^{p\ln x}$. Тогда

$$(x^p)' = e^{p\ln x}\cdot\frac{p}{x} = \frac{px^p}{x} = px^{p-1}.$$

Применяя формулы **1—5, 7—10** и правила дифференцирования, решить задачи **1—3**.

Задача 1. Найти $f'(x)$, если $f(x) = \cos 3x$.

▷ $(\cos 3x)' = (-\sin 3x)\cdot(3x)' = -3\sin 3x.$ ◀

Задача 2. Найти $f'(x)$, если:

1) $f(x) = e^{-x}$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$;

3) $f(x) = 2^{-x}\sin 2x$; 4) $f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1}$;

5) $f(x) = \log_3(x^2+4)$; 6) $f(x) = (x^3+2x)^2e^{3x}$.

▷ 1) $(e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = -e^{-x}$;

2) $\left(\operatorname{tg} 2x\right)' = \frac{1}{\cos^2 2x}(2x)' = \frac{2}{\cos^2 2x}$;

3) $(2^{-x}\sin 2x)' = 2^{-x}\ln 2\cdot(-x)'\cdot\sin 2x + 2^{-x}\cos 2x\cdot(2x)' =$
$= 2^{-x}(2\cos 2x - \ln 2\cdot\sin 2x)$;

4) $\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{x-1}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{x-1}\left(\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}\right) = \frac{2}{x^2-1}$;

5) $(\log_3(x^2+4))' = \frac{1}{(x^2+4)\ln 3}(x^2+4)' = \frac{2x}{(x^2+4)\ln 3}$;

6) $((x^3+2x)^2e^{3x})' = 2(x^3+2x)(x^3+2x)'e^{3x} + (x^3+2x)^2e^{3x}\cdot 3 =$
$= e^{3x}(x^3+2x)\cdot(3x^3+6x^2+6x+4).$ ◀

Задача 3. Найти $f'(x)$, если:

1) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$;

2) $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

3) $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}\operatorname{ctg} 2x$;

4) $f(x) = \ln^2(1+x)\cdot 3^{2x}$;

5) $f(x) = \operatorname{tg}^4 3x\cdot\lg(x^3+1)$.

▷ 1) $\left(\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{(-3x^2)(1+x^3)-3x^2(1-x^3)}{(1+x^3)^2} =$

$= \frac{-2x^2}{(x^3+1)^2}\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2x^2}{x^6-1}\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$;

2) $\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

3) $\left(3^{\frac{1}{x}}\operatorname{ctg} 2x\right)' = 3^{\frac{1}{x}}\ln 3\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{ctg} 2x + 3^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{\sin^2 2x}\cdot 2\right) =$

$= -3^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\ln 3\cdot\operatorname{ctg} 2x}{x^2} + \frac{2}{\sin^2 2x}\right);$

4) $(\ln^2(1+x)\cdot 3^{2x})' = 2\ln(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}\cdot 3^{2x} + \ln^2(1+x)\cdot 3^{2x}\times$
$\times\ln 3\cdot 2 = \ln(1+x)\cdot 3^{2x}\left(\frac{2}{1+x} + 2\ln 3\cdot\ln(1+x)\right);$

5) $(\operatorname{tg}^4 3x\cdot\lg(x^3+1))' = 4\operatorname{tg}^3 3x\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3\cdot\lg(x^3+1) +$
$+\operatorname{tg}^4 3x\,\frac{1}{(x^3+1)\ln 10}\cdot 3x^2 = 3\operatorname{tg}^3 3x\left(\frac{4\lg(x^3+1)}{\cos^2 3x} + \frac{x^2\operatorname{tg} 3x}{(x^3+1)\ln 10}\right).$ ◀

Задача 4. Доказать формулы

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1, \qquad (3)$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},\ x\in\boldsymbol{R}. \qquad (4)$$

▷ а) Если $y = \varphi(x) = \arcsin x$, где $|x|<1$, то обратная функция $x = f(y) = \sin y$, где $|y| < \frac{\pi}{2}$. По формуле (13) из § 5 находим

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y},$$

где $\sin y = x$, $\cos y = \sqrt{1-x^2}$, так как $|y| < \frac{\pi}{2}$. Формула (3) доказана.

б) Если $y = \operatorname{arctg} x$, где $x\in\boldsymbol{R}$, то обратная функция $x = \operatorname{tg} y$, где $|y| < \frac{\pi}{2}$. По формуле (13) из § 5 получаем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y,$$

где $\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$. Формула (4) доказана. ◀

Упражнения

Найти производную функции (196—208).

196. 1) $\ln x + \sin x$; 2) $e^x - \sin x$; 3) $\sqrt{x} - \cos x$;
4) $\frac{1}{x^2} + e^x$; 5) $\operatorname{tg} x + \ln x$; 6) $e^x - \operatorname{ctg} x$.

197. 1) $2\cos 3x$; 2) $-5e^{2x}$; 3) $-4\ln 2x$;
4) $-3\sin 2x$; 5) $\frac{3}{10}e^{-2x}$; 6) $2e^{2x} - 4e^{-2x}$.

198. 1) $6x^4 - 9e^{3x}$; 2) $\frac{1}{4}x^8 + 3\sin 3x$; 3) $3\sqrt[3]{x} - 4\cos 4x$;
4) $\frac{5}{x^2} + 4e^{\frac{x}{4}}$; 5) $\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2}\ln 4x$; 6) $3\operatorname{tg} 2x - 2\sqrt[3]{x}$.

199. 1) $8\sqrt[4]{x}+16e^{\frac{x}{2}}$; 2) $\frac{9}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{4}\sin 4x$;

3) $3x\sqrt[3]{x}-3\ln\frac{1}{x}$; 4) $\frac{1}{x\sqrt{x}}+5\cos\frac{x}{5}$.

200. 1) $3x^2-4\sqrt[3]{x}+2e^{\frac{x}{3}}$; 2) $2x^3+3\sqrt{x}-\cos 2x$;

3) $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\ln x^3$; 4) $2x^8-3\operatorname{tg} 3x-\frac{1}{3}\sin 3x$;

5) $8x^{\frac{3}{4}}+7x^{\frac{1}{7}}-\cos 4x$; 6) $\frac{1}{5}\operatorname{ctg} x-5x^{\frac{4}{5}}-\frac{1}{4}e^{2x}$.

201. 1) $(x+3)^8$; 2) $(x-4)^7$; 3) $\sqrt[3]{x-2}$; 4) $\sqrt{x+5}$;

5) $\frac{1}{(x+1)^2}$; 6) $\frac{1}{(x-1)^3}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{x+3}}$; 8) $\frac{3}{\sqrt[3]{x-4}}$.

---

202. 1) $(3x+1)^5$; 2) $(5x-4)^6$; 3) $(1-3x)^7$;

4) $\frac{4}{(3x-1)^2}$; 5) $\frac{1}{(2-3x)^4}$; 6) $\frac{1}{(4-3x)^5}$.

203. 1) $\sqrt[4]{2-8x}$; 2) $\sqrt[3]{4x+1}$; 3) $\sqrt{3x+2}$;

4) $\frac{1}{\sqrt{4x+1}}$; 5) $\frac{7}{\sqrt[4]{3-8x}}$; 6) $\frac{7}{\sqrt[3]{2-9x}}$.

204. 1) $\sin^2 x$; 2) $\cos^2 x$; 3) $\cos^3 x$; 4) $\sin^4 x$;

5) e^{2x^2}; 6) e^{-x^4}; 7) $\ln 3x^4$; 8) $\ln(-2x)$.

205. 1) $e^{\frac{1}{x}}$; 2) $e^{-\frac{2}{x}}$; 3) $\ln(2x-1)$; 4) $\ln 3x$;

5) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 6) $\cos 4x$; 7) $\operatorname{tg}(3x+3)$; 8) $\sin\left(\frac{2x}{3}+1\right)$.

206. 1) $\cos\left(1-\frac{x}{2}\right)$; 2) $\sin\left(2-\frac{3x}{4}\right)$;

3) $\sin\frac{x+3}{2}$; 4) $\cos\frac{1-x}{3}$;

5) $\cos\frac{4-5x}{3}$; 6) $\sin\frac{2x+3}{5}$;

7) $\sin^3 2x$; 8) $\cos^4 3x$;

9) $\operatorname{ctg}^2 4x$; 10) $\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}$.

207. 1) $e^{\frac{1}{x-1}}$; 2) $\ln(3-4x^2)$; 3) $e^{\frac{2}{x+1}}$;

4) $e^{\frac{1}{2x+3}}$; 5) $\ln\frac{2}{3-4x^2}$; 6) $\ln\frac{3}{2x^2+7x}$.

208. 1) 5^x; 2) 4^x; 3) 9^{x+2}; 4) 7^{x-3};

5) $\log_5 x$; 6) $\log_4 x$; 7) $\lg(x-1)$; 8) $\lg(x+3)$.

209. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0, если:

1) $f(x) = x - \cos x$; 2) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$;

3) $f(x) = \ln(x+1) - 2x$; 4) $f(x) = 2\ln(x+3) - x$;

5) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$; 6) $f(x) = 3^{2x} - 2x\ln 3$;

7) $f(x) = 2\ln(x+3) - x$; 8) $f(x) = x + \ln(2x+1)$.

Найти производную функции **(210—214)**.

210. 1) $\sqrt[3]{\frac{2x-1}{3}} + \ln\frac{2x+3}{5}$; 2) $\sqrt{\frac{1-x}{6}} - 2\ln\frac{2-5x}{3}$;

3) $2e^{\frac{1-x}{3}} + 3\cos\frac{1-x}{2}$; 4) $5\sin\frac{2x+3}{4} - 4\sqrt{\frac{1}{x-1}}$;

5) $\sqrt[3]{\frac{1}{2-x}} - 3\cos\frac{x-2}{3}$; 6) $6\sqrt[3]{\frac{1}{(2-x)^2}} + 4e^{\frac{3-5x}{2}}$.

211. 1) $\log_2(x^3+4)$; 2) 2^{x^2+3x}; 3) $\operatorname{tg}^2 2x$; 4) $\ln\frac{x-2}{x+2}$.

212. 1) $\sqrt{x^2+1}\cdot\operatorname{ctg} 4x$; 2) $e^{\frac{x}{2}}\sin^3 3x$;

3) $\sqrt{x}\cdot\sin 4x$; 4) $e^{3-2x}\cdot\cos(3-2x)$.

213. 1) $\frac{1+\cos x}{\sin x}$; 2) $\frac{\sqrt{3x}}{3^x+1}$; 3) $\frac{x^2-2x+3}{x^2+4x+1}$; 4) $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

214. 1) $\frac{e^x-e^{-x}}{x}$; 2) $\frac{2^x-\log_2 x}{x\ln 2}$; 3) $\frac{\sin x-\cos x}{x}$; 4) $\frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}$.

215. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0, если:

1) $f(x) = x^2 - 6x - 8\ln x$; 2) $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\ln(x+2)$;

3) $f(x) = \sqrt{x+1} - \ln(x-2)$; 4) $f(x) = \ln(x-1) + 2\ln(x+2)$.

216. Решить неравенство $f'(x) > 0$, если:

1) $f(x) = e^x - x$; 2) $f(x) = 6x + \cos 3x$;

3) $f(x) = \ln x - x$; 4) $f(x) = x - 2\ln x$;

5) $f(x) = 6x - x\sqrt{x}$; 6) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 3x$.

217. Выяснить, при каких значениях x значение производной функции $f(x)$ равно 0, если:

1) $f(x) = 5(\sin x - \cos x) + \sqrt{2}\cos 5x$;

2) $f(x) = 1 - \cos 2x + \sin x - \cos x - x$.

218. Найти значения производной функции $f(x)$ в точках, в которых значение этой функции равно 0, если:

1) $f(x) = e^{2x}\ln(2x-1)$; 2) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x}$.

219. Вычислить $f'(x) + f(x) + 2$, если $f(x) = x\sin 2x$, $x = \pi$.

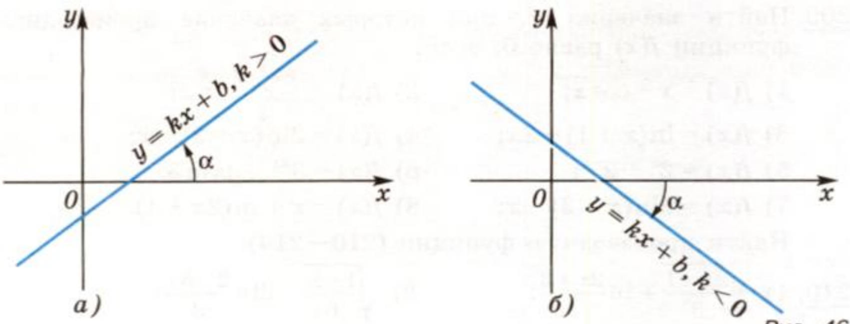


Рис. 46

220. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0; положительно; отрицательно, если:

1) $f(x) = x - \ln x$; 2) $f(x) = x \ln x$;
3) $f(x) = x^2 \ln x$; 4) $f(x) = x^3 - 3 \ln x$.

221. Найти производную функции $f(x) = \ln(x^2 + 5x + 6)$ при $x < -3$ и при $x > -2$.

§ 8. Геометрический смысл производной

1. Угловой коэффициент прямой

Напомним, что графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая. Число $k = \operatorname{tg} \alpha$ называют *угловым коэффициентом прямой*, а угол α — *углом между этой прямой и положительным направлением оси Ох* (рис. 46).

Если $k > 0$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 46, *а*), в этом случае функция $y = kx + b$ возрастает. Если $k < 0$, то $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ (см. рис. 46, *б*), в этом случае функция $y = kx + b$ убывает.

Выведем уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$.

Пусть прямая не параллельна оси Oy и $M(x; y)$ — произвольная точка этой прямой, $A(x; y_0)$ (рис. 47).

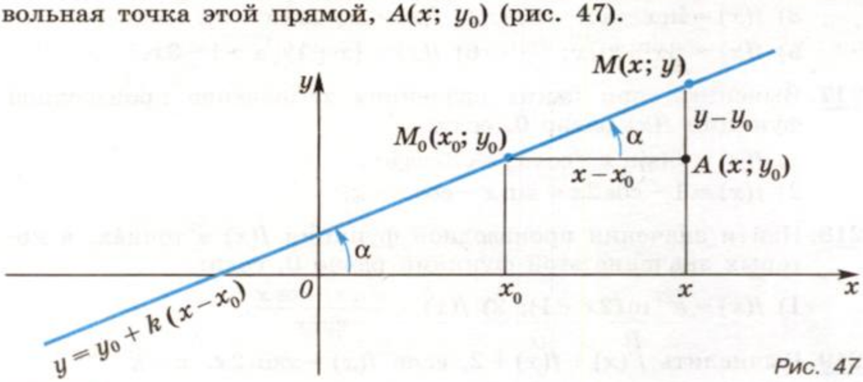


Рис. 47

Из прямоугольного треугольника AMM_0 находим $\frac{y-y_0}{x-x_0}=\operatorname{tg}\alpha$. Обозначив $\operatorname{tg}\alpha=k$, получаем $y-y_0=k(x-x_0)$, откуда

$$y=y_0+k(x-x_0). \qquad (1)$$

Уравнение (1) называют уравнением прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $(x_0;\ y_0)$.

Задача 1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $(-2;\ 3)$ и образующей с осью Ox угол $-\frac{\pi}{4}$.

▷ Находим угловой коэффициент прямой $k=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$. Так как $x_0=-2$, $y_0=3$, то по формуле (1) получаем

$$y=3+(-1)(x-(-2)),\ \text{т. е. } y=-x+1. \text{ ◀}$$

2. Геометрический смысл производной

Выясним геометрический смысл производной дифференцируемой функции $y=f(x)$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует её производная $f'(x_0)$.

Если A и M — точки графика этой функции с абсциссами x_0 и x_0+h (рис. 48), то угловой коэффициент $k=k(h)$ прямой, проходящей через точки A и M (эту прямую называют *секущей*), выражается формулой

$$k(h)=\operatorname{tg}\angle MAC=\frac{MC}{AC}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \qquad (2)$$

где C — точка с координатами x_0+h, $f(x_0)$, а уравнение секущей AM можно записать в виде

$$y-y_0=k(h)(x-x_0). \qquad (3)$$

Пусть $h\to 0$, тогда M, двигаясь по графику, приближается к точке A, а секущая поворачивается вокруг точки A. Если существует $\lim\limits_{h\to 0}k(k)=k_0$, т. е. существует предельное положение секущей, то прямая

$$y-y_0=k_0(x-x_0), \qquad (4)$$

уравнение которой получается из уравнения (3) заменой $k(h)$ на k_0, называется *касательной* к графику функции $y=f(x)$

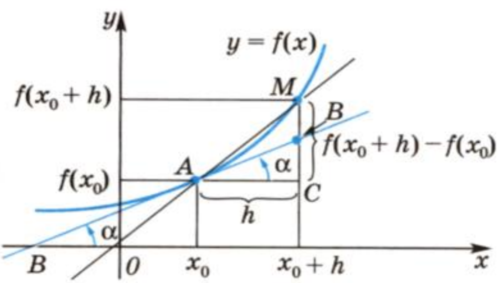


Рис. 48

в точке с координатами $(x_0; f(x_0))$. Таким образом, касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ есть предельное положение секущей MA при $h \to 0$.

Если существует $f'(x_0)$, то

$$k_0 = \lim_{h\to 0} k(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

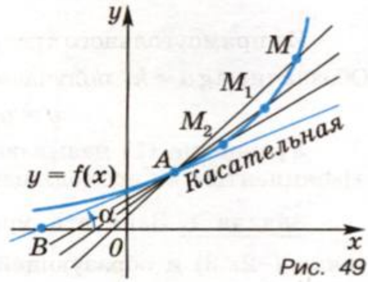


Рис. 49

Так как k_0 — угловой коэффициент касательной, то $k_0 = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, образуемый касательной с положительным направлением оси Ox (рис. 49). Таким образом,

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha. \tag{5}$$

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$.

Задача 2. Найти угол между касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $(0; 0)$ и осью Ox.

▷ Найдём угловой коэффициент касательной к кривой $y = \sin x$ в точке $(0; 0)$, т. е. значение производной этой функции при $x = 0$.

Производная функции $f(x) = \sin x$ равна $f'(x) = \cos x$. По формуле (5) находим $\operatorname{tg}\alpha = f'(0) = \cos 0 = 1$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ (рис. 50).

З а м е ч а н и е. Это свойство полезно для построения графика $y = \sin x$: в точке $(0; 0)$ синусоида касается прямой $y = x$. ◀

Задача 3. Найти угол между касательной к параболе $y = x^2$ в точке $(1; 1)$ и осью Ox.

▷ Производная функции $f(x) = x^2$ равна $f'(x) = 2x$. По формуле (5) находим $\operatorname{tg}\alpha = f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} 2$ (рис. 51). ◀

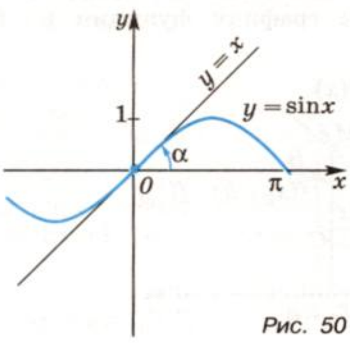


Рис. 50

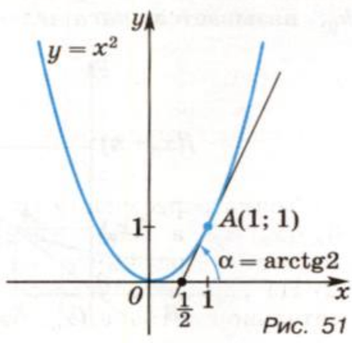


Рис. 51

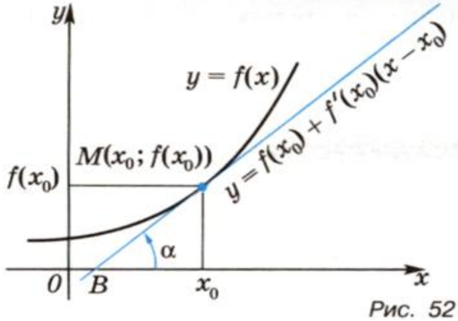


Рис. 52

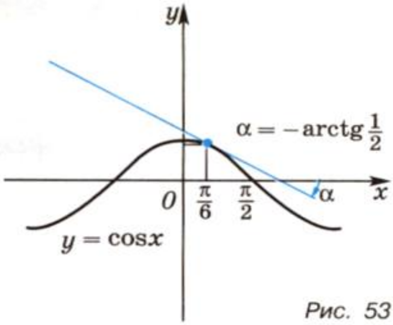


Рис. 53

3. Уравнение касательной к графику функции

Заменяя в формуле (4) k_0 на $f'(x_0)$, получаем уравнение касательной (рис. 52) к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{6}$$

Задача 4. Найти уравнение касательной к графику функции $y=\cos x$ в точке с абсциссой $x_0=\frac{\pi}{6}$.

▷ Найдём значения функции $f(x)=\cos x$ и её производной в точке $x_0=\frac{\pi}{6}$:

$$f(x_0)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ f'(x)=-\sin x,\ f'(x_0)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}.$$

Используя формулу (6), найдём искомое уравнение касательной

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right),\ \text{или}\ \ y=-\frac{1}{2}x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}\right).$$

Касательная к графику функции $y=\cos x$ в точке $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ изображена на рисунке 53. ◀

Задача 5. Записать уравнение касательной к графику функции $y=x^2-2x+3$, если эта касательная:

1) проходит через точку пересечения графика с осью Oy;
2) параллельна прямой $y=4x-3$.

▷ Пусть $f(x)=x^2-2x+3$, тогда $f'(x_0)=2x_0-2$ —угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0;\ f(x_0))$, и уравнение касательной в этой точке можно записать так:

$$y=f(x_0)+2(x_0-1)(x-x_0).$$

1) Точка пересечения графика с осью Oy имеет координаты $x_0=0$, $f(x_0)=3$, а $f'(x_0)=-2$. Поэтому прямая $y=3-2x$ является касательной к графику в точке (0; 3).

2) Из равенства угловых коэффициентов прямой $y=4x-3$ и касательной в точке $(x_0;\ f(x_0))$ следует, что $f'(x_0)=2x_0-2=4$,

откуда $x_0 = 3$, $f(x_0) = 6$, а уравнение касательной в точке (3; 6) имеет вид $y = 6 + 4(x - 3) = 4x - 6$.

Ответ. 1) $y = 3 - 2x$; 2) $y = 4x - 6$. ◀

Задача 6. Показать, что касательная к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 \neq 0$ пересекает ось Ox в точке $\frac{x_0}{2}$.

▷ Пусть $f(x) = x^2$, тогда $f'(x) = 2x$, $f(x_0) = x_0^2$ и $f'(x_0) = 2x_0$. По формуле (6) находим уравнение касательной:

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = 2x_0x - x_0^2.$$

Найдём точку пересечения этой касательной с осью абсцисс из равенства $2x_0x - x_0^2 = 0$, откуда $x = \frac{x_0}{2}$. ◀

Из задачи 6 следует простой геометрический способ построения касательной к параболе $y = x^2$ в точке A с абсциссой x_0: прямая, проходящая через точку A и точку $\frac{x_0}{2}$ оси абсцисс, касается параболы в точке A (рис. 54).

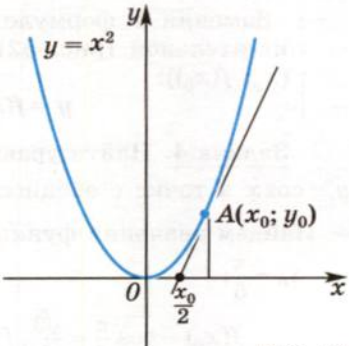


Рис. 54

Построив касательную к параболе, можно найти её *фокус*. Напомним, что фокусом F является точка, в которую нужно поместить источник света так, чтобы все лучи, отражённые от параболического зеркала, были параллельны оси симметрии параболы. Для построения фокуса F надо через точку A, лежащую на параболе, провести прямую AB, параллельную оси Oy, и прямую AF, образующую с касательной в точке A такой же угол, как и прямая AB.

4. Дифференциал функции

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приращение функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx. Тогда

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad (7)$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Первое слагаемое в формуле (7), т. е. произведение $f'(x_0)\Delta x$, называется *дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$, т. е. $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.

Пусть $f'(x_0) \neq 0$, тогда отношение второго слагаемого $\alpha(\Delta x)\,\Delta x$ в формуле (7) к первому слагаемому стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Поэтому при малых Δx можно заменить Δf на $df(x_0)$, т. е. записать приближённое равенство $\Delta f \approx df(x_0)$ или равенство

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

по которому можно находить значения функции $f(x)$ в точке $x_0 + \Delta x$ с помощью значений этой функции и её производной в точке x_0.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала $(a;\ b)$, то

$$df(x) = f'(x)\Delta x,$$

где Δx — произвольное приращение аргумента.

Заметив, что $dx = (x)'\Delta x = \Delta x$, определим дифференциал независимого переменного как его приращение. Тогда $df(x) = f'(x)dx$, откуда

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

т. е. производную можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента. Понятие дифференциала будет использовано в главе IV.

Выясним геометрический и физический смысл дифференциала.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда в точке $A(x_0;\ f(x_0))$ существует касательная (см. рис. 48), пересекающая прямую $x = x_0 + h$ в точке B. Из треугольника ABC находим $BC = AC\ \mathrm{tg}\,\alpha = hf'(x_0)$. Полагая $h = \Delta x$, получаем

$$BC = f'(x_0) \cdot \Delta x = df(x_0). \qquad (8)$$

Равенство (8) позволяет дать следующее *геометрическое истолкование дифференциала*.

Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то дифференциал этой функции при $x = x_0$ равен приращению ординаты касательной в точке $(x_0;\ f(x_0))$ при изменении аргумента от x_0 до $x_0 + h = x_0 + \Delta x$.

Обратимся к физическому смыслу дифференциала. Пусть $s(t_0)$ — координата движущейся точки в момент времени t_0. Тогда дифференциал $ds(t_0)$ равен приращению $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ функции $s(t)$ за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, если в течение этого промежутка материальная точка движется со скоростью $v(t_0) = s'(t_0)$.

Упражнения

222. Написать уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $(x_0;\ y_0)$, если:

1) $k = 2,\ x_0 = 1,\ y_0 = -1;$ 2) $k = 3,\ x_0 = -2,\ y_0 = 1;$

3) $k = -2,\ x_0 = 3,\ y_0 = -4;$ 4) $k = \frac{1}{3},\ x_0 = 1,\ y_0 = 0;$

5) $k = \frac{2}{3},\ x_0 = \frac{1}{3},\ y_0 = \frac{1}{3};$ 6) $k = -\frac{1}{2},\ x_0 = 0,\ y_0 = 0.$

223. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;\ y_0)$ и образующей с осью Ox угол α, если:

1) $\alpha = \frac{\pi}{4},\ x_0 = -3,\ y_0 = 2;$ 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4},\ x_0 = -1,\ y_0 = -1;$

3) $\alpha = \frac{\pi}{6},\ x_0 = 6,\ y_0 = -5;$ 4) $\alpha = \frac{2\pi}{3},\ x_0 = 4,\ y_0 = -3.$

224. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = x^3,\ x_0 = 1;$ 2) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{4};$

3) $f(x) = \ln x,\ x_0 = 1;$ 4) $f(x) = e^x,\ x_0 = \ln 3;$

5) $f(x) = 3x^2 - 4x,\ x_0 = 2;$ 6) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}},\ x_0 = 1.$

225. Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^2,\ x_0 = 1;$ 2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3,\ x_0 = 1;$

3) $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 1;$ 4) $f(x) = 2\sqrt{x},\ x_0 = 3;$

5) $f(x) = e^{\frac{3x+1}{2}},\ x_0 = 1;$ 6) $f(x) = \ln(2x+1),\ x_0 = \frac{1}{2}.$

226. На рисунке 55 изображён график функции $y = f(x)$ и касательные к графику в точках A, B, C, D. Определить знак производной этой функции в точках A, B, C, D.

227. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = x^3 + x^2 + 1,\ x_0 = 1;$ 2) $f(x) = 6x - 3x^2,\ x_0 = 2;$

3) $f(x) = \frac{1}{x^3},\ x_0 = 1;$ 4) $f(x) = \frac{1}{x^2},\ x_0 = -2;$

5) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{3};$ 6) $f(x) = e^x,\ x_0 = 0;$

7) $f(x) = \ln x,\ x_0 = 1;$ 8) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1.$

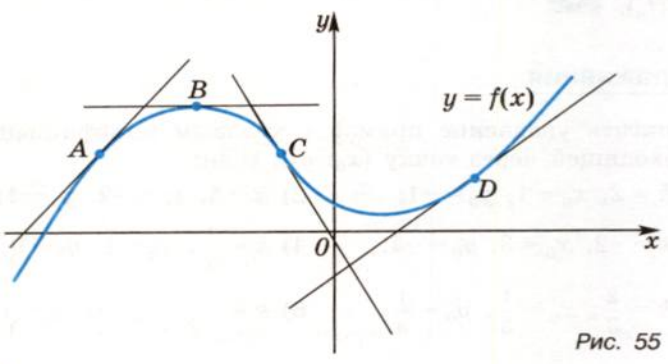


Рис. 55

228. Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=0$, если:

1) $f(x)=x^4+3x^2-4x+2$;
2) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$;
3) $f(x)=2x-\sqrt{x+1}$;
4) $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$;
5) $f(x)=e^{3x}+\cos x$;
6) $f(x)=\sin 2x-\ln(x+1)$.

229. Найти угол между осью Oy и касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=0$, если:

1) $f(x)=x^2+e^{-x}$;
2) $f(x)=\cos\ x$;
3) $f(x)=\sqrt{x+1}+e^{\frac{x}{2}}$;
4) $f(x)=x^2+3x+\frac{2}{2x+1}$;
5) $f(x)=\ln(2x+1)+\frac{3}{x+1}$;
6) $f(x)=\frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3}$.

230. Под каким углом пересекаются графики функций (углом между кривыми в точке их пересечения называют угол между касательными к этим кривым в этой точке):

1) $y=8-x$ и $y=4\sqrt{x+4}$;
2) $y=\frac{1}{2}(1+x)^2$ и $y=\frac{1}{2}(1-x)^2$;
3) $y=\ln(1+x)$ и $y=\ln(1-x)$;
4) $y=e^x$ и $y=e^{-x}$?

231. Показать, что графики двух данных функций имеют одну общую точку и в этой точке — общую касательную; написать уравнение этой касательной:

1) $y=x^4,\ y=x^6+2x^2$;
2) $y=x^4,\ y=x^3-3x^2$;
3) $y=(x+2)^2,\ y=2-x^2$;
4) $y=x(2+x),\ y=x(2-x)$;
5) $y=\sqrt{x+1},\ y=x^2+\frac{1}{3}x+1$;
6) $y=\sqrt{x+1},\ y=2-\sqrt{1-x}$.

232. Найти точки графика функции $y=f(x)$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y=kx$, если:

1) $f(x)=x^2-3x+4,\ k=1$;
2) $f(x)=x(x+1),\ k=3$;
3) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x,\ k=1$;
4) $f(x)=e^x+e^{-x},\ k=\frac{3}{2}$;
5) $f(x)=\sqrt{3x+1},\ k=\frac{3}{4}$;
6) $f(x)=x+\sin x,\ k=0$.

233. В каких точках касательная к графику функции $y=\frac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ox угол, равный $-\frac{\pi}{4}$?

234. Найти точки, в которых касательные к кривым

$$f(x)=x^3-x-1 \text{ и } g(x)=3x^2-4x+1$$

параллельны. Написать уравнения этих касательных.

235. Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x)=e^{\sin^2 x+\sin x},\ x_0=\pi$;
2) $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\frac{\pi x^2}{2},\ x_0=1$.

Упражнения к главе II

236. Построить график функции $y = f(x)$ и выяснить, является ли эта функция непрерывной на всей числовой прямой:

1) $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 \text{ при } x \neq 3, \\ 2 \text{ при } x = 3; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} 5 - 2x \text{ при } x \neq 1, \\ -1 \text{ при } x = 1; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ при } x \geqslant 0, \\ x \text{ при } x < 0; \end{cases}$ 4) $f(x) = \begin{cases} |x - 1| \text{ при } x < -1, \\ x^2 \text{ при } x \geqslant -1. \end{cases}$

Найти производную функции **(237—241)**.

237. 1) $2x^4 - x^3 + 3x + 4$; 2) $-x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 1$;

3) $6\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}$; 4) $\frac{2}{x^3} - 8\sqrt[4]{x}$;

5) $(2x + 3)^8$; 6) $(4 - 3x)^7$;

7) $\sqrt[3]{3x - 2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{1 - 4x}}$;

9) $\sin 0{,}5x$; 10) $\cos(-3x)$.

238. 1) $e^x - \sin x$; 2) $\cos x - \operatorname{tg} x$; 3) $\operatorname{ctg} x - \sqrt[3]{x}$;

4) $6x^4 - 9e^x$; 5) $\frac{5}{x} + 4e^x$; 6) $\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2}\ln x$.

239. 1) $\sin 5x + \cos(2x - 3)$; 2) $e^{2x} - \ln 3x$;

3) $\sin(x - 3) - \ln(1 - 2x)$; 4) $6\sin\frac{2x}{3} - e^{1-3x}$.

240. 1) $x^2 \cos x$; 2) $x^3 \ln x$; 3) $5x \operatorname{ctg} x$;

4) $\sin 2x \operatorname{tg} x$; 5) $e^{-x}\sin x$; 6) $e^x \cos x$.

241. 1) $\frac{x^3 + 1}{x^2 + 2}$; 2) $\frac{x^2}{x^3 + 1}$; 3) $\frac{\sin x}{x + 1}$; 4) $\frac{\ln x}{1 - x}$.

242. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно 0; положительно; отрицательно, если:

1) $f(x) = -3x^3 + 2x^2 + 4$; 2) $f(x) = (x + 3)^3(x - 4)^2$;

3) $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$; 4) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

243. Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0, если:

1) $f(x) = \cos x \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; 2) $f(x) = e^x \ln x$, $x_0 = 1$;

3) $f(x) = \frac{2\cos x}{\sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; 4) $f(x) = \frac{x}{1 + e^x}$, $x_0 = 0$.

244. Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0, если:

1) $y = x^2 - 2x,\ x_0 = 3$; 2) $y = x^3 + 3x,\ x_0 = 3$;

3) $y = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$; 4) $y = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$.

245. Закон движения тела задан формулой $s(t) = 0{,}5t^2 + 3t + 2$ (s — в метрах, t — в секундах). Какой путь пройдёт тело за 4 с? Какова скорость движения в этот момент времени?

Найти производную функции **(246—248)**.

246. 1) $\sin x \cos x + x$; 2) $(x^3 + 1)\cos 2x$;

3) $(x + 2)\sqrt[3]{x^2}$; 4) $\sqrt[3]{x - 1}(x^4 - 1)$.

247. 1) $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$; 2) $\frac{\sqrt{x + 4}}{4x}$;

3) $\frac{x}{\sqrt{x + 3}}$; 4) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

248. 1) $\frac{1}{5}x^2 + 2\ln x - \cos x$; 2) $\frac{1}{4}x^2 - e^x + 2\sin x$;

3) $15\sqrt[5]{x} + e^x - 6\operatorname{tg} x$; 4) $6\sqrt[6]{x} - \ln x + \frac{1}{3}\cos x$;

5) $x^2(x - 1) + 3\sin x + 4\operatorname{ctg} x$;

6) $x\,(x + 2)^2 + 2\ln x - 3\cos x$;

7) $(x - 1)(x + 2) + e^x - \ln x$;

8) $(x + 3)(2x - 1) + e^x - \sin x$.

249. Построить график и указать промежутки непрерывности функции:

1) $f(x) = \begin{cases} \log_2(x - 1) \text{ при } x \leqslant 3, \\ (x - 5)^2 \text{ при } x > 3; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 3} \text{ при } x > 3, \\ x + 3 \text{ при } -3 \leqslant x \leqslant 3, \\ (x + 3)^2 \text{ при } x < -3. \end{cases}$

250. Найти вертикальные асимптоты графика функции $y = f(x)$, если:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$; 2) $f(x) = \frac{x + 2}{3x + 1}$.

251. Вычислить предел функции:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2 + x - x^3}{1 + 3x + x^2}$; 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x^3 + 3x^2 + 1}{14x^3 - x^2 - 5}$.

252. Найти производную функции:

1) $\ln^2 x$; 2) $\sqrt{\ln x}$; 3) $\sin\sqrt{x}$; 4) $\cos^4 x$; 5) $\sqrt{\operatorname{tg} x}$; 6) $\operatorname{ctg} 3x$.

253. 1) $y = \cos^2 3x$; 2) $y = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$;
3) $\sin(2x^2 - 3x)$; 4) $\cos(x + 2x^3)$; 5) $e^{\operatorname{tg} x}$;
6) $\cos(e^x)$; 7) 3^{x^2}; 8) $2^{\cos x}$.

254. Найти значения x, при которых значение производной функции $f(x)$ равно нулю; положительно; отрицательно, если:
1) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$; 2) $f(x) = 3^{2x} - 2x \ln 3$;
3) $f(x) = x + \ln 2x$; 4) $f(x) = x + \ln(2x + 1)$;
5) $f(x) = 6x - x\sqrt{x}$; 6) $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 3x$.

255. Найти все значения a, при которых $f'(x) \geqslant 0$ для всех действительных значений x, если
$$f(x) = x^3 + 3x^2 + ax.$$

256. Найти все значения a, при которых $f'(x) < 0$ для всех действительных значений x, если
$$f(x) = ax^3 - 6x^2 - x.$$

257. Найти все значения a, при которых уравнение $f'(x) = 0$ не имеет действительных корней, если:
1) $f(x) = ax^2 - \frac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = ax + \frac{1}{x}$;
3) $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 6x$; 4) $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax$.

258. Найти все значения a, при которых неравенство $f'(x) < 0$ не имеет действительных решений, если:
1) $f(x) = ax^7 + x^3 - 1$; 2) $f(x) = x^5 + ax^3 + 3$;
3) $f(x) = (x + a)\sqrt{x}$; 4) $f(x) = x + \frac{a}{x}$.

259. Определить, под каким углом пересекаются графики функций (углом между кривыми называется угол между касательными к кривым в точке их пересечения):
1) $y = 2\sqrt{x}$ и $y = 2\sqrt{6-x}$; 2) $y = \sqrt{2x+1}$ и $y = 1$.

260. Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0, если:
1) $y = 2\sin \frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$; 2) $y = 2^{-x} - 2^{-2x}$, $x_0 = 2$;
3) $y = \frac{x+3}{2-x}$, $x_0 = 2$; 4) $y = x + \ln x$, $x_0 = e$;
5) $y = e^{x^2-1}$, $x_0 = 1$; 6) $y = \sin(\pi x^2)$, $x_0 = 1$.

261. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, параллельной оси Ox, если:
1) $f(x) = x^2 - 4x$; 2) $f(x) = (x - 1)(x - 2)$;
3) $f(x) = x^4 + 32x - 3$; 4) $f(x) = x^6 + 6x - 2$.

262. Найти уравнения касательных к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2$, параллельных прямой $y = 6x$.

263. Прямая касается гиперболы $y = \frac{4}{x}$ в точке (1; 4).

Найти площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат.

264. Прямая касается гиперболы $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, в точке с абсциссой x_0. Доказать, что:
1) площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, не зависит от положения точки касания; найти эту площадь;
2) эта касательная проходит через точки $\left(x_0; \frac{k}{x_0}\right)$ и $(2x_0; 0)$.

265. Поршень сжимает воздух, находящийся в цилиндре, таким образом, что давление увеличивается со скоростью 800 Па/с, а его объём уменьшается со скоростью $2 \cdot 10^{-5}$ м^3/с. С какой скоростью изменяется температура воздуха T в тот момент, когда давление равно $1{,}6 \cdot 10^5$ Па, объём равен 0,01 м^3, а температура равна 400 °К? (Воздух в расчётах считать идеальным газом.)

266. Масса сахара m, растворяющегося в воде за время от начала растворения t_0 до момента t, определяется функцией $m = f(t)$. Найти: 1) массу сахара, растворяющегося за промежуток времени $[t_1; t_2]$; 2) среднюю скорость растворения сахара за промежуток времени $[t_1; t_2]$; 3) мгновенную скорость растворения сахара в момент времени t.

Вопросы к главе II

1. Перечислить способы задания числовой последовательности.
2. Какая последовательность называется сходящейся?
3. Какая последовательность называется монотонной?
4. Привести пример функции, имеющей вертикальную (горизонтальную) асимптоту.
5. Привести пример непрерывной функции и построить её график.
6. Что называется мгновенной скоростью?
7. Что называется производной функции $f(x)$ в точке x_0?
8. В чём состоит физический смысл производной?
9. Сформулировать правила дифференцирования суммы, произведения, частного.

10. Чему равна производная функции $y = x^p$ $(p \in \boldsymbol{R})$; $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = e^x$?
11. Что называется угловым коэффициентом прямой?
12. Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $(x_0;\ y_0)$.
13. В чём состоит геометрический смысл производной?
14. Что называется пределом последовательности?
15. Что называется пределом функции?
16. Какая функция называется непрерывной в точке a?
17. Как найти производную сложной функции? обратной функции?
18. Вывести формулу для нахождения производной функции $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$.
19. Какую прямую называют касательной к графику функции в данной точке?
20. Что называется пределом слева (справа) функции $f(x)$ в точке a?
21. Какую функцию называют бесконечно малой?
22. Сформулировать свойства предела функции.
23. Сформулировать свойства функций, непрерывных на отрезке.
24. Чему равна производная функции $y = \arcsin x$? $y = \operatorname{arctg} x$?
25. Что называется дифференциалом функции в точке?
26. В чём состоит геометрический и физический смысл дифференциала?

Проверь себя!

1. Найти значение производной функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x$ в точке $x = -2$.
2. Найти производную функции:

   1) $\frac{2}{x} + 4\sqrt{x} - e^x$; 2) $(3x - 5)^3$;

   3) $3\sin 2x \cdot \cos x$; 4) $\frac{x^3}{x^2 + 5}$.
3. Найти угол между касательной к графику функции $y = x^4 - 2x^3 + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{2}$ и осью Ox.
4. Найти значения x, при которых значения производной функции

$$f(x) = \ln(3x + 1)$$

положительны.

5. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sin 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

1. Найти предел последовательности $\{x_n\}$, если

$$x_n = \frac{2n^4 + n^2 - 4}{3n^4 - n^3 + 2}.$$

2. Выяснить, является ли непрерывной в точке $x = 3$ функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} \text{ при } x \neq 3, \\ 2 \text{ при } x = 3. \end{cases}$$

3. Найти значения x, при которых значения производной функции

$$f(x) = 2\sqrt{x} - 3\ln(x + 2)$$

равны 0.

4. Написать уравнение той касательной к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5$, которая параллельна прямой $y = 3x - 2$.

Историческая справка

Основными понятиями математического анализа яляются понятия функции, предела, производной и интеграла.

Термин «функция» впервые был употреблён в 1692 г. немецким математиком Г. Лейбницем (1646—1716). Первое определение понятия функции, основанное на геометрических представлениях, сформулировал в 1748 г. Л. Эйлер (1707—1783). Ему принадлежит и введение символа $f(x)$. Эйлер фактически отождествлял функцию с её аналитической формулой, хотя уже современники Эйлера понимали, что функцию можно задавать не только аналитически.

В 1834 г. великий русский математик Н. И. Лобачевский (1792—1856) дал определение понятия функции на основе идеи соответствия элементов двух числовых множеств. В 1837 г. немецкий математик П. Дирихле (1805—1859) сформулировал обобщённое определение понятия функции: «y является функцией переменной x на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, если каждому значению x соответствует вполне определённое значение y, причём не имеет значения, каким образом установлено это соответствие — формулой, графиком, таблицей или словесным описанием».

После создания теории множеств во второй половине XIX в. определение понятия функции было дано на множественной основе. В XX в. в связи с развитием естественных наук происходило дальнейшее расширение понятия функции.

Понятие производной определяется через понятие предела, история появления которого уходит в глубокую древность. Ещё в IV в. до н. э. знаменитый древнегреческий математик Евдокс Книдский в неявном виде использовал предельные переходы для обоснования методов вычисления площадей криволинейных фигур. В явном виде предельные переходы встречаются в работе фламандского математика А. Такке (1612—1660) «Начала плоской и телесной геометрии», опубликованной в 1654 г. Первое определение предела дал английский математик Д. Валлис (1616—1703). Метод пределов получил своё развитие в работах знаменитого английского учёного И. Ньютона (1643—1727). Ему же принадлежит введение символа lim.

Существенный вклад в развитие основ дифференциального исчисления внесли французские учёные П. Ферма (1601—1665) и Р. Декарт (1596—1650). В середине 60-х гг. XVII в. Ньютон пришёл к понятию производной, решая задачи механики, связанные с нахождением мгновенной скорости. Результаты своей работы он в 1671 г. изложил в трактате «Метод флюкций и бесконечных рядов». Однако этот трактат был опубликован лишь в 1736 г., и поэтому первой работой по дифференциальному исчислению считается статья Лейбница, опубликованная в 1684 г., в которой рассматривается геометрическая задача о проведении касательной к кривой.

Приращение абсциссы — бесконечно малую разность $x_2 - x_1$ — Лейбниц обозначал dx (d — первая буква латинского слова differentia — разность), а приращение ординаты $y_2 - y_1$ он обозначал dy. В середине XVIII в. Эйлер для обозначения приращений стал пользоваться греческой буквой Δ. Термин «производная» (по-французски dérivée) впервые появился в 1800 г. в книге французского математика Л. Арбогаста (1759—1803) «Вычисление производных». Обозначение производной y' и $f'(x)$ ввёл французский математик Ж. Лагранж (1736—1813).

Глава III

Применение производной к исследованию функций

Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в том или ином деле.

А. Н. Крылов

Замечательный русский математик П. Л. Чебышев (1821—1894) писал о том, что особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека: как располагать своими средствами для достижения по возможности наибольшей выгоды. С задачами такого типа имеют дело люди разных специальностей: технологи стремятся организовать производство так, чтобы из имеющегося сырья можно было изготовить наибольшее количество продукции с наименьшими затратами; логисты прокладывают транспортные маршруты по возможности наименьшей протяжённости; альпинист выбирает снаряжение с наименьшим весом.

Природа тоже решает задачи «наибольшей выгоды»: любое животное, которому холодно, сворачивается «калачиком» — принимает позу с наименьшей площадью соприкосновения с холодным воздухом; пчёлы строят ячейки для мёда такой формы, для которой нужно наименьшее количество воска.

В математическом анализе с помощью нахождения производных разработаны методы решения задач на нахождение наибольших и наименьших значений функции — задач, которые имеют очень широкое распространение в природе, практике человеческой деятельности, смежных научных знаниях. Эти задачи называют также задачами на оптимизацию.

В этой главе вы познакомитесь с методами исследования функции с помощью производной, решите ряд интересных задач на оптимизацию, сравните, каким методом быстрее и точнее находятся особые точки на графике функции (элементарным или с помощью аппарата математического анализа).

§ 1. Возрастание и убывание функции

С помощью производной можно находить промежутки монотонности функции.

Напомним, что термин «промежуток» используется для обозначения таких числовых множеств, как отрезок $[a; b]$, интервал $(a; b)$, полуинтервалы $[a; b)$ и $(a; b]$. Точки a и b называют *граничными точками*, а все остальные точки интервала $(a; b)$ — *внутренними точками промежутка*.

Промежутками называют и числовые лучи, т. е. множества чисел вида $x > a$, $x \geqslant a$, $x < a$, $x \leqslant a$, где a — некоторое число.

Напомним также, что функция $f(x)$ называется *возрастающей* на некотором промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. для любых точек x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Если для любых точек x_1 и x_2 из данного промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство

$$f(x_2) < f(x_1),$$

то функция $f(x)$ называется *убывающей* на этом промежутке.

При доказательстве теорем о достаточных условиях возрастания или убывания функции используется следующая теорема, которая называется *теоремой Лагранжа*.

Теорема 1

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда существует точка $c \in (a; b)$, такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (1)$$

Эта теорема доказывается в курсе высшей математики. Поясним геометрический смысл формулы (1). Проведём секущую l (рис. 56) через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ графика функции $y = f(x)$. Угловой коэффициент k секущей l равен

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (2)$$

Равенство (1) можно записать в виде

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (3)$$

Из равенств (2) и (3) следует, что угловой коэффициент $f'(c)$ касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке C с абсциссой c равен угловому коэффициенту k секущей l.

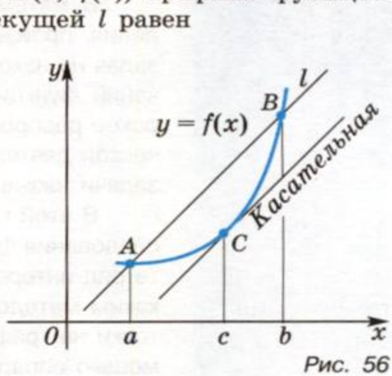


Рис. 56

Таким образом, на интервале $(a; b)$ найдётся такая точка c, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке C $(c; f(c))$ параллельна секущей l.

Теорема 2

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$. Тогда если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a; b)$, то функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$, а если $f'(x) < 0$, то она убывает на этом отрезке.

Докажем эту теорему (достаточные условия возрастания и убывания функции) с помощью теоремы 1.

○ Пусть x_1 и x_2 — произвольные точки отрезка $[a; b]$, такие, что $x_1 < x_2$. Применяя к отрезку $[x_1; x_2]$ формулу (1), получаем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \ c \in (x_1; x_2). \qquad (4)$$

Так как $x_2 - x_1 > 0$, то из равенства (4) следует, что при $f'(x) > 0$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, а при $f'(x) < 0$ — неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Это означает, что если $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$, а если $f'(x) < 0$, то она убывает на этом отрезке. ●

Промежутки возрастания и убывания функции называют *промежутками монотонности* этой функции.

Задача 1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = (x - 1)^2(x - 4)$.

▷ Найдём производную данной функции:

$$f'(x) = 2(x - 1)(x - 4) + (x - 1)^2 = 3(x - 1)(x - 3),$$

откуда следует, что $f'(x) > 0$ при $x < 1$ и $x > 3$. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на промежутках $x \leqslant 1$ и $x \geqslant 3$.

На интервале $1 < x < 3$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$. По теореме 2 функция $f(x)$ убывает на этом интервале и на отрезке $[1; 3]$.

График функции $y = (x - 1)^2(x - 4)$ изображён на рисунке 57. ◀

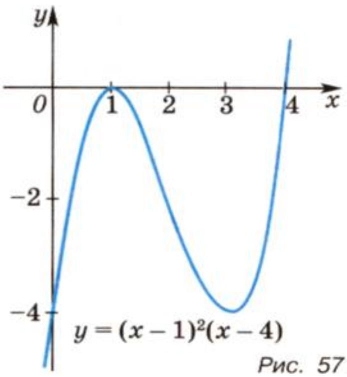


Рис. 57

Задача 2. Доказать, что функция $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ возрастает на всей числовой прямой.

▷ Так как $f'(x) = 6x^2 - 6x + 6 = 6\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) > 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$, то функция $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой. ◀

Задача 3. Найти промежутки монотонности функции:

1) $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x + 7$;

2) $f(x) = xe^{-x}$.

▷ 1) $f'(x) = 3x^2 - 60x + 225 = 3(x - 5)(x - 15)$.

Если $x < 5$ или $x > 15$, то $f'(x) > 0$. По теореме 2 функция $f(x)$ возрастает на промежутках $x \leqslant 5$ и $x \geqslant 15$.

На интервале $5 < x < 15$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, и поэтому функция $f(x)$ убывает на отрезке $5 \leqslant x \leqslant 15$.

2) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$.

Если $x < 1$, то $f'(x) > 0$, а если $x > 1$, то $f'(x) < 0$. По теореме 2 функция $f(x)$ возрастает на промежутке $x \leqslant 1$ и убывает на промежутке $x \geqslant 1$. ◀

Задача 4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и для всех $x \in (a; b)$ справедливо равенство $f'(x) = 0$. Доказать, что $f(x) = C$, $x \in [a; b]$, т. е. функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a; b]$.

▷ Пусть x_0 — некоторая точка отрезка $[a; b]$, x — произвольная точка этого отрезка. По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. Так как $c \in (a; b)$, то $f'(c) = 0$, и поэтому $f(x) = f(x_0) = C$. ◀

Задача 5. Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то справедливы неравенства

$$\operatorname{tg} x > x, \ \sin x > \frac{2}{\pi}x.$$

▷ 1) Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \operatorname{tg} x - x$. Эта функция дифференцируема на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, причём $\varphi'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, откуда следует, что $\varphi'(x) > 0$, так как $0 < \cos^2 x < 1$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Кроме того, функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x = 0$. По теореме 2 эта функция возрастает на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Так как $\varphi(0) = 0$, то при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ справедливо неравенство $\varphi(x) > \varphi(0)$, т. е. $\operatorname{tg} x - x > 0$, откуда следует неравенство $\operatorname{tg} x > x$.

2) Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$; $f(0) = 1$. Эта функция дифференцируема на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и непрерывна во всех точках отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, включая точку $x = 0$, так как $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = f(0)$.

Найдём $f'(x)$. По правилу дифференцирования произведения $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\sin x + \frac{1}{x}\cos x = \frac{\cos x}{x^2}(x - \operatorname{tg} x)$. Если $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $x - \operatorname{tg} x < 0$ (из п. 1). Кроме того, $\cos x > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $x^2 > 0$. Следовательно, $f'(x) < 0$ и по теореме 2 функция $f(x)$ убывает на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому $f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. $\frac{\sin x}{x} > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, где $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$, откуда следует неравенство $\sin x > \frac{2}{\pi}x$. ◀

Упражнения

Найти промежутки возрастания и убывания функции (267—268).

267. 1) $y = 5x^2 - 3x - 1$; 2) $y = x^2 - 10x + 11$; 3) $y = 2x^3 + 3x^2 - 4$; 4) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 40$.

268. 1) $y = x^2 - 3x + 4$; 2) $y = 2x - x^2$; 3) $y = x^3 - 3x$; 4) $y = x^4 - 2x^2$.

Найти промежутки монотонности функции **(269—270)**.

269. 1) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 4$; 2) $y = \frac{2}{x} + 1$; 3) $y = -\sqrt{x-3}$; 4) $y = 3\sqrt{x-5} + 1$; 5) $y = x - \sin 2x$; 6) $y = 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$.

270. 1) $y = \frac{x^3}{x^2+3}$; 2) $y = (x-1)^3(2x+3)^2$; 3) $y = (x-1)e^{3x}$; 4) $y = xe^{-3x}$.

271. На рисунке 58 изображён график функции $f'(x)$, являющейся производной функции y. Определить промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$.

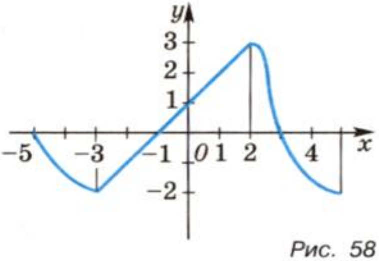


Рис. 58

272. При каких значениях a функция возрастает на всей числовой прямой:
1) $y = x^3 - ax$;
2) $y = ax - \sin x$?

273. Доказать, что функция $y = \sqrt{6 + x - x^2}$ возрастает на отрезке $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ и убывает на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$.

274. Доказать, что если $x > 0$, то:

1) $\ln(1+x) < x$; 2) $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$.

§ 2. Экстремумы функции

1. Необходимые условия экстремума

На рисунке 59 изображён график функции $y = f(x)$. Как видно из рисунка, существует такая окрестность точки x_1, что наибольшее значение функция $f(x)$ принимает в точке x_1. Тем же свойством обладает точка x_3. Точки x_1 и x_3 называют точками максимума функции $f(x)$.

Аналогично точку x_2 называют точкой минимума функции $f(x)$, так как значение функции в точке x_2 меньше её значений в остальных точках некоторой окрестности точки x_2.

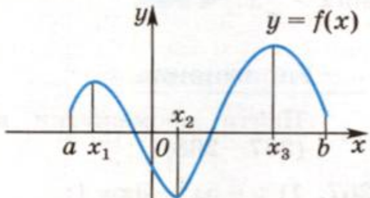


Рис. 59

Определение 1

Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Например, точка $x_0 = 0$ является точкой максимума функции $f(x) = 4 - x^2$. В этой точке функция принимает наибольшее значение, равное 4.

Определение 2

Точка x_0 называется *точкой минимума функции* $f(x)$, если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Например, точка $x_0 = 1$ является точкой минимума функции $f(x) = 2 + (x-1)^2$. В этой точке функция принимает наименьшее значение, равное 2.

Точки минимума и точки максимума называются *точками экстремума*.

Теорема 1 *(теорема Ферма)*

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в этой точке. Если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Строгое доказательство этой теоремы выходит за рамки школьного курса математики. Теорема имеет наглядный геометрический смысл: в точке экстремума x_0 касательная к графику функции параллельна оси абсцисс, и поэтому её угловой коэффициент $f'(x_0)$ равен нулю (рис. 60).

Например, функция $f(x) = 2x - x^2$ (рис. 61) имеет в точке $x_0 = 1$ максимум, и её производная $f'(x) = 2 - 2x$, $f'(1) = 0$.

Функция $f(x) = (x + 1)^2 - 4$ (рис. 62) имеет минимум в точке $x_0 = -1$, и $f'(x) = 2(x + 1)$, $f'(-1) = 0$.

Условие $f'(x) = 0$ является *необходимым условием экстремума* дифференцируемой функции $f(x)$. Это означает, что если $x = x_0$ — точка экстремума дифференцируемой функции, то $f'(x_0) = 0$.

Поэтому точки экстремума дифференцируемой функции $f(x)$ следует искать среди корней уравнений $f'(x) = 0$. Однако уравнение $f'(x) = 0$ может иметь корни, которые не являются точками экстремума функции $f(x)$.

Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(0) = 0$, но точка $x = 0$ не является точкой экстремума функции, так как эта функция возрастает на всей числовой оси (рис. 63).

Точки, в которых производная функции обращается в нуль, называются *стационарными точками* этой функции.

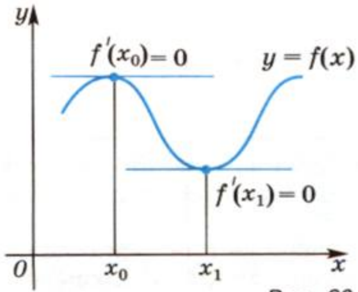


Рис. 60

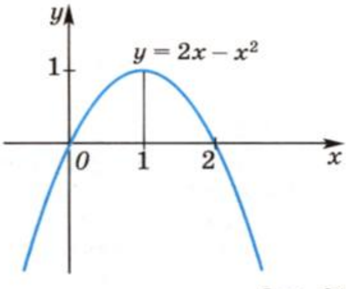


Рис. 61

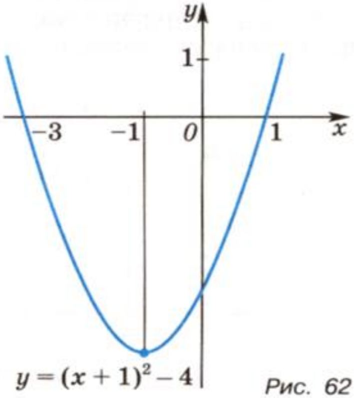


Рис. 62

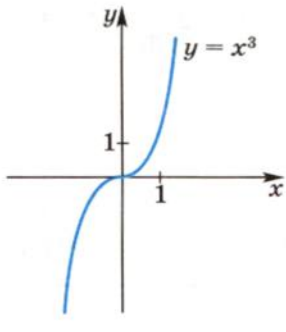


Рис. 63

Задача 1. Найти стационарные точки функции:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$; 2) $f(x) = xe^x$.

▷ 1) Так как $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$, то уравнение $f'(x) = 0$ имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Следовательно, -1 и 2 — стационарные точки данной функции.

2) В этом случае $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$. Поэтому $x = -1$ — стационарная точка функции $f(x)$. ◀

Заметим, что функция может иметь экстремум и в точке, в которой она не имеет производной. Например, функция $f(x) = |x| - 2$ не имеет производной в точке $x = 0$, однако эта точка является для неё точкой минимума (рис. 64).

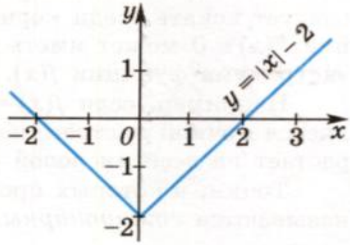


Рис. 64

Внутренняя точка области определения непрерывной функции $f(x)$, в которой эта функция не имеет производной или имеет производную, равную нулю, называется *критической точкой* функции $f(x)$.

Таким образом, для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума непрерывной функции $f(x)$, необходимо, чтобы эта точка была критической для данной функции.

2. Достаточные условия экстремума

Теорема 2

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, и непрерывна в точке x_0. Тогда:

1) если $f'(x)$ меняет знак с «−» на «+» при переходе через точку x_0, т. е. в некотором интервале $(a; x_0)$ производная отрицательна и в некотором интервале $(x_0; b)$ положительна, то x_0 — точка минимума функции $f(x)$ (рис. 65);

2) если $f'(x)$ меняет знак с «+» на «−» при переходе через точку x_0, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$ (рис. 66).

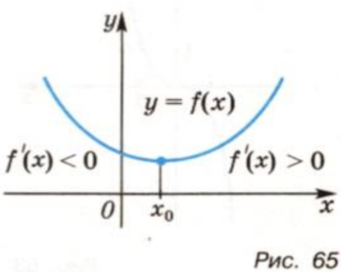


Рис. 65

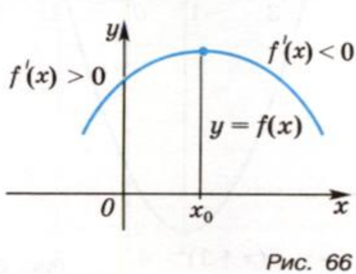


Рис. 66

○ Пусть $f'(x)$ меняет знак с «−» на «+» при переходе через точку x_0. Тогда $f'(x) < 0$ при $a < x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < b$. По теореме 2 из § 1 функция $f(x)$ убывает на промежутке $(a; x_0]$ и возрастает на промежутке $[x_0; b)$. Тогда $f(x_0)$ — наименьшее значение функции на интервале $(a; b)$, и поэтому x_0 — точка минимума функции $f(x)$.

Аналогично рассматривается случай максимума. ●

Задача 2. Найти точки экстремума функции:

1) $f(x) = x^3 - x$; 2) $f(x) = (x-2)^2(x+1)^3$.

▷ 1) Найдём производную

$$f'(x) = 3x^2 - 1 = 3\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Приравнивая её к нулю, находим две стационарные точки: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. При переходе через точку $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «+» на «−». Поэтому $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ — точка максимума. При переходе через точку $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ производная меняет знак с «−» на «+», поэтому $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — точка минимума.

2) Функция $f(x)$ дифференцируема на $\boldsymbol{R}$, поэтому все её точки экстремума содержатся среди стационарных точек, являющихся корнями уравнения $f'(x) = 0$, т. е. уравнения

$$2(x-2)(x+1)^3 + 3(x+1)^2(x-2)^2 = 0,$$

откуда $(x-2)(x+1)^2(5x-4) = 0$.

Полученное уравнение имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4}{5}$, $x_3 = 2$. При переходе через точку x_1 функция $f'(x)$ сохраняет знак, и поэтому (теорема 2 из § 1) x_1 не является точкой экстремума.

При переходе через точку x_2 функция $f'(x)$ меняет знак с «+» на «−», а при переходе через точку x_3 меняет знак с «−» на «+». Поэтому x_2 — точка максимума, а x_3 — точка минимума функции $f(x)$ (по теореме 2). ◀

Задача 3. Найти экстремумы функции $f(x) = \frac{x^3}{1-x}$.

▷ Область определения данной функции $x \neq 1$. Найдём производную:

$$f'(x) = \frac{(x^3)'(1-x) - x^3(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{3x^2(1-x) - x^3(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 - 3x^3 + x^3}{(1-x)^2} = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} = \frac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2}.$$

Найдём стационарные точки функции, решив уравнение $\frac{x^3(3-2x)}{(1-x)^2}=0$, которое имеет корни $x_1=0$, $x_2=\frac{3}{2}$.

При переходе через точку $x=0$ ни одно из выражений: x^2, $3-2x$, $(1-x)^2$ — не меняет знак, поэтому точка $x=0$ не является точкой экстремума.

При переходе через точку $x=\frac{3}{2}$ выражения x^2 и $(1-x)^2$ не меняют знак, выражение $3-2x$, а с ним и $f'(x)$ меняют знак с «+» на «−»; это означает, что $x=\frac{3}{2}$ — точка максимума. ◀

Задача 4. Найти точки экстремума функции

$$f(x)=5x^3-x|x+1|.$$

▷ Если $x\leqslant -1$, то $f(x)=f_1(x)=5x^3+x^2+x$, а если $x\geqslant -1$, то $f(x)=f_2(x)=5x^3-x^2-x$. Тогда $f_1'(x)=15x^2+2x+1>0$ при всех x, а уравнение $f_2'=15x^2-2x-1=0$ имеет корни $x_1=-\frac{1}{5}$, $x_2=\frac{1}{3}$. При этом $f_2'(x)>0$ при $x<-\frac{1}{5}$ и $x>\frac{1}{3}$, $f_2'(x)<0$ при $x_1<x<x_2$.

Функция $f(x)$ не имеет производной в точке $x_0=-1$, и $f'(x)=0$ при $x=x_1$ и $x=x_2$. Следовательно, $x_0=-1$, x_1, x_2 — критические точки функции $f(x)$.

Так как $f'(x)>0$ при $x<-1$ и при $-1<x<-\frac{1}{5}$, то x_0 не является точкой экстремума. Производная меняет знак с «+» на «−» при переходе через точку x_1 и с «−» на «+» при переходе через точку x_2. Следовательно, $x_1=-\frac{1}{5}$ — точка максимума, а $x_2=\frac{1}{3}$ — точка минимума функции. ◀

Упражнения

275. Найти стационарные точки функции:

1) $y=x^2-6x+5$; 2) $y=x^2-14x+15$;

3) $y=\frac{x}{2}+\frac{8}{x}$; 4) $y=\frac{x}{3}+\frac{12}{x}$;

5) $y=2x^3-15x^2+36x$; 6) $y=e^{2x}-2e^x$;

7) $y=\sin x-\cos x$; 8) $y=\cos 2x+2\cos x$.

276. Найти критические точки функции:

1) $y=\frac{|x|}{1+x^2}$; 2) $y=x^3-|x-1|$;

3) $y=2x^2-|x^2-1|$; 4) $y=3x+|3x-x^2|$.

Найти точки экстремума функции (277—278).

277. 1) $y = 2x^2 - 20x + 1$; 2) $y = 3x^2 + 36x - 1$;

3) $y = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$; 4) $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{16}$;

5) $y = x^3 - 4x^2$; 6) $y = x^4 - 8x^2 + 5$;

7) $y = x + \sin x$; 8) $y = 6\sin x - \cos 2x$.

278. 1) $y = x + \sqrt{3 - x}$; 2) $y = (x-1)^{\frac{6}{7}}$;

3) $y = x - \sin 2x$; 4) $y = \cos 3x - 4x$;

5) $y = (x-1)^4$; 6) $y = 1 - (x+1)^6$;

7) $y = (x+2)^2(x-3)^3$; 8) $y = (x-5)e^x$.

279. На рисунке 67 дан график функции, являющейся производной функции $f(x)$. Определить промежутки возрастания и убывания функции, её точки экстремума.

280. Найти экстремумы функции:

1) $y = \frac{x^3}{2+x}$;

2) $y = \frac{x^5}{5-x}$;

3) $y = |x-5|(x-3)^3$;

4) $y = \frac{(x-1)^2}{x+1}$.

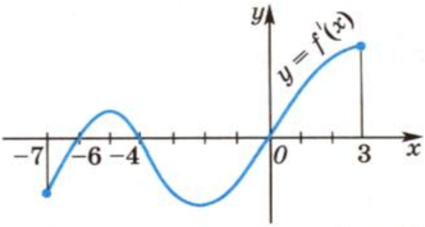


Рис. 67

§ 3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует точка этого отрезка, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее значение, и точка, в которой эта функция принимает наименьшее значение.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, имеющей на интервале $(a; b)$ несколько критических точек, достаточно вычислить значения функции $f(x)$ во всех этих точках, а также значения $f(a)$ и $f(b)$ и из всех полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

В прикладных задачах при нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ или на интервале $(a; b)$ часто встречается случай, когда функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и непрерывна на отрезке $[a; b]$, а уравнение $f'(x) = 0$ имеет единственный корень $x_0 \in (a; b)$, такой, что на одном из интервалов $(a;\ x_0)$, $(x_0;\ b)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а на другом — неравенство $f'(x) < 0$. В этом случае число $f(x_0)$ является наибольшим или наименьшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ или на интервале $(a;\ b)$.

Замечание. Пусть $g(x) \geqslant 0$ на некотором промежутке, $f(x) = (g(x))^n$, где $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$. Тогда, если одна из функций $f(x)$ и $g(x)$ принимает в точке x_0 из этого промежутка наибольшее (наименьшее) значение, то и другая функция принимает в точке x_0 наибольшее (наименьшее) значение.

Задача 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$.

▷ $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{8}$, $f(2) = 9\frac{1}{2}$; $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2}$, $3x^4 - 3 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Отрезку $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$ принадлежит одна стационарная точка $x_1 = 1$, $f(1) = 4$. Из чисел $6\frac{1}{8}$, $9\frac{1}{2}$ и 4 наибольшее — число $9\frac{1}{2}$, наименьшее — число 4, т. е. наибольшее значение функции равно $9\frac{1}{2}$, а наименьшее равно 4. ◀

Задача 2. Найти наибольшее значение функции $g(x) = x\sqrt[4]{6 - x^2}$ на интервале $0 < x < \sqrt{6}$.

▷ Так как $g(x) > 0$ для всех $x \in \left(0;\ \sqrt{6}\right)$, то точка x_0 является точкой наибольшего значения функции $g(x)$ тогда и только тогда, когда эта точка является точкой наибольшего значения функции $f(x) = (g(x))^4 = x^4(6 - x^2) = 6x^4 - x^6$.

Найдём производную $f'(x) = 24x^3 - 6x^5 = 6x^3(2 + x)(2 - x)$. На интервале $0 < x < 2$ функция $f(x)$ возрастает, так как на этом интервале $f'(x) > 0$. На интервале $2 < x < \sqrt{6}$ функция $f(x)$ убывает, так как на этом интервале $f'(x) < 0$. Следовательно, точка $x = 2$ является точкой максимума функции $f(x)$ и в этой точке функция $f(x)$ принимает наибольшее из её значений на интервале $0 < x < \sqrt{6}$. ◀

Функция $g(x)$ также принимает наибольшее значение на интервале $0 < x < \sqrt{6}$ в точке $x = 2$, и это значение равно $g(2) = 2\sqrt[4]{6 - 4} = 2\sqrt[4]{2}$.

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на множестве E, если:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8$, $E = [-3;\ 6]$;
2) $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)^3$, $E = [0;\ 3]$.

▷ Пусть M — наибольшее, а m — наименьшее значение функции $f(x)$ на множестве E.

1) Так как $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x + 2)(x - 3)$, то функция $f(x)$ имеет две стационарные точки $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, каждая из которых принадлежит отрезку $[-3; 6]$. Вычислим значения функции $f(x)$ в точках x_1 и в концах отрезка $[-3; 6]$:

$$f(-3) = 19,\ f(-2) = 36,\ f(3) = -89,\ f(6) = 100.$$

Следовательно, $M = 100$, $m = -89$.

2) Функция $f(x)$ имеет три стационарные точки $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4}{5}$, $x_3 = 2$ (§ 2, задача 2), из которых множеству E принадлежат только точки x_2 и x_3. Так как $f(0) = 4$, $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8748}{3125}$, $f(2) = 0$, $f(3) = 64$, то $M = 64$, $m = 0$. ◀

Задача 4. Из всех прямоугольников, вписанных в окружность радиуса R, найти прямоугольник наибольшей площади.

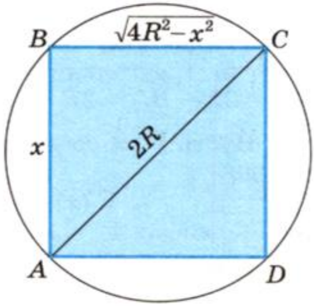


Рис. 68

▷ Найти прямоугольник — это значит найти его размеры, т. е. длины его сторон. Пусть прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R (рис. 68). Обозначим $AB = x$. Из треугольника ABC по теореме Пифагора находим $BC = \sqrt{4R^2 - x^2}$.

Площадь прямоугольника равна

$$S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}, \qquad (1)$$

где $0 < x < 2R$. Задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $S(x)$ принимает наибольшее значение на интервале $0 < x < 2R$.

Так как $S(x) > 0$ на интервале $0 < x < 2R$, то функции $S(x)$ и $f(x) = (S(x))^2$ принимают наибольшее значение на этом интервале в одной и той же точке.

Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x) = x^2(4R^2 - x^2) = 4R^2x^2 - x^4$ принимает наибольшее значение на интервале $0 < x < 2R$.

Имеем

$$f'(x) = 8R^2x - 4x^3 = 4x(R\sqrt{2} + x)(R\sqrt{2} - x).$$

На интервале $0 < x < 2R$ есть только одна стационарная точка $x = R\sqrt{2}$ — точка максимума. Следовательно, наибольшее значение функция $f(x)$ (а значит, и функция $S(x)$) принимает при $x = R\sqrt{2}$.

Итак, одна сторона искомого прямоугольника равна $R\sqrt{2}$, другая равна $\sqrt{4R^2 - \left(R\sqrt{2}\right)^2} = R\sqrt{2}$, т. е. искомый прямоугольник — квадрат со стороной $R\sqrt{2}$, его площадь равна $2R^2$. ◀

Задача 5. Найти высоту конуса, имеющего наибольший объём среди всех конусов, вписанных в сферу радиуса R.

▷ В сечении сферы плоскостью, проходящей через ось конуса, образуется окружность радиуса R, а в сечении конуса той же плоскостью — равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), вписанный в эту окружность с центром O (рис. 69).

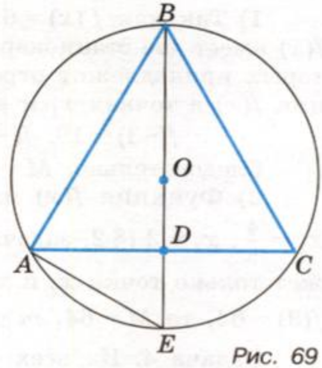


Рис. 69

Пусть D — центр основания конуса, x — его высота, r — радиус основания. Тогда $BD = x$, $AD = r$. Продолжим BD до пересечения с окружностью в точке E. Так как угол BAE прямой, то по свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла треугольника ABE на гипотенузу, $AD^2 = ED \cdot DB$, где $ED = BE - BD = 2R - x$. Следовательно, $r^2 = (2R - x)x$.

Пусть V — объём конуса, тогда $V(x) = \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{1}{3}\pi(2Rx^2 - x^3)$, откуда

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi(4Rx - 3x^2) = \frac{1}{3}\pi x(4R - 3x).$$

Так как $0 < x < 2R$, а на интервале $(0;\ 2R)$ уравнение $V'(x) = 0$ имеет единственный корень $x = \frac{4R}{3}$, причём $V'(x) > 0$ при $0 < x < \frac{4R}{3}$ и $V'(x) < 0$ при $\frac{4R}{3} < x < 2R$, то значение функции $V(x)$ при $x = \frac{4R}{3}$ является наибольшим значением этой функции.

Ответ. $\frac{4R}{3}$. ◀

Задача 6. На координатной плоскости Oxy дана точка $M(2;\ 4)$. Рассматриваются треугольники, у которых две вершины, симметричные относительно оси Oy, лежат на параболе $y = 3x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, а точка M является серединой одной из сторон каждого треугольника. Среди этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

▷ Пусть $0 \leqslant x \leqslant 1$, $A(-x;\ 3x^2)$, $B(x;\ 3x^2)$ — вершины одного из рассматриваемых треугольников (рис. 70).

Третья вершина C определяется неоднозначно, так как точка M может быть либо серединой стороны BC, либо серединой стороны AC (на рисунке это точки C_1 и C_2).

Площади треугольников AC_1B и AC_2B равны, так как у них общее основание AB и равные высоты h_1 и h_2, где $h_1 = h_2 = h$, причём h равняется удвоенной разности ординат точек M и A, т. е. $h = 2(4 - 3x^2)$.

Пусть $S = S(x)$ — площадь треугольника ABC, тогда $S(x) = \frac{1}{2}AB \cdot h = xh = 8x - 6x^3$. Так как уравнение $S'(x) = 0$, т. е.

уравнение $8 - 18x^2 = 0$, имеет на отрезке [0; 1] единственный корень $x_0 = \frac{2}{3}$, причём $S'(x) > 0$ при $0 \leqslant x < \frac{2}{3}$ и $S'(x) < 0$ при $\frac{2}{3} < x \leqslant 1$, то значение

$$S(x_0) = S\left(\frac{2}{3}\right) = 3\frac{5}{9}$$

является наибольшим значением функции $S(x)$ на отрезке [0; 1].

Ответ. $3\frac{5}{9}$. ◀

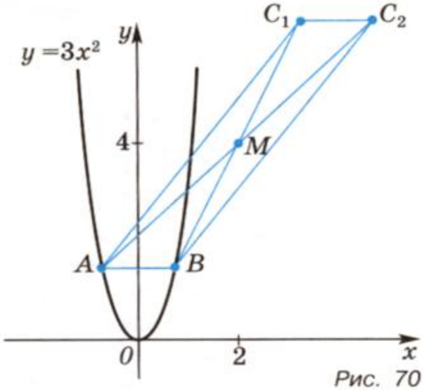


Рис. 70

Задача 7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 5x^3 - x|x+1|$$

на отрезке [−2; 0].

▷ Данная функция непрерывна на отрезке [−2; 0] и дифференцируема во всех точках интервала (−2; 0), кроме точки $x_0 = -1$. В § 2 (задача **4**) было установлено, что функция $f(x)$ имеет на интервале (−2; 0) единственную точку экстремума $x_1 = -\frac{1}{5}$, которая является точкой максимума этой функции. Находим значения функции в точке x_1 и в концах отрезка [−2; 0]. Получаем $f(-2) = -38$, $f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{25}$, $f(0) = 0$. Наибольшее из этих чисел — число $\frac{3}{25}$, а наименьшее — число −38. ◀

Упражнения

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (281—283).

281. 1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ на отрезке [−1; 2];
2) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$ на отрезке [−1; 2];
3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ на отрезке [−2; 1];
4) $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x$ на отрезке [−3; −2].

282. 1) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ на отрезке [1; 2];
2) $f(x) = x - \sqrt{x}$ на отрезке [0; 4].

283. 1) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ на отрезке [0; 2π];
2) $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$ на отрезке [0; π].

284. Найти наибольшее значение функции:
1) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на отрезке [−1; 2];
2) $1 - x^4 - x^6$ на интервале (−3; 3);
3) $\frac{2}{x} - x^2$ на промежутке $x < 0$;
4) $\frac{x}{4} + \frac{4}{x}$ на промежутке $x < 0$.

285. Найти наименьшее значение функции:

1) $x^2+\frac{16}{x^2}$ при $x>0$; 2) $x+\frac{4}{x}$ при $x>0$.

286. Число 50 записать в виде суммы двух чисел, сумма кубов которых наименьшая.

287. Записать число 625 в виде произведения двух положительных чисел так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

288. Из всех прямоугольников с периметром p найти прямоугольник наибольшей площади.

289. Из всех прямоугольников, площадь которых равна 9 см^2, найти прямоугольник с наименьшим периметром.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (**290—291**).

290. 1) $f(x)=x-2\ln x$ на отрезке $\left[\frac{3}{2}; e\right]$;

2) $f(x)=x+e^{-x}$ на отрезке $[-1; 2]$.

291. 1) $f(x)=\sin x+\cos x$ на отрезке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$;

2) $f(x)=\sin x+\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

292. Найти наибольшее значение функции:

1) $3\sqrt{x}-x\sqrt{x}$ на промежутке $x>0$;

2) $3x-2x\sqrt{x}$ на промежутке $x>0$;

3) $\ln x-x$ на промежутке $x>0$;

4) $2x-e^{2x}$ на интервале $(-1; 1)$.

293. Найти наименьшее значение функции:

1) $e^{3x}-3x$ на интервале $(-1; 1)$;

2) $\frac{1}{x}+\ln x$ на интервале $(0; 2)$.

294. Найти наибольшее значение функции:

1) $\sqrt[3]{x^2(1-x)}$ на интервале $(0; 1)$;

2) $\sqrt{x(2-x)}$ на интервале $(0; 2)$.

295. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x)=\frac{x^4+1}{x^2+1}$ на отрезке $[-1; 1]$;

2) $f(x)=\left|x^2+2x-3\right|+\frac{3}{2}\ln x$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

296. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x)=\begin{cases}1-x \text{ при } x<1,\\ \sqrt{x-1} \text{ при } x\geqslant 1\end{cases}$ на отрезке $[-1; 2]$;

2) $f(x)=\begin{cases}-2x^2-12x-17 \text{ при } x<-2,\\ (x+1)^3 \text{ при } x\geqslant -2\end{cases}$ на отрезке $[-5; -1]$.

297. Найти наибольшую площадь прямоугольника, одна из вершин которого лежит на оси Ox, вторая — на положительной полуоси Oy, третья — в точке (0; 0), а четвёртая — на параболе $y = 3 - x^2$.

298. Из всех прямоугольников с периметром p найти прямоугольник с наименьшей диагональю.

299. Из всех прямоугольных параллелепипедов, вписанных в сферу радиуса R и имеющих в основании квадрат, найти параллелепипед наибольшего объёма.

300. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точку $A(1;\ 2)$ и отсекающей от первого координатного угла треугольник наименьшей площади.

301. На координатной плоскости даны точки $B(3;\ 1)$ и $C(5;\ 1)$. Рассматриваются трапеции, для которых отрезок BC является одним из оснований, а вершины другого основания лежат на дуге параболы $y = (x-1)^2$, выделяемой условием $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Среди этих трапеций выбрана та, которая имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

302. Рассматриваются всевозможные параболы, касающиеся оси Ox и прямой $y = \frac{x}{2} - 3$ и такие, что их ветви направлены вниз. Найти уравнение той параболы, для которой сумма расстояний от начала координат до точек пересечения параболы с осями координат является наименьшей.

§ 4. Производная второго порядка, выпуклость и точки перегиба

1. Производная второго порядка

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;\ b)$. Производную этой функции $f'(x)$ называют *первой производной* или *производной первого порядка* функции $f(x)$.

Если функция $f'(x)$ дифференцируема на интервале $(a;\ b)$, то её производную называют *второй производной* или *производной второго порядка* функции $f(x)$ и обозначают $f''(x)$, т. е.

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Задача 1. Найти $f''(x)$, если:

1) $f(x) = x^4 - 3x^2 + x + 5$; 2) $f(x) = \sin 3x$;

3) $f(x) = e^{x^2}$; 4) $f(x) = \ln(x^2 + 4)$.

▷ 1) $f'(x) = 4x^3 - 6x + 1$, $f''(x) = 12x^2 - 6$;

2) $f'(x) = 3\cos 3x$, $f''(x) = -9\sin 3x$;

3) $f'(x) = 2xe^{x^2}$, $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$;

4) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+4}$, $f''(x) = \frac{2(x^2 + 4 - x \cdot 2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{2(4 - x^2)}{(x^2+4)^2}$. ◀

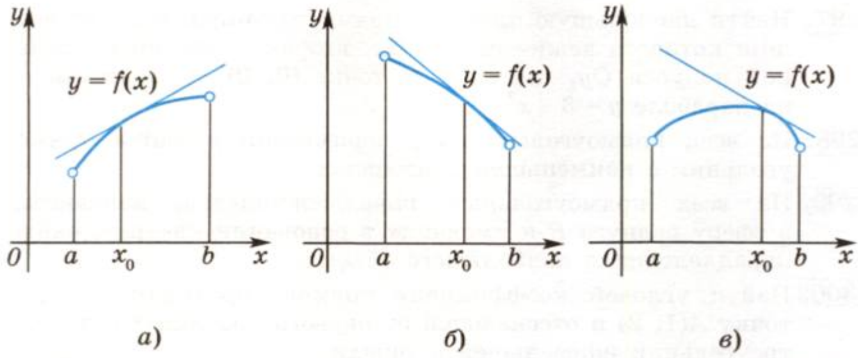


Рис. 71

Выясним физический смысл второй производной. Пусть закон движения задаётся формулой $y = s(t)$, где $S(t)$ — координата движущейся точки в момент времени t. Тогда мгновенная скорость движения $v(t) = s'(t)$ характеризует быстроту изменения $s(t)$, а быстроту (скорость) изменения самой скорости определяет ускорение $a(t) = v'(t)$, т. е. $a(t) = s''(t)$.

2. Выпуклость функции

На рисунке 71 (*а—в*) изображены графики функций, имеющих на интервале $(a; b)$ первую и вторую производные. Выясним, в чём состоит различие в поведении этих функций и какими общими свойствами они обладают.

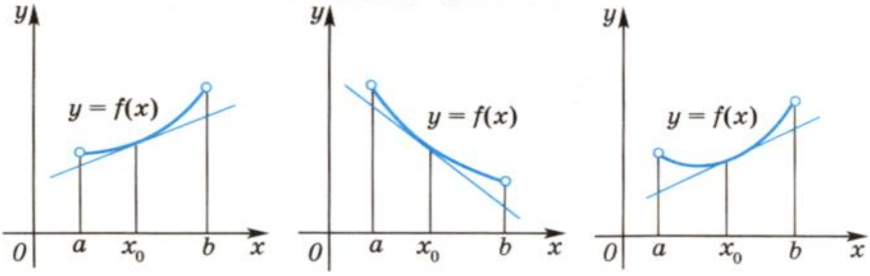
На рисунке 71, *б* изображён график убывающей функции, а на рисунке 71, *а* — график возрастающей функции; функция, график которой представлен на рисунке 71, *в*, не является монотонной.

Однако все кривые, изображённые на рисунке 71, обладают общим свойством: с возрастанием x от a до b угловой коэффициент касательной каждой из этих кривых уменьшается, т. е. производная каждой из соответствующих функций — убывающая функция на интервале $(a; b)$, откуда следует, что $f''(x) < 0$.

Из рисунка видно, что для любой точки $x_0 \in (a; b)$ график функции $y = f(x)$ лежит ниже касательной к этому графику в точке $(x_0; f(x_0))$ при всех $x \in (a; b)$ и $x \neq x_0$. Поэтому функции, графики которых представлены на этом рисунке, называют *выпуклыми вверх*.

Определение

Функция $y = f(x)$, дифференцируемая на интервале $(a; b)$, называется *выпуклой вверх* (см. рис. 71) на этом интервале, если функция $f'(x)$ убывает на интервале $(a; b)$, и *выпуклой вниз* (рис. 72), если функция $f'(x)$ возрастает на интервале $(a; b)$.



а) б) в)

Рис. 72

Отметим, что если функция $y = f(x)$ выпукла вверх на интервале $(a;\ b)$, а M_1 и M_2 — точки графика этой функции с абсциссами x_1 и x_2, где $a < x_1 < x_2 < b$ (рис. 73), то на интервале $(x_1;\ x_2)$ этот график лежит выше прямой, проведённой через точки M_1 и M_2.

Интервалы, на которых функция выпукла вверх или вниз, называют *интервалами выпуклости* этой *функции*.

С помощью второй производной $f''(x)$ можно находить интервалы выпуклости функции $f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $(a;\ b)$ вторую производную. Тогда если $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a;\ b)$, то $f'(x)$ — убывающая функция (§ 1, теорема 2), и поэтому функция $f(x)$ выпукла вверх на интервале $(a;\ b)$. Если $f''(x) > 0$ при всех $x \in (a;\ b)$, то функция $f'(x)$ возрастает на интервале $(a;\ b)$, и поэтому функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале $(a;\ b)$.

Задача 2. Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = x^3$; 2) $f(x) = \sin x$, $-\pi < x < \pi$; 3) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

▷ 1) $f''(x) = 6x$. Если $x < 0$, то $f''(x) < 0$, и поэтому функция $f(x)$ выпукла вверх; если $x > 0$, то $f''(x) > 0$, и поэтому функция $f(x)$ выпукла вниз (рис. 74).

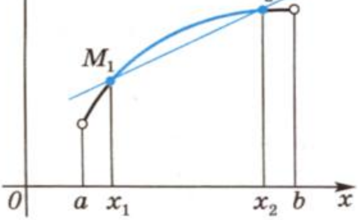


Рис. 73

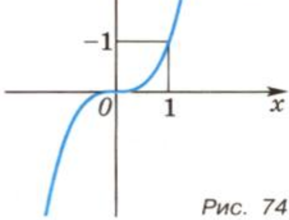


Рис. 74

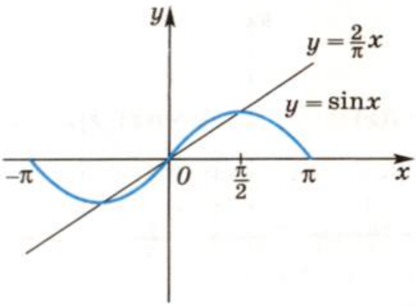


Рис. 75

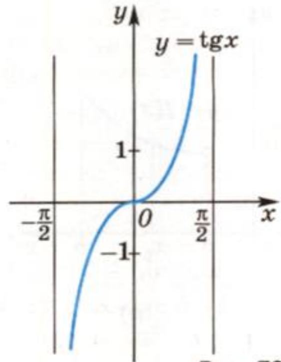


Рис. 76

2) $f''(x)=-\sin x$. На интервале $(-\pi;\ 0)$ справедливо неравенство $f''(x)>0$, и поэтому функция выпукла вниз (рис. 75), а на интервале $(0;\ \pi)$ она выпукла вверх.

3) $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $\quad f''(x)=(-2)\frac{1}{\cos^3 x}(-\sin x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. Если $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$, то $\sin x<0$, $\cos x>0$, $f''(x)<0$, и поэтому функция $f(x)=\operatorname{tg}x$ выпукла вверх на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$. На интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ эта функция выпукла вниз (рис. 76). ◀

<u>**Задача 3.**</u> Доказать, что если $0<x<\frac{\pi}{2}$, то $\sin x>\frac{2}{\pi}x$.

▷ Прямая $y=\frac{2}{\pi}x$ проходит через точки $(0;\ 0)$ и $\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$. Функция $y=\sin x$ выпукла вверх (задача 2) на интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, и поэтому её график на этом интервале лежит выше прямой $y=\frac{2}{\pi}x$ (см. рис. 75), т. е. неравенство справедливо. Заметим, что это же неравенство в задаче **5** из § 1 доказано иначе. ◀

3. Точки перегиба

Для функций $f(x)=x^3$; $f(x)=\sin x$ при $-\pi<x<\pi$; $f(x)=\operatorname{tg}x$ при $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, рассмотренных в задаче **2**, точка $x=0$ является одновременно концом интервала выпуклости вверх и концом интервала выпуклости вниз.

Определение

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;\ b)$, $x_0\in(a;\ b)$ и пусть эта функция выпукла вверх на одном из интервалов $(a;\ x_0)$, $(x_0;\ b)$ и выпукла вниз на другом интервале. Тогда точка x_0 называется *точкой перегиба* этой функции, а точка $(x_0; f(x_0))$ — точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Иначе говоря, в точке перегиба дифференцируемая функция меняет направление выпуклости.

Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную на интервале $(a; b)$ и $x_0 \in (a; b)$. Тогда если $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 — точка перегиба функции $f(x)$.

Задача 4. Найти точки перегиба функции:

1) $f(x) = xe^x$; 2) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 7$.

▷ 1) $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$, $f''(x) = e^x(1 + x) + e^x = e^x(x + 2)$.

Так как $f''(x) < 0$ при $x < -2$ и $f''(x) > 0$ при $x > -2$, то $x = -2$ — точка перегиба функции xe^x. Других точек перегиба у этой функции нет.

2) $f'(x) = 4x^3 - 12x$, $f''(x) = 12x^2 - 12 = 12\ (x^2 - 1)$.

Функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, которые являются точками перегиба функции $f(x)$. ◀

Отметим, что график дифференцируемой функции $f(x)$ при переходе через точку перегиба этого графика $M_0(x_0; f(x_0))$ переходит с одной стороны касательной к этому графику в точке M_0 на другую сторону.

Задача 5. Найти точки перегиба функции:

1) $f(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x - 3}$.

1) $f'(x) = -\dfrac{4x}{(1 + x^2)^2}$, $f''(x) = (-4)\dfrac{(1 + x^2)^2 - 4x^2(1 + x^2)}{(1 + x^2)^4} = \dfrac{4(3x^2 - 1)}{(1 + x^2)^3}$.

Так как $3x^2 - 1 > 0$ при $x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $x > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, а $3x^2 - 1 < 0$ при $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, то точки $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ — точки перегиба (рис. 77).

2) Найдём первую производную:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{(x - 3)^2} = -\left(\frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{(x - 3)^2}\right).$$

Из этой формулы видно, что $f'(x) < 0$ при $x \neq 1$ и $x \neq 3$. Следовательно, функция убывает на промежутках $x < 1$, $1 < x < 3$, $x > 3$.

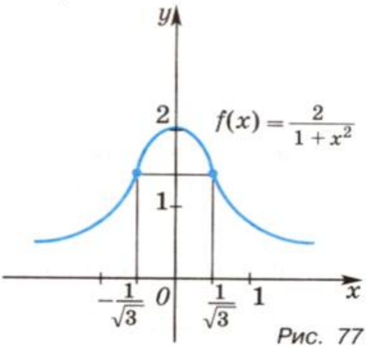


Рис. 77

Найдём вторую производную:

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-3)^3}.$$

Решим неравенство $f''(x)>0$, т. е. неравенство

$$\frac{1}{(x-1)^3}>-\frac{1}{(x-3)^3}.$$

Извлекая корень кубический, получаем равносильное неравенство $\frac{1}{x-1}>-\frac{1}{x-3}$, откуда $\frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)}>0.$

Полученное неравенство верно при $1<x<2$, $x>3$, а неравенство $f''(x)<0$ справедливо при $x<1$, $2<x<3$. Следовательно, данная функция выпукла вверх на промежутках $x<1$, $2<x<3$ и выпукла вниз на промежутках $1<x<2$, $x>3$.

Так как в точках $x=1$ и $x=3$ функция не определена, то $x=2$ — единственная точка перегиба. ◄

Упражнения

303. Найти вторую производную функции:

1) $f(x)=\sin^2 x$;
2) $f(x)=x^3\sin x$;
3) $f(x)=x^4+3x^2-x+1$;
4) $f(x)=x^4-3x^3+5x+6$;
5) $f(x)=e^{\sin x}$;
6) $f(x)=\ln(x^2+1)$.

304. Найти интервалы выпуклости вверх и интервалы выпуклости вниз функции:

1) $f(x)=x^5-10x^2+3x+1$;
2) $f(x)=x^4-6x^2+3x+4$.

305. Найти точки перегиба функции:

1) $f(x)=\cos x$, $-\pi<x<\pi$;
2) $f(x)=x^5-80x^2$;
3) $f(x)=x^3-2x^2+x$;
4) $f(x)=\sin x-\frac{1}{4}\sin 2x$, $-\pi<x<\pi$.

306. Найти интервалы выпуклости вверх и интервалы выпуклости вниз функции:

1) $f(x)=(x^2-3x+2)e^x$;
2) $f(x)=x^3-6x\ln x$.

307. Найти точки перегиба функции:

1) $f(x)=12x^3-24x^2+x+5$;
2) $f(x)=x^4-12x^3+48x^2+3$;
3) $f(x)=x^3e^{-4x}$;
4) $f(x)=x^2\ln x$.

§ 5. Построение графиков функций

1. Асимптоты

В главе II (§ 2) было введено понятие асимптоты (вертикальной и горизонтальной). Рассмотрим понятие наклонной асимптоты.

Назовём прямую $y=kx+b$ *асимптотой* (невертикальной асимптотой) графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, если разность ординат графиков функции $f(x)$ и прямой стремится к нулю при $x\to+\infty$, т. е.

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0. \qquad (1)$$

Если $k \neq 0$, то асимптоту называют *наклонной*, а если $k = 0$, то асимптоту $y = b$ называют *горизонтальной*.

Теорема

Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b. \qquad (3)$$

○ 1) Пусть прямая $y = kx + b$ — асимптота графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. Тогда выполняется условие (1) или равносильное ему условие

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),\ \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty. \qquad (4)$$

Разделив обе части равенства (4) на x, получим

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x},$$

откуда следует, что существует предел (2). Из равенства (4) получаем

$$f(x) - kx = b + \alpha(x),\ \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to +\infty,$$

откуда следует, что существует предел (3).

2) Пусть существуют пределы (2) и (3), тогда

$$f(x) - (kx + b) = \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, т. е. выполняется условие (4) и равносильное ему условие (1).

Это означает, что прямая $y = kx + b$ — асимптота графика функции $y = f(x)$. ●

Аналогично вводится понятие асимптоты при $x \to -\infty$. В этом случае должно выполняться условие

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0. \qquad (5)$$

Задача 1. Найти асимптоту графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, если:

1) $f(x) = \frac{3 - 2x}{x + 1}$; 2) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$;

3) $f(x) = \frac{x^3}{(x + 1)^2}$; 4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

▷ 1) Так как $f(x) = \frac{5 - 2(x + 1)}{x + 1} = -2 + \frac{5}{x + 1}$, где $\frac{5}{x + 1} \to 0$ при $x \to \infty$, то прямая $y = -2$ — горизонтальная асимптота графика функции $y = \frac{3 - 2x}{x + 1}$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

2) Из равенства $\frac{x^3}{x^2+1}=\frac{x^3+x-x}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$, где $\frac{x}{x^2+1}=$ $=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}\to 0$ при $x\to\infty$, следует, что прямая $y=x$ — асимптота графика функции $y=\frac{x^3}{x^2+1}$ при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

3) Для нахождения уравнения асимптоты вычислим пределы (2) и (3):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=1,$$ т. е. $k=1$. Далее,

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x+1)^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x+1)^2}{(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2-x}{(x+1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2-\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=-2,$$ т. е. $b=-2$.

Таким образом, прямая $y=x-2$ — асимптота графика функции $y=\frac{x^3}{(x+1)^2}$ при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Заметим, что уравнение этой же асимптоты можно получить, разделив x^3 на $(x+1)^2$ по правилам деления многочленов. При этом можно воспользоваться равенством

$$x^3=(x+1-1)^3=(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1.$$

Тогда получим

$$\frac{x^3}{(x+1)^2}=x+1-3+\frac{3x+2}{(x+1)^2}=x-2+\frac{3x+2}{(x+1)^2}, \qquad (6)$$

откуда следует, что прямая $y=x-2$ — асимптота графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

4) Найдём асимптоту графика этой функции при $x\to+\infty$. Пусть $x>0$, тогда $\sqrt{x^2}=x$, и поэтому

$$\frac{f(x)}{x}=\sqrt{\frac{x^2-2x-3}{x^2}}=\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}\to 1 \text{ при } x\to+\infty,$$

т. е. $k=1$ (условие (2)).

Далее, $f(x)-x=\sqrt{x^2-2x-3}-x=\frac{x^2-2x-3-x^2}{\sqrt{x^2-2x-3}+x}=$

$$=-\frac{2x+3}{\sqrt{x^2-2x-3}+x}=-\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}+1}\to -1 \text{ при } x\to+\infty,$$ т. е. $b=-1$.

Следовательно, прямая $y = x - 1$ — асимптота графика функции $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ при $x \to +\infty$.

Аналогично можно показать, что прямая $y = 1 - x$ — асимптота графика этой функции при $x \to -\infty$. ◀

2. Графики функций

Задача 2. Построить график функции

$$y = x^3 - 2x^2 + x.$$

▷ 1) Область определения функции $\boldsymbol{R}$.

2) График функции имеет с осью Ox две общие точки: (0; 0) и (1; 0).

3) Так как $y' = 3x^2 - 4x + 1 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$, то уравнение $y' = 0$ имеет корни $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

Производная положительна на промежутках $x < \frac{1}{3}$ и $x > 1$, следовательно, на этих промежутках функция возрастает.

При $\frac{1}{3} < x < 1$ производная отрицательна, следовательно, на этом интервале функция убывает. Точка $x_1 = \frac{1}{3}$ является точкой максимума, так как слева от этой точки функция возрастает, а справа убывает. Значение функции в этой точке равно $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

Точка $x_2 = 1$ является точкой минимума, так как слева от этой точки функция убывает, а справа возрастает; её значение в точке минимума равно $f(1) = 0$.

Результаты представим в таблице.

x	$x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗

Символ «↗» означает, что функция возрастает, а символ «↘» означает, что функция убывает.

Для более точного построения графика найдём значения функции ещё в двух точках $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8}$, $f(2) = 2$.

Используя результаты исследования, строим график функции $y = x^3 - 2x^2 + x$ (рис. 78). ◀

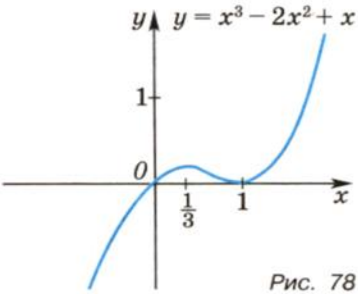


Рис. 78

При построении графика функции $y=f(x)$ можно придерживаться следующего плана:

1) найти область определения функции; выяснить, является ли функция чётной (нечётной), периодической;

2) найти точки пересечения графика с осями координат и промежутки, на которых $f(x)>0$ и $f(x)<0$;

3) найти асимптоты графика функции;

4) вычислить $f'(x)$, найти промежутки возрастания (убывания) функции и её экстремумы;

5) вычислить $f''(x)$, определить направления выпуклости и найти точки перегиба;

6) изобразить график функции.

Задача 3. Построить график функции $y=x^3-4x^2+4x$.

▷ 1) Область определения функции $\boldsymbol{R}$.

2) График функции $y=x^3-4x^2+4x=x(x-2)^2$ имеет с осью Ox две общие точки (0; 0) и (2; 0).

3) График не имеет асимптот.

4) Так как $y'=3x^2-8x+4=(x-2)(3x-2)$, то уравнение $y'=0$ имеет корни $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=2$. Производная положительна, и функция возрастает на промежутках $x<\frac{2}{3}$ и $x>2$. Если $\frac{2}{3}<x<2$, то $y'<0$, и функция убывает на интервале $\left(\frac{2}{3};\,2\right)$.

Стационарные точки $x_1=\frac{2}{3}$ и $x_2=2$ — точки экстремума функции. При этом x_1 — точка максимума, так как при переходе через точку $x_1=\frac{2}{3}$ производная y меняет знак с «+» на «−»; x_2 — точка минимума, так как при переходе через точку $x_2=2$ производная меняет знак с «−» на «+»; $y\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{27}$, $y(2)=0$.

5) Находим $y''=6x-8=6\left(x-\frac{4}{3}\right)$. Если $x<\frac{4}{3}$, то $y''<0$, и поэтому функция выпукла вверх на интервале $x<\frac{4}{3}$; если $x>\frac{4}{3}$, то $y''>0$, и поэтому функция выпукла вниз при $x>\frac{4}{3}$. Следовательно, $x=\frac{4}{3}$ — точка перегиба функции, причём $y\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{27}$.

Результаты исследования представим с помощью таблицы.

x	$x<\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}<x<\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}<x<2$	2	$x>2$
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	$\nearrow\frown$	$\frac{16}{27}$ max	$\frown\searrow$	$\frac{16}{27}$ перегиб	$\smile\searrow$	0 min	$\smile\nearrow$

Символ «$\frown$» означает, что функция выпукла вверх, а символ «$\smile$» означает, что функция выпукла вниз.

6) Отметим ещё, что $f(x) < 0$ при $x < 0$ и $f(x) > 0$ при $x > 0$, $x \neq 2$. Используя результаты исследования, строим график функции $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ (рис. 79). ◀

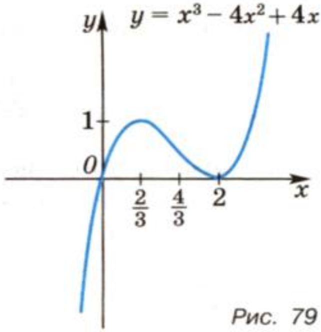


Рис. 79

Задача 4. Построить график функции $y = x + \dfrac{4}{x}$.

▷ 1) Область определения $x \neq 0$. Данная функция нечётная, так как $f(-x) = -x + \dfrac{4}{-x} = -\left(x + \dfrac{4}{x}\right) = -f(x)$.

2) График не пересекает координатные оси.

3) Исследуем эту функцию и построим её график при $x > 0$. Прямая $y = x$ — асимптота графика функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. При $x > 0$ график лежит выше асимптоты $\left(\text{так как } \dfrac{4}{x} > 0\right)$, а при $x < 0$ — ниже асимптоты.

4) $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2}$.

На промежутке $x > 0$ функция имеет одну стационарную точку $x = 2$.

Производная положительна на промежутке $x > 2$, следовательно, на этом промежутке функция возрастает. На интервале $0 < x < 2$ производная отрицательна, следовательно, на этом интервале функция убывает.

Точка $x = 2$ является точкой минимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «$-$» на «$+$»; $f(2) = 4$.

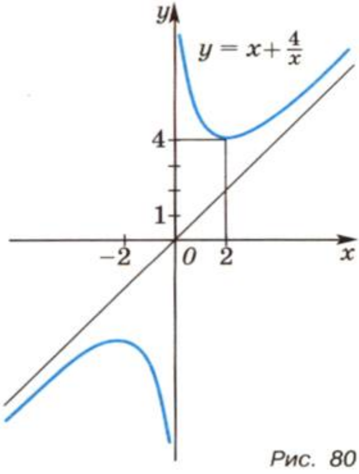


Рис. 80

Составим таблицу:

x	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\smile \searrow$	4 min	$\smile \nearrow$

5) Так как $y'' = \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)' = \frac{8}{x^3}$, то при $x < 0$ функция выпукла вверх, а при $x > 0$ выпукла вниз.

6) График функции $y = x + \frac{4}{x}$ изображён на рисунке 80. ◀

Задача 5. Построить график функции $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$.

▷ 1) Функция определена при $x \neq -1$.

2) Функция принимает положительные значения при $x > 0$ и отрицательные при $x < 0$.

3) Прямая $x = -1$ — вертикальная асимптота графика функции, причём $y \to -\infty$ при $x \to -1 + 0$ и $x \to -1 - 0$.

Прямая $y = x - 2$ — наклонная асимптота графика функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ (задача **1** (3)). При этом из равенства (6) следует, что при $x > -\frac{2}{3}$ график лежит выше асимптоты, а при $x < -\frac{2}{3}$ — ниже асимптоты.

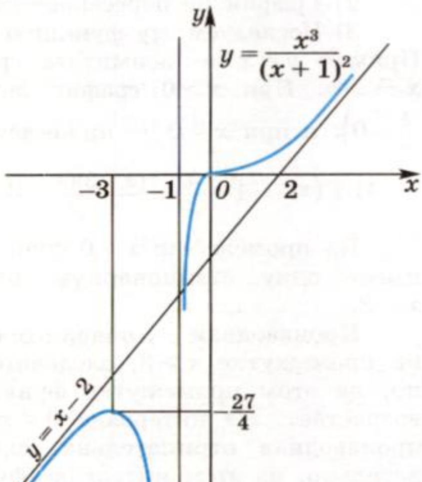


Рис. 81

4) Находим производную:

$$y' = \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{x^2}{(x+1)^3}(3(x+1) - 2x) =$$

$$= \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},$$

$$y' = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}. \qquad (7)$$

Из формулы (7) следует, что $y' > 0$ при $x < -3$ и $x > -1$, а если $-3 < x < -1$, то $y' < 0$.

Следовательно, функция возрастает на промежутках $x < -3$ и $x > -1$ и убывает на интервале $(-3; -1)$.

Согласно формуле (7) функция имеет две стационарные точки $x = 0$ и $x = -3$. Точка $x = 0$ не является точкой экстремума, так как y' не меняет знак при переходе через эту точку, а $x = -3$ — точка максимума функции $y(x)$, так как y' меняет знак с «+» на «−» при переходе через точку $x = -3$, причём $y(-3) = -\frac{27}{4}$.

5) Найдём y'', используя формулу (7), которую запишем в виде $y' = \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)^3}$. Тогда $y'' = \frac{(3x^2 + 6x)(x+1)^3 - x^2(x+3) \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} =$

$$= \frac{3x((x+2)(x+1) - x(x+3))}{(x+1)^4} = \frac{6x}{(x+1)^4},$$

$$y'' = \frac{6x}{(x+1)^4}. \qquad (8)$$

Из формулы (8) следует, что $y'' < 0$ при $x < 0$ и $x \neq -1$, $y'' > 0$ при $x > 0$. Поэтому функция $y(x)$ выпукла вверх на интервалах $x < -1$ и $-1 < x < 0$ и выпукла вниз на интервале $x > 0$. Точка $x = 0$ является точкой перегиба функции, причём $y'(0) = 0$, и поэтому касательной к графику функции в точке (0; 0) является прямая $y = 0$.

6) График функции изображён на рисунке 81.

Упражнения

Построить график функции **(308–309)**.

308. 1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$; 2) $y = 2 + 3x - x^3$;
3) $y = -x^3 + 4x^2 - 4x$; 4) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$.

309. 1) $y = x^4 - 2x^2 + 2$; 2) $y = \frac{1}{9}x^3\ (x+4)$;
3) $y = \frac{1}{5}x^3\ (8 - 3x)$; 4) $y = 6x^4 - 4x^6$.

310. Найти асимптоты графика функции:
1) $f(x) = \frac{x+1}{x}$; 2) $f(x) = \frac{x^2}{x+4}$;
3) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x+2}$; 4) $f(x) = \frac{x^3}{(x+3)^2}$.

311. Найти асимптоты графика функции:
1) $f(x) = \frac{(x+3)^3}{(x-1)^2}$; 2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3}$.

Построить график функции **(312—317)**.

312. 1) $y = 2 + 5x^3 - 3x^5$; 2) $y = 3x^5 - 5x^3$;
3) $y = 4x^5 - 5x^4$; 4) $y = (x-1)^3(x+1)^2$.

313. 1) $y = 3x + \frac{1}{3x}$; 2) $y = x - \frac{9}{x}$; 3) $y = \frac{4}{x} - x$; 4) $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

314. 1) $y = -x^3 + 4x^2 - 3$; 2) $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

315. 1) $y = \frac{x^2}{x-2}$; 2) $y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{x}$;
3) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$; 4) $y = \frac{4 + x - 2x^2}{(x-2)^2}$;
5) $y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$; 6) $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

316. 1) $y = (x+3)\sqrt{x}$; 2) $y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$; 3) $y = x^2 \ln x$; 4) $y = \frac{x^2}{(x+2)^3}$.

317. 1) $y = x^3 - x^2 - x + 1$; 2) $y = x^3 - x^2 + x - 1$.

318. Сколько действительных корней имеет уравнение
$$1 - 2x + 2x^3 - x^5 = 0?$$

Упражнения к главе III

319. Найти интервалы возрастания и убывания функции:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 2$; 2) $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 5$;

3) $y = \frac{3}{x} - 1$; 4) $y = \frac{2}{x-3}$.

320. Найти стационарные точки функции:

1) $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1$; 2) $y = 4x^4 - 2x^2 + 3$;

3) $y = \frac{x}{3} + \frac{12}{x}$; 4) $y = \cos 2x + 2\cos x$.

321. Найти точки экстремума функции:

1) $y = x^3 - 4x^2$; 2) $y = 3x^4 - 4x^3$.

322. Найти точки экстремума и значения функции в этих точках:

1) $y = x^5 - 2{,}5x^2 + 3$; 2) $y = 0{,}2x^5 - 4x^2 - 3$.

323. Построить график функции:

1) $y = -x^4 + 8x^2 - 16$; 2) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6$;

3) $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2$; 4) $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$.

324. Построить график функции:

1) $y = 3x^2 - 6x + 5$ на отрезке $[0;\ 3]$;

2) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

325. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ на отрезке $[-2;\ 2]$;
2) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ на отрезке $[-4;\ 0]$;
3) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-4;\ 3]$;
4) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ на отрезке $[-3;\ 2]$.

326. Доказать, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.

327. Из всех равнобедренных треугольников с периметром p найти треугольник с наибольшей площадью.

---

328. Из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых в основании лежит квадрат и площадь полной поверхности равна 600 см^2, найти параллелепипед наибольшего объёма.

329. Найти асимптоты графика функции:

1) $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2}$; 2) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}$.

330. Доказать, что функция $y = 1{,}8x^5 - 2\frac{1}{3}x^3 + 7x + 12{,}5$ возрастает на всей области определения.

331. Доказать, что функция $y = x\left(1 + 2\sqrt{x}\right)$ возрастает на всей области определения.

332. Найти точки экстремума функции:

1) $y = x\ln x$; 2) $y = xe^x$;

3) $y = \frac{4}{x-3} - \frac{16}{x-7}$; 4) $y = \frac{25}{7-x} - \frac{9}{3-x}$.

333. Построить график функции:

1) $y = \frac{2}{x^2-4}$; 2) $y = \frac{2}{x^2+4}$;

3) $y = (x-1)^2(x+2)$; 4) $y = x(x-1)^3$.

334. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$;

2) $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$ на отрезке $[0; \pi]$;

3) $f(x) = 3\sin x + 4\cos 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

4) $f(x) = \sin x + 2\sqrt{2}\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

335. Найти наибольшее значение функции:

1) $x\sqrt[3]{5-3x^2}$ на интервале $\left(0; \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$;

2) $x\sqrt{1-x^2}$ на интервале $(0; 1)$.

336. Тело движется по закону $s(t) = 6t^2 - t^3$. Какова наибольшая скорость тела?

337. Из всех прямоугольных треугольников, у которых сумма одного катета и гипотенузы равна l, найти треугольник с наибольшей площадью.

338. Найти точку касания графика функции и данной прямой, если:

1) $y = 3x^2 + 2x - 5$, $y = 2x - 5$;
2) $y = 3x^2 - 2x + 5$, $y = 10x - 7$;
3) $y = x^3 - 5x + 8$, $y = 7x + 24$;
4) $y = x^3 - 5x^2 - 3x + 11$, $y = 10x + 18$.

339. При каком значении a график функции $y = x^2 + a$ касается прямой $y = -4x + 5$?

340. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, сверху завершённого полукругом. Определить радиус полукруга, при котором площадь сечения будет наибольшей, если периметр сечения равен p.

341. Равнобедренный треугольник описан около квадрата со стороной a так, что одна сторона квадрата лежит на основании треугольника (рис. 82).

Рис. 82

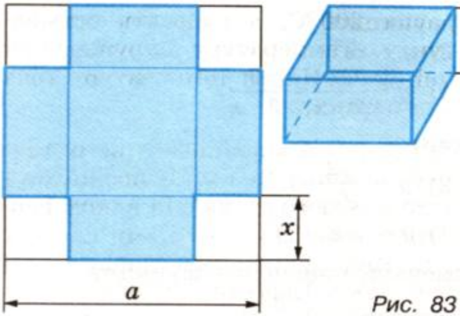


Рис. 83

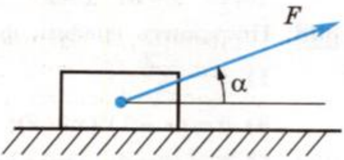


Рис. 84

Обозначая $BK = x$, найти такое значение x, при котором площадь треугольника наименьшая.

342. Из квадратного листа картона со стороной a (рис. 83) надо сделать открытую сверху коробку прямоугольной формы, вырезав по углам квадраты и загнув образовавшиеся края. Какой должна быть высота коробки, чтобы её объём был наибольшим?

343. Найти наибольший объём цилиндра, площадь полной поверхности которого равна S.

344. Найти наибольшую площадь полной поверхности цилиндра, вписанного в сферу радиуса R.

345. Найти точки экстремума функции $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$.

346. Построить график функции:

1) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$; 2) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$;

3) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$; 4) $f(x) = x^3 \cdot e^{-x}$;

5) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$; 6) $f(x) = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$.

347. Груз, лежащий на горизонтальной плоскости, нужно сдвинуть с места силой, приложенной к этому грузу (рис. 84). Определить угол, образуемый этой силой с плоскостью, при котором сила будет наименьшей, если коэффициент трения груза k.

348. Ещё И. Ньютон обнаружил, что скорость охлаждения тела примерно пропорциональна разнице температур между нагретым телом и окружающей средой. Если температура окружающей среды T_s не меняется, то температура помещённого в эту среду тела T в зависимости от времени t меняется по закону $T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$, где T_0 — начальная температура тела, k — коэффициент, характеризующий свойства теплопроводности, геометрию и другие свойства тела. Допустим, что в начальный момент времени $t = 0$

температура тела была равна 200 °C, а скорость остывания — 3 градуса за секунду. Температуру окружающей среды поддерживали равной 20 °C. Найти температуру тела через 2 мин после начала остывания.

349. Полевой стан расположен в 9 км от ближайшей к нему точки шоссе. От этой точки до посёлка 15 км. Велосипедист должен из посёлка доехать до полевого стана. На каком расстоянии от посёлка после движения по шоссе ему следует свернуть в поле и ехать по прямой до полевого стана, чтобы время в пути было наименьшим? Известно, что скорость велосипедиста по шоссе 10 км/ч, а по полю — 8 км/ч.

350. Прочность балки на изгиб пропорциональна ширине и квадрату высоты балки. Для изготовления из цилиндрического бревна балки прямоугольного сечения максимальной прочности торец бревна размечают так, как показано на рисунке 85: диаметр AC делят точками M и N на три равные части, $MB \perp AC$ и $ND \perp AC$. Верна ли такая разметка для изготовления максимально прочной балки?

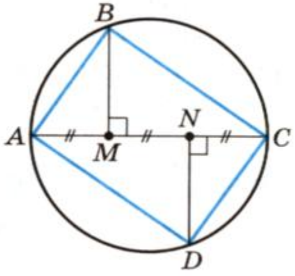


Рис. 85

351. Два автомобиля едут с одинаковыми скоростями v по пересекающимся под прямым углом дорогами. Каким будет наименьшее расстояние между автомобилями, если в начале движения они находились на расстояниях a и b соответственно от места пересечения дорог?

Вопросы к главе III

1. Какая функция называется возрастающей (убывающей)?
2. Сформулировать достаточное условие возрастания (убывания) функции.
3. Сформулировать определение точки максимума (минимума) функции.
4. Сформулировать теорему Ферма.
5. Сформулировать необходимое условие экстремума дифференцируемой функции.
6. Дать определение стационарной точке функции.
7. Дать определение критической точке функции.
8. Сформулировать достаточные условия экстремума.
9. Каков алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на заданном отрезке?

10. Сформулировать теорему Лагранжа.

11. Доказать достаточное условие возрастания (убывания) функции.

12. Доказать достаточные условия экстремума.

13. Дать определение производной второго порядка.

14. Сформулировать определение выпуклости вверх (вниз) функции.

15. Дать определение точке перегиба функции.

16. Как с помощью второй производной выяснить, является ли функция выпуклой вверх (вниз) на интервале; имеет ли точку перегиба?

17. Пояснить геометрический смысл теоремы Лагранжа.

18. При каком условии прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$?

Проверь себя!

1. Найти промежутки монотонности функции:

1) $y = 2x^2 - 5x$; 2) $y = -\sqrt{x+4}$.

2. Найти точки экстремума функции $y = x^4 - 4x^3 + 20$ и значения функции в этих точках.

3. Построить график функции $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x + \frac{9}{x} \text{ на отрезке } [1;\ 4].$$

5. Отливка объёмом 72 дм^3 имеет форму прямоугольного параллелепипеда с отношением сторон основания 1 : 2. При каких размерах отливки площадь её полной поверхности будет наименьшей?

---

1. При каких значениях a функция $y = x^3 + 3ax$ возрастает на всей числовой прямой?

2. Построить график функции

$$y = x + \frac{4}{x}.$$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} \text{ на отрезке } [-1;\ 3].$$

4. Найти высоту конуса наименьшего объёма, описанного около сферы радиуса R.

Историческая справка

Как и многие разделы математики, раздел о дифференциальном исчислении возник из необходимости решения практических задач. В основном источником дифференциального исчисления явились задачи двух видов: а) на нахождение наибольших и наименьших значений величин, т. е. задачи на нахождение экстремумов (от лат. extremum — крайнее); б) на вычисление скоростей. В древности и в Средние века задачи этих видов решались геометрическими и механическими методами и не были связаны общими идеями.

Задачи на нахождение максимума и минимума можно найти ещё в «Началах» Евклида. Так, в VI книге «Начал» доказывается, что из всех параллелограммов, вписанных в данный треугольник, наибольшую площадь имеют те, основание которых равно половине основания треугольника.

В 1615 г. в опубликованной работе «Стереометрия винных бочек» немецкий учёный И. Кеплер (1571—1630) высказал идею о том, что вблизи максимума величины её изменения незаметны, предугадав тот факт, что в точке максимума производная функции равна нулю. Известно, что в 1629 г. французский математик П. Ферма уже владел методом определения максимумов и минимумов. Но только в середине XVII в. И. Ньютон и Г. Лейбниц исследовали проблему максимумов и минимумов функций с позиций идеи бесконечно малой величины. Так, Лейбницем была сформулирована теорема о достаточном условии возрастания и убывания функции на отрезке. Огромный вклад в развитие дифференциального исчисления при решении прикладных задач внесли швейцарские математики Я. Бернулли и И. Бернулли. Голландский учёный Х. Гюйгенс (1629—1695) после решения задачи о форме подвешенной за концы массивной цепи написал известному французскому математику Г. Лопиталю (1661—1704) о широте применимости методов дифференциального исчисления: «Я вижу с удивлением и восхищением обширность и плодовитость нового метода. Куда бы я ни обратил взор, я замечаю для него новые приложения, я предвижу его бесконечное развитие и прогресс».

В 1755 г. Л. Эйлер в своей работе «Дифференциальное исчисление» развил понятия «абсолютных экстремумов» и «относительных экстремумов», называемых им экстремумами «местного характера». В этой работе он подчеркивал, что значение функции в точке максимума, вообще говоря, не совпадает с её наибольшим значением. Для исследования функций Эйлер пользовался не только первой и второй производными, но и производными более высоких порядков.

Отметим, что теория экстремумов функций и сегодня находит многочисленные практические применения в решении задач производства и экономики, связанных с оптимальным использованием сырья и времени.

Глава IV

Первообразная и интеграл

Одно можно сказать наверняка:
завтра математика станет
ещё могущественней и нужнее людям,
чем сегодня.

И. Я. Депман

В курсе математики вы знакомились с рядом взаимно обратных действий (сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня), со взаимно обратными функциями (например, $y = a^x$ и $y = \log_a x$). Для действия нахождения производной также существует обратное действие — нахождение первообразной, т. е. функции, производная которой даёт исходную функцию («первый образ»). Например, для функции $f(x) = x$ одной из первообразных является функция $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, так как $F'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Задачи нахождения первообразных встречаются на практике не реже, чем задачи нахождения производных. Например, сила тока I находится как производная по времени от заряда q: $I(t) = q'(t)$. Возникает и обратная задача — нахождение закона изменения заряда по силе тока, т. е. заряд — это первообразная для силы тока $I(t)$.

В химии скорость реакции V — это производная концентрации C реагирующих веществ в зависимости от времени, т. е. $V(t) = C'(t)$. Значит, концентрация — первообразная для скорости реакции.

Понятие первообразной тесно связано с понятием интеграла (с которым вы познакомитесь в этой главе).

Представления о первообразной и интеграле возникли из потребностей практики в вычислении площадей различных фигур и объёмов тел. Эти представления появились значительно раньше, чем представления о производной и дифференциальном исчислении.

Интегральное исчисление — одно из величайших математических открытий, которое было сделано ещё Архимедом. Он смог найти площадь параболического сегмента, объём шара (и другие площади и объёмы) с помощью метода исчерпывания, в котором важную роль играет идея равновесия. Архимед сам говорил, что решал эти математические задачи средствами механики. Вычисляя объёмы тел, Архимед переходил от объёмов поперечных сечений к объёму всего тела, что на современном языке означает — от бесконечно малой части к целой величине (к интегралу).

В этой главе вы познакомитесь с правилами нахождения первообразных, научитесь вычислять площадь практически любой фигуры, узнаете применение на практике и в смежных дисциплинах знаменитой формулы Ньютона—Лейбница.

§ 1. Первообразная

В главе II была рассмотрена задача о нахождении мгновенной скорости точки по заданному закону движения. Пусть закон движения точки задан функцией $s = s(t)$, где $s(t)$ — координата движущейся точки в момент времени t. Тогда мгновенная скорость движения тела в момент времени t равна $v = s'(t)$. В этой задаче по заданной функции $s(t)$ вычисляется её производная.

Например, если $s = \frac{gt^2}{2}$, то $v = s'(t) = gt$.

В физике встречается обратная задача: по заданной скорости $v = v(t)$ найти закон движения, т. е. найти $s = s(t)$. Так как $s'(t) = v = v(t)$, то в этой задаче требуется найти такую функцию $s(t)$, производная которой равна $v(t)$. В этом случае функцию $s(t)$ называют первообразной для функции $v(t)$.

Определение

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором интервале, если для всех x из этого интервала выполняется равенство

$$F'(x) = f(x). \qquad (1)$$

Замечание 1. Если функция $F(x)$ дифференцируема на интервале $(a;\ b)$, непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и для всех $x \in (a;\ b)$ выполняется равенство (1), то функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.

Например, функция x^3 является первообразной для функции $3x^2$ на всей числовой прямой, так как для любого $x \in \boldsymbol{R}$ имеем $(x^3)' = 3x^2$; функция $\sin x$ — первообразная для функции $\cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$.

Замечание 2. Если при нахождении первообразной функции $f(x)$ не указывается промежуток, на котором она задана, то считается, что первообразная находится на всей области определения функции $f(x)$.

Задача 1. Показать, что функция

$$F(x) = \frac{1}{3}\sin 3x$$

является первообразной для функции $f(x) = 3\cos 3x$.

▷ Так как $F'(x) = \left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)' = \frac{1}{3}\cdot 3\cos 3x = \cos 3x$, то $\frac{1}{3}\sin 3x$ — первообразная для функции $\cos 3x$. ◀

Задача 2. Доказать, что для любого действительного $p \neq -1$ функция $F(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ является первообразной для функции $f(x) = x^p$ на промежутке $x > 0$.

▷ Так как $(x^{p+1})' = (p+1)x^p$, то $\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}\right)' = \frac{(x^{p+1})'}{p+1} = x^p$. ◀

В частности, при $p = 0,\ 3,\ -2,\ \frac{1}{2}$ получаем:

1) $F(x) = x$ — первообразная для функции $f(x) = 1$ при $x \in \boldsymbol{R}$;

2) $F(x) = \frac{x^4}{4}$ — первообразная для функции $f(x) = x^3$ при $x \in \boldsymbol{R}$;

3) $F(x) = -\frac{1}{x}$ — первообразная для функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$ на промежутках $x < 0$ и $x > 0$;

4) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ — первообразная для функции $f(x) = \sqrt{x}$ при $x \geqslant 0$.

Заметим, что для функции $f(x) = x^3$ функции $\frac{x^4}{4} + 2$, $\frac{x^4}{4} - 3$ также являются первообразными, так как

$$\left(\frac{x^4}{4} + 2\right)' = x^3,\ \left(\frac{x^4}{4} - 3\right)' = x^3.$$

Вообще любая функция $\frac{x^4}{4} + C$, где C — постоянная, является первообразной для функции x^3. Это следует из того, что производная постоянной равна нулю.

Этот пример показывает, что для заданной функции её первообразная определяется неоднозначно.

Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на некотором промежутке, то и функция $F(x) + C$, где C — любая постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$ на этом промежутке.

Оказывается, что функциями вида $F(x) + C$ исчерпываются все первообразные для заданной функции $f(x)$.

В главе III (§ 1, задача 4) было доказано, что если $F'(x) = 0$ на интервале $(a;\ b)$ и функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то $F(x) = C$ на отрезке $[a;\ b]$. Используя это утверждение, докажем теорему.

Теорема

> **Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две первообразные для одной и той же функции $f(x)$. Тогда $F_2(x) = F_1(x) + C$, где C — некоторая постоянная.**

○ Обозначим $F(x) = F_2(x) - F_1(x)$. Тогда $F'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$, откуда $F(x) = C$, т. е. $F_2(x) - F_1(x) = C$, откуда $F_2(x) = F_1(x) + C$. ●

Итак, если $F(x)$ — некоторая первообразная для $f(x)$, то все первообразные для функции $f(x)$ находятся по формуле $F(x) + C$, где C — любая постоянная.

Задача 3. Найти все первообразные для функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

▷ Из задачи **2** при $p = -\frac{1}{2}$ следует, что $2\sqrt{x}$ — первообразная для функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x > 0$. Ответ. $2\sqrt{x} + C$. ◀

Приведём таблицу первообразных для некоторых функций.

Функция	Первообразные
x^p, $p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\frac{1}{x}$, $x > 0$, $x < 0$	$\ln \lvert x \rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$

Эта таблица проверяется дифференцированием первообразных. Например, так как $(\ln \lvert x \rvert + C)' = \frac{1}{x}$ (гл. II, § 7), то $\ln\lvert x \rvert + C$ — первообразная для функции $\frac{1}{x}$ при $x > 0$ и при $x < 0$.

Рассмотрим графики всех первообразных заданной функции $f(x)$. Если $F(x)$ — одна из первообразных $f(x)$, то все первообразные получаются прибавлением к $F(x)$ любой постоянной: $F(x) + C$. Следовательно, графики функций $y = F(x) + C$ получаются из графика $y = F(x)$ сдвигом вдоль оси Oy (рис. 86). Выбором постоянной C можно добиться того, чтобы график первообразной проходил через заданную точку.

Рис. 86

Задача 4. Для функции $\frac{1}{x^2}$ найти такую первообразную на промежутке $x > 0$, график которой проходит через точку (1; 3).

▷ Все первообразные для функции $\frac{1}{x^2}$ находятся по формуле $F(x) = -\frac{1}{x} + C$. Найдём такое значение C, чтобы график функции $y = F(x)$ проходил через точку (1; 3), т. е. воспользуемся условием $F(1) = 3$. Отсюда $-1 + C = 3$, $C = 4$. Следовательно, $F(x) = 4 - \frac{1}{x}$. ◀

Упражнения

352. Показать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на всей числовой прямой:

1) $F(x) = x^4$, $f(x) = 4x^3$; 2) $F(x) = 1 - e^{-x}$, $f(x) = e^{-x}$;

3) $F(x) = \frac{x^5}{5} + 1$, $f(x) = x^4$; 4) $F(x) = 3e^{\frac{x}{3}}$, $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$;

5) $F(x) = 2 + \sin 4x$, $f(x) = 4\cos 4x$;

6) $F(x) = \cos 3x - 5$, $f(x) = -3\sin 3x$.

353. Показать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ при $x > 0$:

1) $F(x) = \frac{3}{x}$, $f(x) = -\frac{3}{x^2}$; 2) $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 4$, $f(x) = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$;

3) $F(x) = 2 - x^{\frac{3}{2}}$, $f(x) = -\frac{3}{2}\sqrt{x}$; 4) $F(x) = \sqrt{2x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

354. Найти все первообразные для функции:

1) x^6; 2) x^5; 3) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $\sqrt[4]{x}$; 5) $x^{\frac{2}{3}}$; 6) $x^{-\frac{3}{4}}$.

355. Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:

1) $f(x) = x^2$, $M(1;\ 2)$; 2) $f(x) = x$, $M(-1;\ 3)$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $M(1;\ -1)$; 4) $f(x) = \sqrt{x}$, $M(9;\ 10)$.

§ 2. Правила нахождения первообразных

Из главы II известно, что операцию нахождения производной для заданной функции называют дифференцированием. Обратную операцию нахождения первообразной для данной функции называют *интегрированием*.

Правила интегрирования можно получить с помощью правил дифференцирования. Напомним правила дифференцирования.

Пусть функции $F(x)$ и $G(x)$ имеют производные на некотором промежутке; a, b, k — постоянные. Тогда:

1) $(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x)$;

2) $(aF(x))' = aF'(x)$;

3) $(F(kx+b))' = kF'(kx+b)$.

Из этих правил дифференцирования следуют правила нахождения первообразных.

Пусть $F(x)$, $G(x)$ — первообразные соответственно для функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке, т. е. $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$, a, b, k — постоянные, $k \neq 0$. Тогда:

1) $F(x)+G(x)$ — первообразная для функции $f(x)+g(x)$;

2) $aF(x)$ — первообразная для функции $af(x)$;

3) $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для функции $f(kx+b)$.

Приведём примеры применения этих правил.

Задача. Найти первообразные $F(x)$ для функции $f(x)$:

1) $f(x)=2e^x+\sin x$;

2) $f(x)=x^5-3\cos 2x$;

3) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+e^{2x}$.

▷ 1) Так как e^x — первообразная для e^x, а $-\cos x$ — первообразная для $\sin x$, то $2e^x-\cos x$ — одна из первообразных для функции $2e^x+\sin x$.

2) Первообразная для x^5 равна $\frac{x^6}{6}$, первообразная для $\cos 2x$ равна $\frac{1}{2}\sin 2x$, следовательно, одна из первообразных для $x^5-3\cos 2x$ равна $\frac{x^6}{6}-\frac{3}{2}\sin 2x$.

3) Обозначим

$$f_1(x)=\frac{1}{(x+1)^2},\ f_2(x)=e^{2x}.$$

Тогда $F_1(x) = -\frac{1}{x+1}$, $F_2(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$ — первообразные соответственно для $f_1(x)$ и $f_2(x)$,

$$F(x)=F_1(x)+F_2(x)+C=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}e^{2x}+C \text{ —}$$

все первообразные для функции $f(x)$.

Ответ. 1) $F(x)=2e^x-\cos x+C$;

2) $F(x)=\frac{x^6}{6}-\frac{3}{2}\sin 2x+C$;

3) $F(x)=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}e^{2x}+C$. ◀

Третье правило нахождения первообразных позволяет дополнить таблицу первообразных, приведённую в предыдущем параграфе.

Функция	Первообразные
$(kx+b)^p,\ p\neq -1,\ k\neq 0$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)}+C$
$\frac{1}{kx+b},\ k\neq 0$	$\frac{1}{k}\ln\lvert kx+b\rvert+C$
$e^{kx+b},\ k\neq 0$	$\frac{1}{k}e^{kx+b}+C$
$\sin(kx+b),\ k\neq 0$	$-\frac{1}{k}\cos(kx+b)+C$
$\cos(kx+b),\ k\neq 0$	$\frac{1}{k}\sin(kx+b)+C$

Упражнения

Найти первообразные для функции **(356—363)**.

356. 1) $2x^5-3x^2$; 2) $5x^4+2x^3$; 3) $3x^3+2x-1$;
4) $6x^2-4x+3$; 5) $\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}$; 6) $4\sqrt[3]{x}-6\sqrt{x}$;
7) $\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}$; 8) $\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x}$.

357. 1) $5\sin x+2\cos x$; 2) $3e^x-\sin x$;
3) $1+3e^x-4\cos x$; 4) $\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x}-2e^x$.

---

358. 1) $(x+1)^3$; 2) $(x-2)^4$; 3) $\frac{2}{\sqrt{x-2}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt[3]{x+3}}$;
5) $\frac{1}{x-1}+4\cos(x+2)$; 6) $\frac{3}{x-3}-2\sin(x-1)$.

359. 1) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^7$; 2) $\left(\frac{1}{3}x+2\right)^5$; 3) $(2x-3)^{\frac{2}{5}}$;
4) $(3x-1)^{\frac{3}{4}}$; 5) $\frac{3}{\sqrt[3]{2x-1}}$; 6) $\frac{4}{\sqrt{4x+1}}$;
7) $\sqrt{3-2x}$; 8) $\sqrt[3]{2-3x}$.

360. 1) $\cos(3x+4)$; 2) $\sin(3x-4)$; 3) $\cos\left(\frac{x}{2}-1\right)$;
4) $\sin\left(\frac{x}{4}+5\right)$; 5) $e^{\frac{x+1}{2}}$; 6) e^{3x-5}.

361. 1) $e^{3x}-\cos 2x$; 2) $e^{\frac{x}{3}}+\sin 3x$;

3) $2\sin\frac{x}{3}-5e^{2x+\frac{1}{5}}$; 4) $3\cos\frac{x}{7}+2e^{3x-\frac{1}{2}}$;

5) $\sqrt[5]{\frac{x}{4}}-5\cos(6x-1)$; 6) $\sqrt{\frac{x}{5}}+4\sin(4x+2)$;

7) $\frac{3}{\sqrt[3]{2x-1}}$; 8) $\frac{4}{\sqrt{3x+1}}-\frac{3}{2x-5}$.

362. 1) $\frac{2x^4-4x^3+x}{3}$; 2) $\frac{6x^3-3x+2}{5}$; 3) $\frac{2x^3-3x}{x^2}$;

4) $\frac{3x^4+5x^2}{x^3}$; 5) $3x(2-x^2)$; 6) $2x(1-x)$;

7) $(1+2x)(x-3)$; 8) $(2x-3)(2+3x)$.

363. 1) $(2x+1)\sqrt{x}$; 2) $(3x-2)\sqrt[3]{x}$; 3) $\frac{x+4}{\sqrt[3]{x}}$; 4) $\frac{x-3}{\sqrt{x}}$.

364. Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M:

1) $f(x)=2x+3$, $M(1;\ 2)$; 2) $f(x)=4x-1$, $M(-1;\ 3)$;

3) $f(x)=\sqrt{x+2}$, $M(2;\ -3)$; 4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3}}$, $M(-2;\ -1)$;

5) $f(x)=\sin 2x$, $M\left(\frac{\pi}{2};\ 5\right)$; 6) $f(x)=\cos 3x$, $M(0;\ 0)$;

7) $f(x)=\frac{1}{x+3}$, $M(-2;\ 4)$; 8) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$, $M(-2;\ 2)$.

§ 3. Площадь криволинейной трапеции. Интеграл и его вычисление

1. Площадь криволинейной трапеции

Рассмотрим фигуру G (рис. 87), ограниченную отрезками прямых $x=a$, $x=b$, $y=0$ и графиком непрерывной функции $y=f(x)$, такой, что $f(x)\geqslant 0$ на отрезке $[a;\ b]$ и $f(x)>0$ при $x\in(a;\ b)$. Такую фигуру называют *криволинейной трапецией*, а отрезок $[a;\ b]$ — её *основанием*.

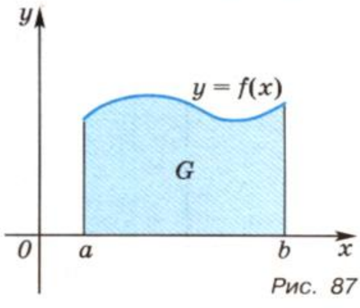


Рис. 87

Поясним, как вводится понятие площади криволинейной трапеции и как можно вычислить эту площадь. Для этого введём понятие определённого интеграла.

Разобьём отрезок $[a;\ b]$ на n (необязательно равных) частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и проведём через эти точки вертикальные прямые до пересечения с графиком функции

$y = f(x)$. При этом криволинейная трапеция разобьётся на n частей, каждая из которых также является криволинейной трапецией (рис. 88). Обозначим $x_0 = a$, $x_n = b$.

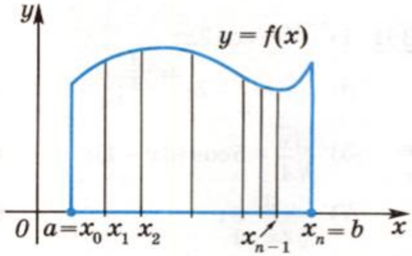


Рис. 88

Рассмотрим криволинейную трапецию с основанием $[x_{k-1}; x_k]$ (рис. 89). Если длина отрезка $[x_{k-1}; x_k]$ мала, то эта трапеция мало отличается от прямоугольника с основанием $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и высотой $f(c_k)$, где c_k — какая-нибудь точка отрезка $[x_{k-1}; x_k]$, а площадь криволинейной трапеции с основанием $[x_{k-1}; x_k]$ приближённо равна площади этого прямоугольника, т. е. приближённо равна $f(c_k)\Delta x_k$.

Вся криволинейная трапеция с основанием $[a; b]$ мало отличается от многоугольника, состоящего из прямоугольников, построенных указанным способом на отрезках $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, $[x_2; x_3]$, ..., $[x_{n-1}; x_n]$ (рис. 90), а площадь криволинейной

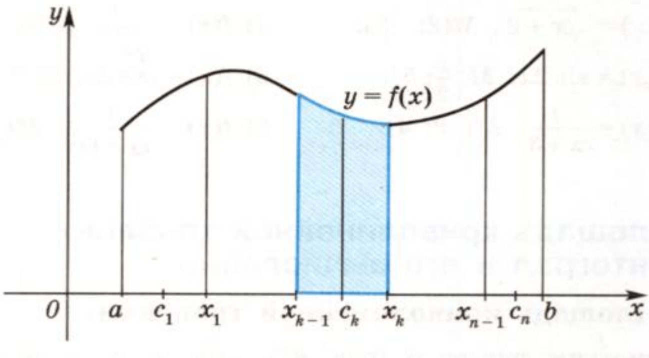


Рис. 89

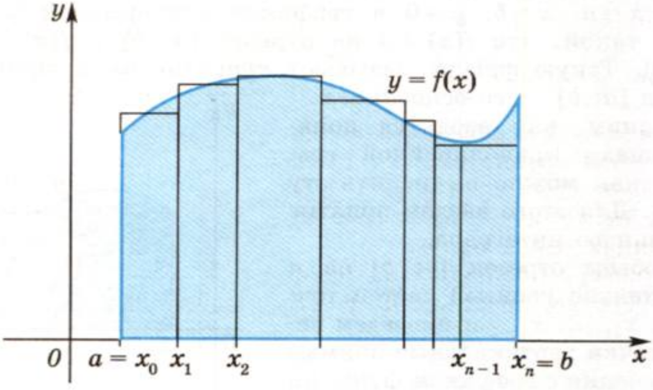


Рис. 90

трапеции приближённо равна площади этого многоугольника, т. е. приближённо равна

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_k)\Delta x_k + \ldots + f(c_n)\Delta x_n. \qquad (1)$$

Сумму (1) называют *интегральной суммой функции* $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Будем увеличивать число точек разбиения так, чтобы наибольшая из длин отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ стремилась к нулю. Тогда длина Δx_k каждого отрезка также будет стремиться к нулю. Можно доказать, что при этом интегральные суммы будут стремиться к некоторому числу S, т. е. имеют предел, равный S. Это число S называется *площадью* рассматриваемой криволинейной трапеции (см. рис. 87).

2. Интеграл

Рассмотрим теперь любую непрерывную на отрезке $[a; b]$ функцию $f(x)$ (необязательно неотрицательную). Составим для неё интегральную сумму (1) и затем будем увеличивать число точек разбиения отрезка $[a; b]$ так, чтобы длина наибольшего из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ стремилась к нулю. Можно доказать (это доказывается в курсе высшей математики), что и в этом случае интегральные суммы стремятся к некоторому числу, т. е. имеют предел, не зависящий от выбора точек $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Этот предел называют *определённым интегралом от функции* $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначают так: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (читается: «интеграл от a до b эф от икс дэ икс»); функцию $f(x)$ называют *подынтегральной функцией*.

В частности, если функция $f(x)$ положительна на отрезке $[a; b]$, получаем формулу для площади криволинейной трапеции:

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Площадь закрашенной фигуры на рисунке 91 равна $\int\limits_1^3 x^2\,dx$.

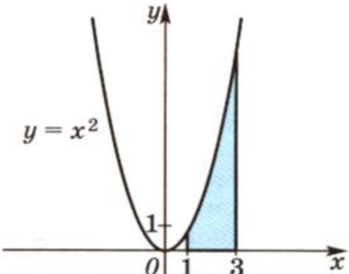


Рис. 91

Формула (2) справедлива и для случая, когда функция $f(x)$ положительна внутри отрезка $[a; b]$, а на одном из концов отрезка или на обоих концах равна нулю.

Например, площадь закрашенной фигуры на рисунке 92 равна $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx$.

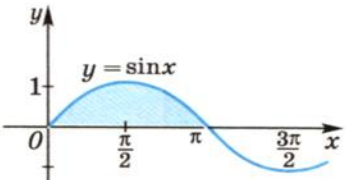


Рис. 92

Таким образом, задача о нахождении площади криволинейной трапеции сводится к вычислению интеграла. Аналогично с помощью интеграла решаются и многие другие геометрические и физические задачи. Примеры физических задач будут рассмотрены в § 5. В курсе геометрии часто рассматриваются примеры вычисления с помощью интегралов объёмов тел (пирамиды, конуса, шара и т. д.).

3. Вычисление интегралов

Приближённое значение интеграла можно получить, составив интегральную сумму. Однако непосредственное нахождение предела интегральных сумм часто оказывается трудоёмким.

Для вычисления определённого интеграла обычно используется следующая формула:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \qquad (3)$$

где $F(x)$ — любая первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$.

Формула (3) справедлива для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;\ b]$, принимающей значения любых знаков. В частности, эта формула справедлива для всех ранее изученных функций (степенной, показательной, тригонометрических и др.) на каждом отрезке $[a;\ b]$, где эти функции определены.

Формулу (3) называют *формулой Ньютона—Лейбница* в честь создателей дифференциального и интегрального исчислений.

Поясним геометрически, как получается формула (3).

Обозначим $S(x)$ площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;\ x]$, где x — любая точка отрезка $[a;\ b]$ (рис. 93). При $x = a$ отрезок $[a;\ x]$ вырождается в точку, и поэтому естественно считать, что $S(a) = 0$.

Покажем, что $S(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, т. е. $S'(x) = f(x)$.

Рассмотрим разность $\Delta S = S(x+h) - S(x)$, где $h > 0$ (случай $h < 0$ рассматривается аналогично). Эта разность равна площади закрашенной на рисунке 94 фигуры, которая представляет собой криволинейную трапецию с основанием $[x;\ x+h]$.

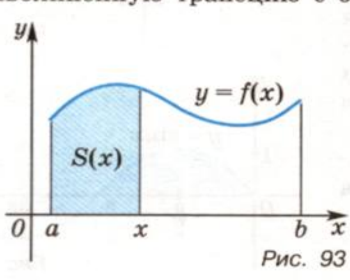


Рис. 93

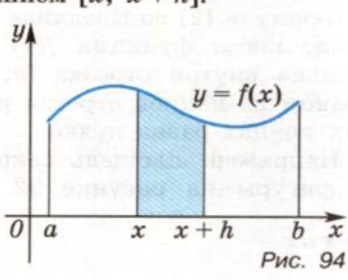


Рис. 94

Заметим, что площадь этой фигуры равна площади прямоугольника с основанием $[x;\ x+h]$ и высотой $f(c)$, где $x \leqslant c \leqslant x+h$, т. е.

$$\Delta S = S(x+h) - S(x) = f(c)h, \tag{4}$$

откуда

$$\frac{\Delta S}{h} = f(c). \tag{5}$$

Строгое доказательство формулы (4) (это «теорема о среднем» для интеграла) рассматривается в курсе высшей математики.

Пусть $h \to 0$, тогда $c \to x$. Так как $f(x)$ — непрерывная функция, то $f(c) \to f(x)$ при $h \to 0$. Переходя к пределу в равенстве (5), получаем $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{S(x+h)-S(x)}{h} = S'(x) = f(x)$. Итак, $S'(x) = f(x)$, т. е. $S(x)$ — первообразная для функции $f(x)$.

Пусть теперь $F(x)$ — произвольная первообразная для функции $f(x)$. Так как любые две первообразные для одной и той же функции отличаются на постоянную (теорема из § 1), то

$$F(x) = S(x) + C. \tag{6}$$

Так как $S(a) = 0$, то при $x = a$ из равенства (6) получаем $F(a) = C$, откуда $S(x) = F(x) - F(a)$. Из этого равенства при $x = b$ имеем

$$S(b) = F(b) - F(a). \tag{7}$$

Напомним, что $S(x)$ — площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;\ x]$ (см. рис. 93), и поэтому

$$S(b) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{8}$$

Из равенств (7) и (8) следует формула Ньютона—Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Заметим, что формула (3) справедлива для любой непрерывной на отрезке $[a;\ b]$ функции $f(x)$.

<u>**Задача 1.**</u> Вычислить интеграл $\int\limits_1^3 x^2\,dx$.

▷ Функция $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ является первообразной для функции $f(x) = x^2$. По формуле (3) получаем $\int\limits_1^3 x^2\,dx = \dfrac{3^3}{3} - \dfrac{1^3}{3} = 9 - \dfrac{1}{3} = 8\dfrac{2}{3}$.

З а м е ч а н и е. Этот интеграл равен площади S фигуры, представленной на рисунке 91, т. е. $S = 8\dfrac{2}{3}$ кв. ед. ◀

Задача 2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$.

▷ Функция $F(x) = -\cos x$ является первообразной для функции $f(x) = \sin\ x$. По формуле (3) получаем $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) =$ $= -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1$.

Замечание. Площадь фигуры, изображённой на рисунке 92, равна 2 кв. ед. ◀

Задача 3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 (x-1)\, dx$.

▷ Одной из первообразных функции $x - 1$ является функция $\frac{x^2}{2} - x$. Поэтому $\int\limits_0^1 (x-1)\, dx = \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) - \left(\frac{0^2}{2} - 0\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$. ◀

При вычислении интегралов удобно ввести следующее обозначение:

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Тогда формулу Ньютона—Лейбница можно записать так:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Например, с помощью этой формулы запишем решение задачи 3:

$$\int\limits_0^1 (x-1)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Задача 4. Вычислить интеграл $\int\limits_{-a}^{a} \sin 3x\, dx$.

▷ $\int\limits_{-a}^{a} \sin 3x\, dx = \frac{1}{3}(-\cos 3x)\Big|_{-a}^{a} = \frac{1}{3}(-\cos 3a + \cos(-3a)) = 0$, так как $\cos(-3a) = \cos 3a$. ◀

Задача 5. Вычислить интеграл $\int\limits_{-e}^{-1} \frac{dx}{x}$.

▷ Так как $\ln|x|$ — первообразная для функции $\frac{1}{x}$ на промежутке $x < 0$, то $\int\limits_{-e}^{-1} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-e}^{-1} = \ln 1 - \ln e = -1$. ◀

Задача 6. Вычислить интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) dx$.

▷ Преобразуем подынтегральную функцию $f(x)$, используя формулы $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$. Получим

$$f(x) = \frac{1+\cos 2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1+\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sin 4x}{2}.$$

Так как первообразной для функции $f(x)$ является функция $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\cos 4x$, то $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\cos 4x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4}$. ◀

Задача 7. Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$.

▷ $\int\limits_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \int\limits_0^3 (x+1-1)\sqrt{x+1}\,dx = \int\limits_0^3 \left((x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}\right)dx =$

$= \left(\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^3 = \left(\frac{2}{5}\cdot 32 - \frac{2}{3}\cdot 8\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = 7\frac{11}{15}$. ◀

Упражнения

365. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$, если:

1) $a = 3$, $b = 4$, $f(x) = x^2$; 2) $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = x^3 + 1$;
3) $a = 1$, $b = 8$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$; 4) $a = 4$, $b = 9$, $f(x) = \sqrt{x}$;
5) $a = \frac{\pi}{3}$, $b = \frac{2\pi}{3}$, $f(x) = \sin x$; 6) $a = -\frac{\pi}{6}$, $b = 0$, $f(x) = \cos x$.

366. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $x = b$, осью Ox и графиком функции $y = f(x)$, если:

1) $b = 3$, $f(x) = x^2$; 2) $b = 2$, $f(x) = x^3$;
3) $b = 4$, $f(x) = \sqrt{x}$; 4) $b = 8$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$;
5) $b = 2$, $f(x) = 5x - x^2$; 6) $b = 3$, $f(x) = x^2 + 2x$;
7) $b = 1$, $f(x) = e^x - 1$; 8) $b = 2$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

Вычислить интеграл **(367—369)**.

367. 1) $\int\limits_0^3 x^2\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^3 2x\,dx$; 3) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx$; 4) $\int\limits_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

368. 1) $\int\limits_1^e \frac{1}{x}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\ln 2} e^x\,dx$; 3) $\int\limits_{-2\pi}^{\pi} \sin x\,dx$; 4) $\int\limits_{-3\pi}^{0} \cos 3x\,dx$.

369. 1) $\int\limits_{-3}^2 (2x-3)\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{-1} (5-4x)\,dx$; 3) $\int\limits_{-1}^2 (1-3x^2)\,dx$;

4) $\int\limits_{-1}^1 (x^2+1)\,dx$; 5) $\int\limits_1^2 (2x+3x^2)\,dx$; 6) $\int\limits_{-2}^0 (9x^2-4x)\,dx$;

7) $\int\limits_{-2}^{-1} (6x^2+2x-10)\,dx$; 8) $\int\limits_0^2 (3x^2-4x+5)\,dx$.

370. Изобразить фигуру, площадь которой равна данному интегралу, и вычислить эту площадь:

1) $\int\limits_{-2}^{-\frac{3}{2}} (-2-3x)\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{3} (6-2x)\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{4} (12+x-x^2)\,dx$; 4) $\int\limits_{-2}^{0} (x^2-3x)\,dx$;

5) $\int\limits_{2\pi}^{3\pi} \sin x\,dx$; 6) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;

7) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; 8) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \sin x\,dx$.

Вычислить интеграл **(371—375)**.

371. 1) $\int\limits_{-2}^{1} x(x+3)(2x-1)\,dx$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$;

3) $\int\limits_{-1}^{0} (x+1)(x^2-2)\,dx$; 4) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{4}{x^2}\left(1-\frac{2}{x}\right) dx$.

372. 1) $\int\limits_{0}^{4} \left(x-3\sqrt{x}\right) dx$; 2) $\int\limits_{1}^{9} \left(2x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$; 3) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$;

4) $\int\limits_{1}^{3} \frac{3x-1}{\sqrt{x}}\,dx$; 5) $\int\limits_{1}^{4} \sqrt{x}\left(3-\frac{7}{x}\right) dx$; 6) $\int\limits_{1}^{8} 4\sqrt[3]{x}\left(1-\frac{4}{x}\right) dx$.

373. 1) $\int\limits_{0}^{5} \frac{6}{\sqrt{3x+1}}\,dx$; 2) $\int\limits_{2}^{7} \frac{4}{\sqrt{x+2}}\,dx$.

374. 1) $\int\limits_{0}^{2} e^{3x}\,dx$; 2) $\int\limits_{1}^{3} 2e^{2x}\,dx$;

3) $\int\limits_{1}^{2} \frac{3}{2x-1}\,dx$; 4) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{4}{3x+5}\,dx$.

375. 1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 4x\,dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) dx$.

§ 4. Вычисление площадей фигур с помощью интегралов

Задача 1. Вычислить площадь S криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=-1$, $x=2$ и параболой $y=9-x^2$ (рис. 95).

▷ Так как на отрезке $[-1; 2]$ функция $y=9-x^2$ принимает положительные значения, то искомая площадь S равна интегралу:

$$S=\int_{-1}^{2}(9-x^2)\,dx.$$

По формуле Ньютона—Лейбница находим

$$S=\int_{-1}^{2}(9-x^2)\,dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(9\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right)-$$

$$-\left(9(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)=24. \blacktriangleleft$$

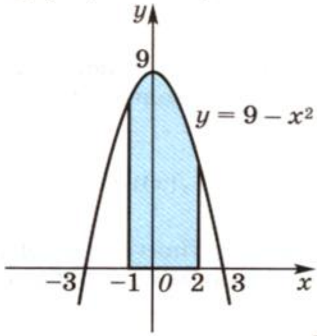


Рис. 95

Задача 2. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y=x^2$, $y=2x-x^2$ и осью Ox.

▷ Построим графики функций $y=x^2$, $y=2x-x^2$ и найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2=2x-x^2$, корни которого $x_1=0$, $x_2=1$. Данная фигура изображена на рисунке 96, из которого видно, что она состоит из двух криволинейных трапеций. Следовательно, искомая площадь равна сумме площадей этих трапеций:

$$S=\int_{0}^{1}x^2\,dx+\int_{1}^{2}(2x-x^2)\,dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{1}+\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{1}^{2}=1. \blacktriangleleft$$

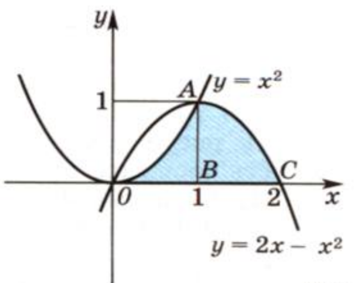


Рис. 96

Задача 3. Найти площадь фигуры, ограниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции $y=\cos x$ на этом отрезке.

▷ Заметим, что искомая площадь равна площади фигуры, симметричной данной относительно оси Ox (рис. 97), т. е.

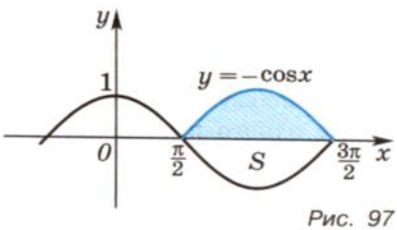


Рис. 97

равна площади фигуры, ограниченной отрезком $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси Ox и графиком функции

$$y = -\cos x$$

на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. На этом отрезке $-\cos x \geqslant 0$, и поэтому

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-\cos x)\, dx = (-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} =$$

$$= \left(-\sin\frac{3\pi}{2}\right) - \left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2. \blacktriangleleft$$

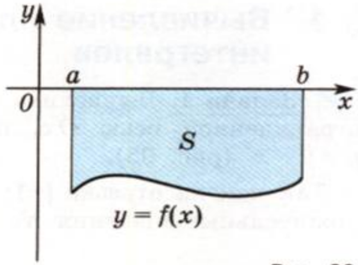


Рис. 98

З а м е ч а н и е. Если $f(x) \leqslant 0$ на отрезке $[a; b]$ (рис. 98), то площадь S криволинейной трапеции равна

$$S = \int_a^b (-f(x))\, dx.$$

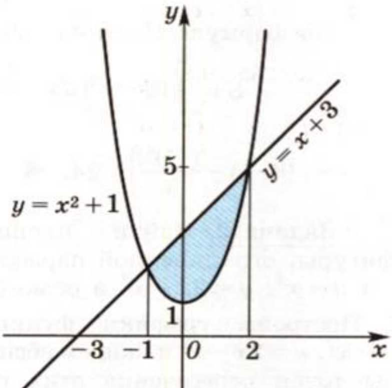


Рис. 99

Задача 4. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой

$$y = x^2 + 1$$

и прямой

$$y = x + 3.$$

▷ Построим графики функций $y = x^2 + 1$ и $y = x + 3$. Найдём абсциссы точек пересечения этих графиков из уравнения $x^2 + 1 = x + 3$. Это уравнение имеет корни $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Фигура, ограниченная графиками данных функций, изображена на рисунке 99. Из рисунка видно, что искомую площадь можно найти как разность площадей S_1 и S_2 двух трапеций, опирающихся на отрезок $[-1; 2]$, первая из которых ограничена сверху отрезком прямой $y = x + 3$, а вторая — дугой параболы $y = x^2 + 1$. Так как $S_1 = \int_{-1}^{2} (x + 3)\, dx$, $S_2 = \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\, dx$, то

$$S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2} (x + 3)\, dx - \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)\, dx.$$

Используя свойство первообразных, можно записать S в виде одного интеграла:

$$S = \int_{-1}^{2} ((x + 3) - (x^2 + 1))\, dx = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}. \blacktriangleleft$$

Рассмотрим фигуру, ограниченную отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geqslant f_1(x) \geqslant 0$ (рис. 100). Площадь S этой фигуры равна разности площадей криволинейных трапеций aA_2B_2b и aA_1B_1b. Площади S_2 и S_1 этих трапеций соответственно равны:

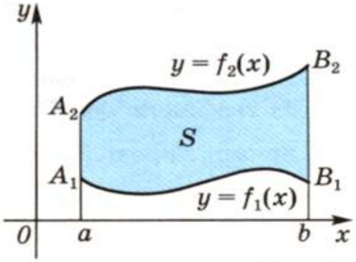


Рис. 100

$$S_2 = \int_a^b f_2(x)\,dx \quad \text{и} \quad S_1 = \int_a^b f_1(x)\,dx.$$

Следовательно,

$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx.$ Отсюда

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \qquad (1)$$

Эта формула справедлива для любых непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (принимающих значения любых знаков), удовлетворяющих условию $f_2(x) \geqslant f_1(x)$.

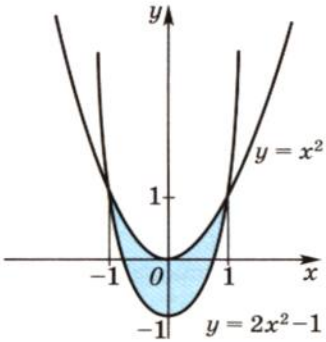


Рис. 101

Задача 5. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = 2x^2 - 1$.

▷ Построим данную фигуру (рис. 101) и найдём абсциссы точек пересечения парабол из уравнения $x^2 = 2x^2 - 1$, корни которого $x_{1,2} = \pm 1$. По формуле (1), где $f_1(x) = 2x^2 - 1$, $f_2(x) = x^2$, находим

$$S = \int_{-1}^{1} (x^2 - (2x^2 - 1))dx = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)dx = \left(-\frac{x^2}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$ ◀

Упражнения

376. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и параболой:
1) $y = 1 - x^2$;
2) $y = -x^2 + 4x - 3$;
3) $y = -x(x + 3)$;
4) $y = (1 - x)(x + 2)$;
5) $y = (x + 2)(3 - x)$.

377. Найти площадь фигуры, ограниченной:
1) параболой $y = (x + 1)^2$, прямой $y = 1 - x$ и осью Ox;
2) параболой $y = 4 - x^2$, прямой $y = x + 2$ и осью Ox;
3) параболой $y = 4x - x^2$, осью Ox и прямой, проходящей через точки (4; 0) и (1; 3).
4) параболой $y = 3x^2$, осью Ox и прямой, проходящей через точки (−3; 0) и (−1; 3);

5) параболами $y = 6x^2$, $y = (x-3)(x-4)$ и осью Ox;
6) параболами $y = 4 - x^2$, $y = (x-2)^2$ и осью Ox.

378. Найти площадь фигуры, ограниченной:
1) графиком функции $y = \sin x$, отрезком $[0; \pi]$ оси Ox и прямой, проходящей через точки $(0; 0)$ и $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$;
2) графиками функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и отрезком $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ оси Ox;
3) графиками функций $y = \sqrt{x}$, $y = (x-2)^2$ и осью Ox;
4) графиками функций $y = x^3$, $y = 2x - x^2$ и осью Ox.

379. Найти площадь фигуры, ограниченной:
1) параболой $y = 9 - x^2$, прямой $y = 7 - x$ и осью Ox;
2) параболой $y = x\,(4 - x)$, прямой $y = 3$ и осью Ox;
3) параболами $y = (x-2)^2$, $y = (x+2)^2$, прямой $y = 1$ и осью Ox;
4) параболами $y = (x+2)^2$, $y = (x-3)^2$, осью Ox и прямой, проходящей через точки $(-1; 1)$ и $(1; 4)$;
5) графиком функции $y = \sin x$, прямой $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и отрезком $[0; \pi]$ оси Ox;
6) графиком функции $y = \cos x$, прямой $y = \frac{1}{2}$ и отрезком $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ оси Ox.

380. Найти площадь фигуры, ограниченной:
1) параболой $y = x^2 - 4x + 3$ и осью Ox;
2) графиком функции $y = \cos x$, прямыми $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \pi$ и осью Ox.

381. Найти площадь фигуры, ограниченной:
1) параболой $y = 6x - x^2$ и прямой $y = x + 4$;
2) параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = x + 2$.

382. Найти площадь фигуры, ограниченной:
1) параболой $y = (x+2)^2$ и прямой $y = x + 2$;
2) графиком функции $y = \sqrt{x}$ и параболой $y = x^2$;
3) графиком функции $y = \sqrt{x}$ и прямой $y = x$;
4) параболой $y = (x-1)^2$ и прямой $y = 5 + x$;
5) прямой $y = 1$, осью Oy и графиком функции $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

383. Найти площадь фигуры, ограниченной:
1) параболой $y = -x^2 + 4x - 3$ и прямой, проходящей через точки $(1; 0)$ и $(0; -3)$;
2) параболой $y = -x^2$ и прямой $y = -2$;
3) параболами $y = 1 - x^2$ и $y = x^2 - 1$;
4) графиком функции $y = x^3$ и прямыми $y = 1$ и $x = -2$;
5) прямой $y = x$ и графиком функции $y = x^3$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$;
6) параболами $y = x^2 - 2x$ и $y = -x^2$.

§ 5. Применение интегралов для решения физических задач

1. Нахождение пути по заданной скорости

Пусть точка движется со скоростью $v(t)$. Нужно найти путь s, пройденный точкой от момента $t=a$ до момента $t=b$. Обозначим через $s(t)$ путь, пройденный точкой за время t от момента a. Тогда $s'(t)=v(t)$, т. е. $s(t)$ — первообразная для функции $v(t)$. Поэтому по формуле Ньютона—Лейбница найдём $s(b)-s(a)=\int_a^b v(t)\,dt$. Так как $s(a)=0$, то искомый путь равен

$$s=\int_a^b v(t)\,dt. \tag{1}$$

Например, если точка движется со скоростью $v(t)=$ $=2t+1$ (м/с), то путь, пройденный точкой за первые 10 с, по формуле (1) равен $s=\int_0^{10}(2t+1)\,dt=(t^2+t)\Big|_0^{10}=110$ (м).

2. Вычисление работы переменной силы

Пусть тело, рассматриваемое как материальная точка, движется по оси Ox под действием силы $F(x)$, направленной вдоль оси Ox. Вычислим работу силы при перемещении тела из точки a в точку b.

Пусть $A(x)$ — работа данной силы при перемещении тела из точки a в точку x, где $x\in[a;\ b]$. При малом h силу F на отрезке $[x;\ x+h]$ можно считать постоянной и равной $F(x)$. Поэтому $A(x+h)-A(x)\approx F(x)h$, т. е.

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}\approx F(x).$$

При h, стремящемся к нулю, получаем, что $A'(x)=F(x)$, т. е. $A(x)$ — первообразная для функции $F(x)$. По формуле Ньютона—Лейбница получаем $A(b)=\int_a^b F(x)\,dx$, так как $A(a)=0$.

Итак, работа силы $F(x)$ при перемещении тела из точки a в точку b равна

$$A=\int_a^b F(x)\,dx. \tag{2}$$

Заметим, что если сила F выражается в ньютонах (Н), а путь — в метрах, то работа A — в джоулях (Дж).

Задача. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,08 м, если для её сжатия на 0,01 м требуется сила 10 Н.

▷ По закону Гука сила F пропорциональна сжатию пружины, т. е. $F=kx$, где x — сжатие (в м), k — постоянная. Из условия задачи находим k. Так как при $x = 0{,}1$ м сила $F = 10$ Н, то $k = \frac{F}{x} = 1000$. Следовательно, $F = kx = 1000x$, и по формуле (2), где $F(x) = 1000x$, получаем

$$A = \int_0^{0{,}08} 1000x\,dx = 1000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}08} = 3{,}2 \text{ (Дж)}. \blacktriangleleft$$

Упражнения

384. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)$ (м/с). Вычислить путь, пройденный телом за промежуток времени от $t = t_1$ до $t = t_2$, если:
1) $v(t) = 3t^2 + 1,\ t_1 = 0,\ t_2 = 4$;
2) $v(t) = 2t^2 + t,\ t_1 = 1,\ t_2 = 3$;
3) $v(t) = 6t^2 + 4,\ t_1 = 2,\ t_2 = 3$;
4) $v(t) = t^2 - t + 3,\ t_1 = 0,\ t_2 = 5$.

385. Скорость прямолинейно движущегося тела $v(t) = 4t - t^2$. Вычислить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

§ 6. Простейшие дифференциальные уравнения

До сих пор мы рассматривали уравнения, в которых неизвестными являлись числа. Однако в математике и её приложениях приходится рассматривать уравнения, в которых неизвестными являются функции.

Задача о нахождении пути $s(t)$ по заданной скорости $v(t)$ сводится к решению уравнения $s'(t) = v(t)$, где $v(t)$ — заданная функция, а $s(t)$ — искомая функция.

Это уравнение содержит производную неизвестной функции $s(t)$. Такие уравнения называют *дифференциальными*.

Задача 1. Решить дифференциальное уравнение $y' = x + 1$.

▷ Требуется найти функцию $y(x)$, производная которой равна $x + 1$, т. е. найти первообразную функции $x + 1$. По правилам нахождения первообразных получаем $y = \frac{x^2}{2} + x + C$, где C — произвольная постоянная. ◀

Решение дифференциального уравнения вида $y' = f(x)$ находится неоднозначно (с точностью до постоянной C). Обычно к дифференциальному уравнению добавляется условие, из которого постоянная C однозначно определяется.

Задача 2. Найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = \cos x$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

▷ Все решения этого уравнения записываются формулой $y(x) = \sin x + C$. Из условия $y(0) = 1$ находим $\sin 0 + C = 1$, откуда $C = 1$.

Ответ. $y = 1 + \sin x$. ◀

Рассмотрим *задачу о размножении бактерий.*

Экспериментально установлено, что при определённых условиях скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству.

Пусть $m(t)$ — масса всех бактерий в момент времени t, тогда $m'(t)$ — скорость их размножения. По условию

$$m'(t) = km(t), \tag{1}$$

где k — заданная постоянная, зависящая от вида бактерий и внешних условий. Уравнение (1) является дифференциальным уравнением, описывающим закон размножения бактерий.

Покажем, что функции

$$m(t) = Ce^{kt}, \tag{2}$$

где C — постоянная, являются решениями уравнения (1). В самом деле, $(Ce^{kt})' = Cke^{kt} = k(Ce^{kt})$. Можно показать, что формула (2) содержит все решения уравнения (1).

Пусть известна масса m_0 бактерий в момент времени t_0, т. е.

$$m(t_0) = m_0. \tag{3}$$

Тогда из равенств (2) и (3) получаем $m_0 = Ce^{kt_0}$, откуда $C = m_0e^{-kt_0}$ и

$$m(t) = m_0e^{k(t-t_0)}$$

даёт искомое решение дифференциального уравнения (1) при начальном условии (3).

К решению дифференциального уравнения сводится *задача о радиоактивном распаде.*

Эксперименты показывают, что скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна имеющемуся количеству этого вещества.

Следовательно, если $m(t)$ — масса вещества в момент времени t, то

$$m'(t) = -km(t), \tag{4}$$

где k — положительная постоянная.

Знак «−» в уравнении (4) обусловлен тем, что $m(t) > 0$, а $m'(t) < 0$, так как с течением времени количество вещества уменьшается.

Как и для уравнения (1), проверяется, что функции

$$m(t) = Ce^{-kt} \tag{5}$$

являются решениями уравнения (4). Если задано начальное условие

$$m(t_0) = m_0, \tag{6}$$

то из равенств (5) и (6) имеем $C = m_0e^{kt_0}$. Следовательно, функция

$$m(t) = m_0e^{-k(t-t_0)} \tag{7}$$

является решением дифференциального уравнения (4) при начальном условии (6).

Заметим, что на практике скорость распада радиоактивного вещества характеризуется периодом полураспада, т. е. промежутком времени, в течение которого распадается половина исходного вещества.

Пусть T — период полураспада, тогда из равенства (7) при $t = t_0 + T$ находим $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$, откуда $e^{-kT} = \frac{1}{2}$, $kT = \ln 2$, $k = \frac{\ln 2}{T}$. Подставляя найденное значение k в формулу (7), получаем

$$m(t) = m_0 e^{\frac{-t+t_0}{T}\ln 2}, \text{ или } m(t) = m_0 2^{\frac{-t+t_0}{T}}.$$

В частности, если $t_0 = 0$, то $m(t) = m_0 2^{\frac{-t}{T}}$.

В практике часто встречаются процессы, которые периодически повторяются, например колебательные движения маятника, струны, пружины и т. д.; процессы, связанные с переменным электрическим током, магнитным полем и т. п. Решение многих таких задач сводится к решению дифференциального уравнения

$$y'' + \omega^2 y = 0, \tag{8}$$

где ω — заданное положительное число.

Уравнение (8) называют *уравнением гармонических колебаний*.

Решениями уравнения (8) являются функции $\cos\omega x$ и $\sin\omega x$, а любое решение этого уравнения можно записать в виде

$$y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x. \tag{9}$$

Если заданы значения функции $y(x)$ и её производной $y'(x)$ в точке $x = x_0$, то этими условиями определяется единственное решение уравнения (8).

Задача 3. Найти решения уравнения

$$y'' + 4y = 0, \text{ если } y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

▷ Решения данного уравнения согласно формуле (9) имеют вид

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Используя условия задачи, получаем $0 = C_1\cos 0 + C_2\sin 0$, откуда $C_1 = 0$, $1 = C_2 2\cos 0$, т. е. $C_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$y = \frac{1}{2}\sin 2x. \blacktriangleleft$$

Упражнения

Решить дифференциальное уравнение **(386—387)**.

386. 1) $y' = 3 - 4x$; 2) $y' = 6x^2 - 8x + 1$;
3) $y' = 3e^{2x}$; 4) $y' = 4\cos 2x$.

387. 1) $y' = 3\sin x$; 2) $y' = \cos x - \sin x$;
3) $y' = 4x^3 - 2\cos x$; 4) $y' = 3x^2 - 4e^{2x}$.

388. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данному условию:

1) $y' = \sin x,\ y(0) = 0$;
2) $y' = 2\cos x,\ y(\pi) = 1$;
3) $y' = 3x^2 + 4x - 1,\ y(1) = -2$;
4) $y' = 2 + 2x - 3x^2,\ y(-1) = 2$;
5) $y' = e^x,\ y(1) = 1$;
6) $y' = e^{-x},\ y(0) = 2$.

389. Показать, что функция $y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$ при любых значениях C_1 и C_2 является решением уравнения $y'' - \omega^2 y = 0$.

Упражнения к главе IV

390. Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M, если:

1) $f(x) = \cos x,\ M(0;\ -2)$;
2) $f(x) = \sin x,\ M(-\pi;\ 0)$;
3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ M(4;\ 5)$;
4) $f(x) = e^x,\ M(0;\ 2)$;
5) $f(x) = 3x^2 + 1,\ M(1;\ -2)$;
6) $f(x) = 2 - 2x,\ M(2;\ 3)$.

391. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \sqrt{x},\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$;
2) $y = \cos x,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{3},\ y = 0$;
3) $y = x^2,\ y = 2 - x$;
4) $y = 2x^2,\ y = 0{,}5x + 1{,}5$;
5) $y = \sqrt[3]{x},\ x = -8,\ x = -1,\ y = 0$;
6) $y = \frac{1}{x^3},\ x = -3,\ x = -1,\ y = 0$.

Вычислить интеграл **(392—394)**.

392. 1) $\int\limits_{-1}^{2} 2\,dx$;
2) $\int\limits_{-2}^{2} (3 - x)\,dx$;
3) $\int\limits_{1}^{3} (x^2 - 2x)\,dx$;
4) $\int\limits_{-1}^{1} (2x - 3x^2)\,dx$;
5) $\int\limits_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$;
6) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^3}$;
7) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$;
8) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

393. 1) $\int\limits_{0}^{1} (5x^4 - 8x^3)\,dx$;
2) $\int\limits_{-1}^{1} (6x^3 - 5x)\,dx$;
3) $\int\limits_{1}^{4} \sqrt{x}\left(3 - \frac{7}{x}\right) dx$;
4) $\int\limits_{1}^{8} 4\sqrt[3]{x}\left(1 - \frac{4}{x}\right) dx$;
5) $\int\limits_{0}^{3} \sqrt{x + 1}\,dx$;
6) $\int\limits_{2}^{6} \sqrt{2x - 3}\,dx$.

394. 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx$;

3) $\int\limits_1^3 3\sin(3x-6)\,dx$; 4) $\int\limits_0^3 8\cos(4x-12)\,dx$.

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями (395—396).

395. 1) $y=\frac{1}{x}$, $y=4x$, $x=1$, $y=0$; 2) $y=\frac{1}{x^2}$, $y=x$, $x=2$, $y=0$;

3) $y=x^2+1$, $y=x+1$; 4) $y=x^2+2$, $y=2x+2$.

396. 1) $y=x^2-6x+9$, $y=x^2+4x+4$, $y=0$;

2) $y=x^2+1$, $y=3-x^2$;

3) $y=x^2$, $y=2\sqrt{2x}$; 4) $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{4-3x}$, $y=0$.

397. Найти площадь фигуры, ограниченной:

1) параболой $y=x^2-2x+2$, касательной к ней, проходящей через точку пересечения параболы с осью Oy, и прямой $x=1$;

2) гиперболой $y=\frac{4}{x}$, касательной к ней, проходящей через точку с абсциссой $x=2$, и прямыми $y=0$, $x=6$.

398. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=x^3-3x^2-9x+1$, $x=0$, $y=6$, $x=1$;

2) $y=x^4-2x^2+5$, $y=1$, $x=0$, $x=1$.

399. При каком значении k площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+px$, где p — заданное число, и прямой $y=kx+1$, наименьшая?

400. При нагрузке на пружинную рессору была совершена работа 600 Дж. Каким при этом было сжатие l рессоры, если известно, что при нагрузке 16000 Н она сжималась на 2 см?

401. Скорость впитывания воды в почву в течение первых 2—3 часов определяется формулой $V(t)=V_1t^{-\alpha}$, где t — время в минутах, $V_1=1{,}8$ см/мин — скорость впитывания воды в конце первой минуты, α — коэффициент затухания скорости впитывания (для большинства почв $0{,}3<\alpha<0{,}8$). Найти толщину h слоя воды, впитывающейся в почву за 2 часа, если $\alpha=0{,}4$.

402. Какую работу нужно совершить, чтобы поднять тело массой m с поверхности Земли (её радиус R) на высоту h?

403. В цилиндрическом сосуде с подвижным поршнем находится газ, который медленно расширяется (в результате теплообмена температура газа T остаётся постоянной). Найти работу силы давления газа при его расширении от объёма V_1 до объёма V_2, если в сосуде находится υ молей газа.

404. При прохождении через защитную стенку атомного реактора нейтроны частично поглощаются ядрами материала стенки. Пусть $F(x)$ — поток нейтронов, прошедших через стенку толщиной x.

1) Составить дифференциальное уравнение для функции $F(x)$, если известно, что часть потока, поглощённая материалом стенки толщиной Δx, пропорциональна величине самого потока (коэффициент пропорциональности σ_0 называется *постоянной поглощения нейтронов*).

2) Найти решение полученного дифференциального уравнения.

3) Определить, какой должна быть толщина стенки, чтобы уменьшить поток в 2 раза.

Вопросы к главе IV

1. Что называется первообразной для функции $y = f(x)$ на некотором интервале?
2. Как задать все первообразные функции $y = f(x)$, если $F(x)$ — одна из них?
3. Записать формулы первообразных для функций
$$y = x^p \ (p \neq -1),\ y = \frac{1}{x}\ (x > 0,\ x < 0),\ y = e^x,\ y = \sin x,\ y = \cos x.$$
4. Перечислить правила нахождения первообразных.
5. Привести пример криволинейной трапеции.
6. Какую фигуру называют криволинейной трапецией?
7. Записать формулу Ньютона—Лейбница.
8. Привести пример фигуры, площадь которой можно вычислить по формуле $S = \int\limits_a^b (-f(x))\,dx$.
9. Привести пример фигуры, площадь которой можно вычислить по формуле $S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx$.
10. Как с помощью интеграла найти путь по заданной скорости, вычислить работу переменной силы?
11. Какую сумму называют интегральной суммой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$?

12. Что называют определённым интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$?

13. Какое уравнение называют уравнением гармонического колебания? Как записывается его решение?

Проверь себя!

1. Показать, что $F(x) = e^{2x} + x^3 - \cos x$ является первообразной для функции $f(x) = 2e^{2x} + 3x^2 + \sin x$ на всей числовой прямой.
2. Для функции $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(1; -2)$.
3. Вычислить:

   1) $\int\limits_1^2 2x^2\,dx$; 2) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^3}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx$; 4) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$.
4. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + x - 6$ и осью Ox.

---

1. Для функции $f(x) = e^x - 3\sin x$ найти первообразную, график которой проходит через точку $A(0; 2)$.
2. Вычислить:

   1) $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{2}{3x+1}\,dx$.
3. Изобразить фигуру, площадь которой равна $\int\limits_1^2 (2x - x^2)\,dx$, и вычислить эту площадь.
4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями
$$y = 2 + 4x - x^2 \text{ и } y = x^2 - 2x + 2.$$
5. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и касательными к ней, проведёнными из точки $(0; -3)$.

Историческая справка

Несмотря на то что интегральное исчисление появилось в XVII в., его истоки можно обнаружить в глубокой древности. Так, в Московском папирусе, возраст которого около 4000 лет, описывается алгоритм вычисления объёма усечённой пирамиды с квадратными основаниями и ставятся проблемы нахождения общих приёмов вычисления площадей криволинейных фигур и объёмов различных тел.

Метод древнегреческого учёного Евдокса Книдского, названный впоследствии методом исчерпывания, позволял достаточно точно вычислять площади любых фигур на основе неявного использования предельных переходов. Суть этого метода, например для вычисления площадей плоских фигур, заключается в следующем. В фигуру вписываются и вокруг неё описываются многоугольники, число сторон которых увеличивается. Находится предел, к которому стремятся площади этих многоугольников; его и принимают за площадь рассматриваемой фигуры. Сложность применения этого метода в том, что для каждой фигуры надо было искать свой способ вычисления предела. В древности этим методом пользовались Архимед и Евклид. В дальнейшем развитие методов, которые применяли древнегреческие учёные при вычислении площадей и объёмов, привело к понятию интеграла.

В XVII в. немецкий математик и астроном И. Кеплер, открывший законы движения планет, одним из первых попытался возродить метод вычисления площадей и объёмов, идущий от Евдокса и развитый Архимедом. Кеплер вычислял площади плоских фигур и объёмы тел, основываясь на идее разбиения фигур и тел на большое число малых частей, которые он называл «тончайшими кружочками» или «частями крайне малой ширины». Затем суммировал площади (или объёмы) полученных при разбиении фигур (тел).

В отличие от Кеплера итальянский математик Б. Кавальери (1598—1647) в книге «Геометрия неделимых», деля фигуру (тело) параллельными прямыми (плоскостями), считал эти линии (плоскости) лишёнными всякой толщины, однако «складывал» их для нахождения площади фигуры (объёма тела). Под понятием «все линии» Кавальери понимал то же, что мы сегодня понимаем под $\int_a^b f(x)\,dx$.

Труды Кеплера, Кавальери и других учёных послужили основой, на которой Ньютон и Лейбниц выстроили теорию интегрального исчисления. Развитие этой теории продолжили Эйлер и П. Л. Чебышев (1821—1894). В частности, Чебышев разработал способы интегрирования отдельных классов иррациональных функций.

Определение интеграла как предела интегральных сумм принадлежит О. Коши. Знак интеграла ввёл Лейбниц. Термин «интеграл» (от лат. integer — целый) впервые был предложен И. Бернулли.

Глава V

Комбинаторика

Математическая истина независимо от того, в Париже или в Тулузе, одна и та же.

Б. Паскаль

Людям разных специальностей на работе и в жизни приходится решать задачи, в которых составляются комбинации из предметов, букв, цифр и др. Например, завуч школы при составлении расписания комбинирует варианты уроков на неделю для каждого класса и для каждого учителя; дизайнер перебирает различные драпировки мебели, подходящие под определённую окраску стен; любой человек планирует последовательность выполнения обязательных дел.

Область математики, в которой изучаются вопросы подсчёта комбинаций (соединений), составленных из заданных объектов и подчинённых тем или иным условиям, называется *комбинаторикой*.

Комбинаторные занимательные задачи решали ещё в древности. Многие старинные игры (магические и латинские квадраты, шахматы) требовали от игроков мысленных переборов возможных ходов, т. е. фактически заставляли решать комбинаторные задачи. Интересные комбинаторные задачи решали и в Средние века. Например, в «Книге абака» (автор Фибоначчи, XIII в.) встречается такая задача: «Найти наименьшее число гирь, достаточное для взвешивания любого товара весом от 1 до 40 фунтов».

Однако рождением комбинаторики считают XVI—XVII вв., когда в Европе распространились азартные игры (кости, карты) и знатные игроки стали обращаться к математикам за помощью (надеясь на подсказку в комбинации удачных ходов, наборе выигрышных карт, ставок). Математики увлеклись наблюдением за азартными играми, стали находить в случайных событиях определённые закономерности. Так одновременно с теорией вероятностей зарождалась и комбинаторика (как аппарат решения вероятностных задач).

Во второй половине XX в. комбинаторика стала бурно развиваться в связи с повышением во всём мире интереса к проблемам дискретной математики. Таким образом, начав с анализа головоломок и азартных игр, комбинаторика оказалась полезной для решения практических задач почти всех разделов математики. Комбинаторные методы стали применяться в статистике, генетике, лингвистике, при решении транспортных задач, в информатике, при создании и декодировании шифров и т. д.

В основной школе вы знакомились с простейшими комбинаторными задачами, решаемыми с помощью правила произведения. Вы могли уже решить, например, такую задачу: «Сколько различных знаков можно закодировать с помощью комбинаций из точек и тире (азбука Морзе), если в коде может быть не более 5 символов?» (Ответ. $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62$.) Узнали, что такое перестановки.

В этой главе вы повторите ранее изученные комбинаторные понятия, узнаете новые виды соединений (размещения и сочетания), поймёте, чем по сути являются биномиальные коэффициенты в разложениях степеней двучлена (с формулой бинома Ньютона вы первый раз встречались в 10 классе при изучении многочленов). Полученные при изучении этой главы знания и умения помогут вам решать задачи следующей главы, посвящённой введению в теорию вероятностей.

Напоследок заметим, что эта глава начинается с темы «Математическая индукция», которая по программе обязательной не является. Но мы советуем всем, кто интересуется математикой, познакомиться с ней. Изложенный в первом параграфе главы метод математической индукции — интереснейший метод доказательства истинности утверждений, справедливых для всех натуральных чисел.

§ 1. Математическая индукция

Рассмотрим значения квадратного трёхчлена $n^2 + n + 41$ при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, 14$. Они соответственно равны 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, ..., 251. Все полученные числа простые. Напрашивается вывод, что при любом натуральном n число

$$N = n^2 + n + 41 \tag{1}$$

является простым.

Вывод, сделанный на основании проверки большого числа примеров, называют утверждением по *неполной индукции*[1]. Однако нельзя быть абсолютно уверенным, что высказанное таким образом утверждение справедливо при других, непроверенных значениях n. Так, например, значение рассмотренного квадратного

---

[1] Индукция (от лат. inductio — наведение) — умозаключение от фактов к общему утверждению.

трёхчлена (1) при $n=41$ равно $41^2+41+41=41(41+1+1)=$ $=41\cdot43$, т. е. не является простым числом.

Для строгого доказательства утверждений на множестве натуральных чисел используют *метод полной математической индукции* (кратко *метод математической индукции*). Покажем его применение на примерах.

Задача 1. Доказать, что неравенство

$$2^n > n \qquad (2)$$

справедливо для любого натурального n.

▷ Заметим, что $2^1>1$, т. е. неравенство (2) справедливо при $n=1$.

Предположим, что неравенство (2) справедливо для некоторого натурального n. Докажем, что тогда из этого предположения следует справедливость аналогичного неравенства для следующего натурального числа $n+1$, т. е. что $2^{n+1}>n+1$. Умножив обе части верного по предположению неравенства (2) на положительное число 2, получим верное неравенство $2\cdot2^n>2\cdot n$, т. е.

$$2^{n+1}>2n. \qquad (3)$$

Но $2n=n+n\geqslant n+1$, так как $n\geqslant1$. Поэтому из верного неравенства (3) следует верное неравенство $2^{n+1}>n+1$.

Итак, при $n=1$ формула (2) верна. По доказанному она верна и для следующего натурального числа $n=2$. А так как формула (2) верна при $n=2$, то по доказанному она верна и при $n=3$, поэтому она верна и при $n=4$ и т. д., т. е. при всех натуральных n. ◀

Таким образом, способ доказательства методом полной математической индукции состоит в следующем:

Пусть требуется доказать, что некоторое утверждение справедливо для любого натурального числа n. Если:
1) проверена справедливость утверждения при $n=1$;
2) доказано, что если это утверждение верно для некоторого натурального числа n, то оно верно и для следующего за ним натурального числа $n+1$,
тогда делается вывод, что данное утверждение верно для $n=2$, $n=3$ и т. д., т. е. для любого натурального n.

Задача 2. Доказать, что для любого натурального n справедливо равенство

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}. \qquad (4)$$

▷ Воспользуемся методом математической индукции.

1) При $n=1$ равенство (4) верно: $1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

2) Докажем, что если равенство (4) верно для некоторого натурального числа n, то оно верно и для $n+1$, т. е. верно равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \qquad (5)$$

Прибавляя к обеим частям верного по предположению равенства (4) число $(n+1)^3$, получаем верное равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3. \qquad (6)$$

Преобразуем правую часть этого равенства к виду правой части равенства (5):

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) =$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Поэтому из справедливости для некоторого натурального n равенства (4) следует справедливость равенства (5). Учитывая, что равенство (4) верно и при $n = 1$, делаем вывод, что равенство (4) справедливо при любом натуральном n.

Упражнения

Методом математической индукции доказать, что для любого натурального n справедливо равенство **(405—406)**:

405. 1) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$;

2) $3 + 5 + 7 + \dots + (2n+1) = n(n+2)$;

3) $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$;

4) $3 + 9 + 27 + \dots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$.

406. 1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}$;

3) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$;

4) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$.

407. Методом математической индукции доказать:

1) формулу суммы S_n первых n членов арифметической прогрессии $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$, где a_1 — первый член, d — разность арифметической прогрессии;

2) формулу суммы S_n первых n членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$, где b_1 — первый член, q — знаменатель геометрической прогрессии, $q \neq 1$.

408. Доказать, что при любом натуральном n число:

1) $6^{2n-1} + 1$ делится на 7; 2) $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

§ 2. Правило произведения. Размещения с повторениями

В основной школе решались элементарные *комбинаторные задачи*, связанные с составлением и подсчётом различных *соединений* (комбинаций) из имеющихся элементов. Было сформулировано правило произведения, упрощающее подсчёт числа определённых соединений.

Правило произведения

Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них имеется m вариантов выбора второго элемента, то существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

Задача 1. Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 2, 4, 6, 8?

▷ В качестве первой цифры числа может быть выбрана любая из цифр 2, 4, 6, 8 ($n = 4$). Второй цифрой может служить любая из данных цифр 0, 2, 4, 6, 8 ($m = 5$).

Согласно правилу произведения число всевозможных двузначных чисел, составленных из предложенных цифр, равно $n \cdot m = 4 \cdot 5 = 20$. ◀

Задача 2. В школьной олимпиаде по математике победителями оказались 3 человека, в олимпиаде по физике — 2 человека, в олимпиаде по химии — 4 человека. На районные олимпиады по математике, физике и химии школа должна направить по одному учащемуся из числа победителей школьных туров по трём предметам. Сколькими способами можно это сделать?

▷ Согласно правилу произведения одного участника на олимпиаду по математике и одного участника на олимпиаду по физике можно выбрать $3 \cdot 2 = 6$ способами. К каждой из полученных 6 пар можно присоединить любого из четырёх победителей олимпиады по химии. Таким образом, троих человек для участия в названных трёх олимпиадах согласно правилу произведения можно выбрать $6 \cdot 4 = 24$ способами. ◀

Решение задачи 2 показало, что правило произведения может быть применено неоднократно для подсчёта соединений из трёх, четырёх и т. д. элементов, выбираемых из определённых множеств с конечным числом элементов.

Задача 3. Сколько различных четырёхбуквенных слов можно записать с помощью букв «м» и «а»? (*Словом* в комбинаторике называют любую последовательность букв.)

▷ Каждая из четырёх букв составляемого слова последовательно выбирается из имеющихся двух букв. Применив трижды правило произведения, найдём число составляемых четырёхбуквенных слов:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16. \blacktriangleleft$$

Заметим, что среди образуемых в задаче **3** слов были, например, слова «мммм» и «ммма», отличающиеся друг от друга наборами (составом) букв. Были, например, и слова «ааам» и «аама», отличающиеся друг от друга порядком расположения в них букв.

Определение

Соединения, содержащие n элементов, выбираемых из элементов m различных видов, и отличающиеся одно от другого либо составом, либо порядком следования в них элементов, называют *размещениями с повторениями* из m по n.

Число всевозможных размещений с повторениями из m по n обозначают $\overline{A}_m^n$ (A — первая буква французского слова arrangement — размещение, приведение в порядок) и читают: «Число размещений с повторениями из эм по эн» или «A с чертой из эм по эн».

Так, в задаче **3** было найдено

$$\overline{A}_2^4 = 16.$$

Можно доказать, что для любых натуральных m и n верно равенство

$$\overline{A}_m^n = m^n. \quad (1)$$

Доказательство формулы (1) проведём с помощью математической индукции по n — числу элементов в размещении при фиксированном m.

1) При $n = 1$ очевидно, что

$$\overline{A}_m^1 = m,$$

так как каждое размещение состоит из одного элемента и различные размещения получаются только из разных элементов, число видов которых равно m.

2) Предположим, что формула (1) верна для некоторого n. Докажем, что она верна и для $n + 1$, т. е. справедлива формула

$$\overline{A}_m^{n+1} = m^{n+1}.$$

Рассмотрим любое размещение (с повторениями), состоящее из n элементов, и присоединим (припишем) к нему элемент одного из имеющихся m видов. Получится размещение из $(n + 1)$ элементов. При этом очевидно, что из каждого размещения, состоящего из n элементов, получается столько размещений по $(n + 1)$ элементам, сколько имеется различных видов элементов, т. е. m размещений. Действуя таким способом, мы не упустим ни одного возможного размещения по $(n + 1)$ элементам и ни одного не получим дважды. Поэтому число размещений с повторениями из m видов элементов по $(n + 1)$ элементам в каждом выборе будет в m раз больше, чем число размещений с повторениями из m по n, т. е.

$$\overline{A}_m^{n+1} = m\overline{A}_m^n = m \cdot m^n = m^{n+1}.$$

Тем самым формула (1) доказана.

Задача 4. В двоичной системе счисления, применяемой в ЭВМ, используют два символа: 0 и 1. В некоторой ЭВМ каждое машинное слово записывается в памяти с помощью этих символов в 16 пронумерованных разрядах. Сколько различных машинных слов можно записать в этих разрядах?

▷ В каждом из 16 разрядов может стоять один из двух символов. Очевидно, число различных машинных слов равно $\overline{A}_2^{16} = 2^{16} = 65\ 536$. ◀

Упражнения

409. Сколько разных трёхзначных чисел, не имеющих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр:

1) 1, 2 и 3; 2) 1, 2, 3 и 4?

410. Сколько разных трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр:

1) 6, 7 и 8; 2) 6, 7, 8 и 9?

411. Сколько разных двузначных чисел можно записать, используя цифры 1, 2, 3 и 4?

412. Путешественник может попасть из пункта A в пункт C, проехав через пункт B. Между пунктами A и B имеются три автодороги, а между пунктами B и C — железнодорожное и речное сообщения. Сколько существует различных маршрутов между пунктами A и C?

413. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали по итогам первенства страны по футболу, если число участвующих в первенстве команд равно 16?

414. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день из шести разных учебных предметов?

---

415. В классе 20 учащихся. Необходимо выбрать из их числа старосту, физорга и культорга. Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если один ученик может занимать только одну должность?

416. В одной из стран автомобильные номера из четырёх цифр (нуль может стоять и на первом месте) записываются на пластинках пяти различных цветов (каждый из пяти штатов этой страны имеет номера своего цвета). Какое наибольшее число пластин с номерами может быть выдано автовладельцам в этой стране?

417. Десять участников конференции обменялись визитными карточками (каждый вручил свою карточку другим участникам). Сколько всего карточек было роздано?

418. Десять участников конференции обменялись рукопожатиями (каждый пожал руку каждому). Сколько всего рукопожатий было сделано?

419. Сколько различных шифров можно набрать в автоматической камере хранения, если шифр составляется с помощью любой из тридцати букв русского алфавита с последующим трёхзначным числовым кодом?

420. Сколько имеется семизначных натуральных чисел, в которых все цифры, стоящие на нечётных местах, различны?

421. Сколько нечётных четырёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если любую из них можно использовать в записи числа не более одного раза?

§ 3. Перестановки

Задача 1. Сколькими способами можно поставить рядом на полке четыре различные книги?

▷ На первое место можно поставить любую из четырёх книг, на второе — любую из трёх оставшихся, на третье — любую из двух оставшихся и на четвёртое место — последнюю оставшуюся книгу. Применяя последовательно правило произведения, получим $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, т. е. книги можно поставить 24 способами. ◀

В этой задаче фактически было найдено число всевозможных соединений из четырёх элементов, которые отличались одно от другого порядком расположения этих элементов. Такие соединения называют перестановками.

Определение

Перестановками из n различных элементов называются соединения, которые состоят из имеющихся n элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.

Число перестановок из n элементов обозначают P_n (P — первая буква французского слова permutation — перестановка) и читают «пэ энное».

В задаче **1** было найдено $P_4 = 24$.

Последовательно применяя правило произведения, можно получить формулу числа перестановок P_n из n различных элементов:

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n.$$

Произведение первых n натуральных чисел обозначают $n!$ (читается «эн факториал»), т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, причём, по определению, $1! = 1$. Таким образом,

$$\boldsymbol{P_n = n!} \qquad (1)$$

Задача 2. Сколькими способами можно положить 10 различных открыток в 10 имеющихся конвертов (по одной открытке в конверт)?

▷ По формуле (1) находим

$$P_{10} = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800. \blacktriangleleft$$

В рассмотренных задачах мы занимались перестановками различных элементов. Если же некоторые переставляемые элементы будут одинаковыми, то всевозможных различных перестановок из них будет меньше — некоторые перестановки совпадут одна с другой. Например, переставляя буквы в слове «парк», получим 24 различных «слова» — перестановок из четырёх различных букв. Если же записать всевозможные перестановки из букв слова «папа» (среди которых две пары одинаковых букв), то их получится всего шесть:

папа, паап, ппаа, апап, аапп, аппа.

Обобщённо аналогичные задачи формируются следующим образом. Пусть имеются элементы m различных видов. Требуется найти число перестановок, образованных из n_1 элементов первого вида, n_2 элементов второго вида, ..., n_m элементов m-го вида.

Число таких *перестановок с повторениями* обозначают $\overline{P}_{n_1, n_2, \ldots, n_m}$. Количество элементов в каждой из них равно $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$. Очевидно, что если бы все элементы в перестановках были различны, то их число равнялось бы $n!$. При наличии же одинаковых элементов число перестановок будет меньшим числом. Выведем формулу для подсчёта числа перестановок с повторениями.

○ Рассмотрим перестановку элементов

$$\underbrace{aa\ldots a}_{n_1}\underbrace{bb\ldots b}_{n_2}\ldots\underbrace{zz\ldots z}_{n_m}, \qquad (2)$$

в которой последовательно записаны все элементы первого вида (их число равно n_1), элементы второго вида (их число равно n_2), ..., элементы m-го вида (их число равно n_m).

Элементы любого k-го вида можно переставить друг с другом $n_k!$ способами. Но в связи с тем что эти элементы одинаковы, то перестановки из них ничем не отличаются одна от другой. Например, в перестановке «ппаа» ничего не изменится, если поменять местами первый со вторым и (или) третий с четвёртым элементами.

Перестановки элементов первого, второго, ..., m-го видов можно осуществлять независимо друг от друга. Поэтому согласно правилу произведения элементы перестановки (2), не меняя её вида, можно переставлять друг с другом $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!$ способами. Элементы любой другой перестановки (отличной от (2)), содержащей n_1 элементов первого вида, n_2 элементов второго вида, ..., n_{m_1} элементов m-го вида, также можно переставлять $n_1 \cdot \ldots \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m!$ способами, не меняя её вида. Значит, общее число перестановок с повторениями будет в $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!$ раз меньше, чем $n!$. Таким образом,

$$\overline{P}_{n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_m} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!}, \qquad (3)$$

где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$. ●

Заметим, что задача о подсчёте числа перестановок из букв слова «папа» сводилась к нахождению числа перестановок с повторениями $\overline{P}_{2,2}$:

$$\overline{P}_{2,2} = \frac{(2+2)!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6.$$

Задача 3. Слова и фразы с переставленными буквами называют *анаграммами*. Сколько анаграмм можно составить из слова «макака»?

▷ В слове из 6 букв «макака» буква «а» используется 3 раза, буква «к» — 2 раза, а буква «м» — 1 раз. Согласно формуле (3) число всевозможных анаграмм равно

$$\overline{P}_{3,2,1} = \frac{(3+2+1)!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 60. \text{ ◀}$$

Упражнения

422. Найти значение:

1) P_6; 2) P_8; 3) P_7; 4) P_9.

423. Сколькими способами можно рассадить четверых детей на четырёх стульях в столовой детского сада?

424. Сколькими способами можно установить дежурство по одному человеку в день среди семи учащихся группы в течение 7 дней (каждый должен отдежурить один раз)?

425. Сколько пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы:

1) последней была цифра 4;
2) первой была цифра 2, а второй — цифра 3;
3) первыми были цифры 2 и 3, расположенные в любом порядке.

426. Упростить форму записи выражений (k — натуральное число, $k > 5$):

1) $7! \cdot 8$; 2) $16 \cdot 15!$; 3) $12! \cdot 13 \cdot 14$;
4) $k! \cdot (k+1)$; 5) $(k-1)! \cdot k$; 6) $(k-1)! \cdot k(k+1)$;
7) $(k-2)! \cdot (k-1)k$; 8) $(k-5)! \cdot (k^2 - 7k + 12)$.

427. Упростить:

1) $\frac{19!}{18!}$; 2) $\frac{22!}{20!}$; 3) $\frac{6!\cdot 4!}{8!}$;

4) $\frac{10!}{8!\cdot 3!}$; 5) $\frac{P_{n+2}}{P_n}$; 6) $\frac{P_{n+1}}{P_{n+3}}$;

7) $\frac{m!\cdot(m+1)}{(m+2)!}$; 8) $\frac{(k+4)!\cdot(k+5)}{(k+6)!}$,

если буквами k, m, n обозначены натуральные числа.

428. Решить уравнение относительно n:

1) $\frac{P_n}{P_{n+1}}=\frac{1}{3}$; 2) $\frac{nP_{n-2}}{P_n}=0{,}1$; 3) $\frac{2P_{n-1}}{P_{n+1}}-1=0$.

429. Сколько различных «слов» можно составить, переставляя местами буквы в слове *треугольник* (считая и само это слово)?

430. Сколько различных пятизначных чисел (не содержащих одинаковых цифр), не кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

431. Имеется 10 книг, среди которых:
1) 8 книг различных авторов и двухтомник одного автора, которого не было среди предыдущих восьми;
2) 7 книг разных авторов и трёхтомник восьмого автора.
Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

432. Сколько анаграмм можно составить из слова:
1) клок; 2) окно; 3) драма; 4) банан; 5) шарабан; 6) кукушка; 7) математика; 8) тетраэдр?

433. На Новый год троим братьям родители купили в подарок 6 различных книг и решили каждому подарить по 2 книги. Сколькими способами можно сделать эти подарки?

434. Когда Х. Гюйгенс (1629—1695) открыл кольцо Сатурна, он составил следующую анаграмму:

aaaaaaa ccccc d eeeee g h iiiiiii llll mm

nnnnnnnnn oooo pp q rr s ttttt uuuuu.

Этими буквами записывается фраза «Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato» («Окружён кольцом тонким, плоским, нигде не подвешенным, наклонным к эклиптике»). Сколько различных анаграмм можно составить из букв зашифрованной Гюйгенсом фразы?

§ 4. Размещения без повторений

<u>Задача 1.</u> Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

▷ Перебором убедимся в том, что из четырёх цифр 1, 2, 3, 4 можно составить 12 двузначных чисел, удовлетворяющих условию:

12, 13, 14,
21, 23, 24,
31, 32, 34,
41, 42, 43.

В записи двузначного числа на первом месте может стоять любая из данных четырёх цифр, а на втором — любая из трёх оставшихся. По правилу произведения таких двузначных чисел $4 \cdot 3 = 12$. ◀

При решении задачи **1** из четырёх данных элементов (цифр 1, 2, 3, 4) были образованы всевозможные соединения по два элемента в каждом, причём любые два соединения отличались друг от друга либо составом элементов (например, 12 и 24), либо порядком их расположения (например, 12 и 21). Такие соединения называют размещениями.

Определение

Размещениями из m элементов по n элементов ($n \leqslant m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Иногда такие размещения называют *размещениями без повторений*.

Число всевозможных размещений без повторений из m элементов по n элементов обозначают A_m^n и читают «A из эм по эн». Так, например, при решении задачи **1** было установлено, что $A_4^2 = 12$.

Выведем формулу для вычисления A_m^n — числа размещений из m элементов по n элементов.

○ Пусть имеется m различных элементов. Тогда число размещений, состоящих из одного элемента, выбранного из имеющихся m элементов, равно m, т. е. $A_m^1 = m$.

Чтобы составить все размещения из m элементов по 2, к каждому из ранее образованных размещений из m элементов по 1 будем последовательно присоединять по одному из оставшихся $m - 1$ элементов. По правилу произведения число таких соединений равно $m(m-1)$. Таким образом, $A_m^2 = m(m-1)$.

Для составления всех размещений из m по 3 к каждому из ранее полученных размещений из m элементов по 2 присоединим по очереди по одному из оставшихся $(m-2)$ элементов. По правилу произведения число таких соединений равно $m(m-1)(m-2)$, т. е. $A_m^3 = m(m-1)(m-2)$.

Последовательно применяя правило произведения, для любого $n \leqslant m$ получаем

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1)). \qquad (1)$$

Например, $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$; $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Отметим, что правая часть формулы (1) содержит произведение n последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых равно m. Пусть в формуле (1) $m = n$. Тогда

$$A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = P_n,$$

т. е. число размещений из n элементов по n равно числу перестановок из этих элементов:

$$A_n^n = P_n. \qquad (2)$$

__Задача 2.__ Сколькими способами можно обозначить вершины данного треугольника, используя буквы A, B, C, D, E, F?

▷ Задача сводится к нахождению числа размещений из 6 элементов по 3 элемента в каждом. По формуле (1) находим $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, т. е. вершины можно обозначить 120 способами. ◀

__Задача 3.__ Решить уравнение $A_n^2 = 42$ относительно n.

▷ Заметим, что $n \geqslant 2$, по формуле (1) имеем $A_n^2 = n(n-1)$. По условию $A_n^2 = 42$, поэтому $n(n-1) = 42$, откуда $n^2 - n - 42 = 0$, $n_1 = 7$, $n_2 = -6$.

Так как корнем уравнения должно быть натуральное число $n \geqslant 2$, то $n_2 = -6$ — посторонний корень.

Ответ. $n = 7$. ◀

Преобразуем формулу (1) для нахождения числа размещений A_m^n.

○ Запишем формулу (1) так:

$$A_m^n = (m-n+1)(m-n+2) \cdot \ldots \cdot (m-1)m.$$

Умножим обе части этого равенства на

$$(m-n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-n),$$

получим

$$(m-n)! \cdot A_m^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-n)(m-n+1)(m-n+2) \cdot \ldots \cdot (m-1)m,$$

т. е. $(m-n)! \cdot A_m^n = m!$, откуда

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}. \qquad (3)$$

Для того чтобы формула (3) была справедлива не только для $m > n$, но и для $m = n$, полагают $0! = 1$.

Задача 4. Вычислить

$$\frac{A_{12}^5 + A_{12}^6}{A_{12}^4}.$$

▷ По формуле (3) находим

$$\frac{A_{12}^5 + A_{12}^6}{A_{12}^4} = \frac{\frac{12!}{7!} + \frac{12!}{6!}}{\frac{12!}{8!}} = \frac{8!}{7!} + \frac{8!}{6!} = 8 + 7 \cdot 8 = 64.$$ ◀

Упражнения

435. Вычислить:

1) A_3^1; 2) A_3^2; 3) A_7^2; 4) A_7^7;

5) A_8^3; 6) A_8^4; 7) A_{10}^2; 8) A_{10}^4.

436. В классе изучают 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть 6 разных предметов?

437. Сколько существует способов для обозначения вершин данного четырёхугольника с помощью букв A, B, C, D, E, F?

438. В классе 30 человек. Сколькими способами могут быть выбраны из их состава староста и казначей?

439. В чемпионате по футболу участвуют 10 команд. Сколько существует различных возможностей занять командам первые три места?

440. Найти значение выражения:

1) $\dfrac{A_{11}^3 - A_{10}^2}{A_9^1}$; 2) $\dfrac{A_{12}^4 \cdot A_7^7}{A_{11}^9}$.

441. Решить относительно m уравнение:

1) $A_m^2 = 90$; 2) $A_m^3 = 56m$;

3) $A_{m+1}^2 = 156$; 4) $A_m^5 = 18A_{m-2}^4$.

442. Найти значение выражения

$$\frac{A_{10}^n \cdot P_{11-n}}{P_9}, \text{ где } n \leqslant 10.$$

443. В шахматном турнире участвуют пять юношей и три девушки. Сколькими способами могут распределиться места среди девушек, если все участники набрали разные количества очков?

444. Доказать, что $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$, где $k < n$, $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}$.

§ 5. Сочетания без повторений и бином Ньютона

Задача 1. Из пяти шахматистов для участия в турнире нужно выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать?

▷ Из пяти шахматистов можно составить A_5^2 пар, отличающихся друг от друга либо составом, либо порядком следования в паре. Но из этих пар надо выбрать только те, которые различаются лишь составом участников. Таких пар в 2 раза меньше, поэтому их число равно $\frac{A_5^2}{2}=\frac{5\cdot 4}{2}=10$, т. е. двоих можно выбрать 10 способами. ◀

При решении этой задачи из 5 человек были образованы пары — соединения по 2 человека, которые отличались друг от друга составом. Такие соединения называют сочетаниями.

Определение

Сочетаниями из m элементов по n в каждом ($n \leqslant m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m различных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом.

Иногда такие сочетания называют *сочетаниями без повторений*.

Число всевозможных сочетаний из m различных элементов по n элементов обозначают C_m^n (C — первая буква французского слова combinaison — сочетание) и читают «це из эм по эн». При решении задачи 1 было установлено, что $C_5^2=10$.

Выведем формулу для подсчёта числа сочетаний.

○ Образуем все соединения, содержащие n элементов, выбранных из данных m разных элементов, без учёта порядка их расположения. Число таких соединений равно C_m^n.

Из каждого полученного соединения перестановками его элементов можно образовать $P_n=n!$ соединений, отличающихся одно от другого только порядком расположения элементов. Тем самым получаются размещения из m элементов по n, число которых равно A_m^n. По правилу произведения число таких соединений равно $C_m^n \cdot P_n$. Итак, $C_m^n \cdot P_n = A_m^n$, откуда

$$C_m^n=\frac{A_m^n}{P_n}. \quad \bullet \qquad (1)$$

Например, $C_4^3=\frac{A_4^3}{P_3}=\frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}=4.$

Заметим, что если $m=n$, то $C_n^n=\frac{A_n^n}{P_n}=\frac{P_n}{P_n}=1.$

Учитывая, что $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ при $m \geqslant n$ и $P_n = n!$, формулу (1) можно представить в виде

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}, \qquad (2)$$

где $m \geqslant n$.

Например, $C_5^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$.

Задача 2. Сколько существует способов выбора трёх карт из колоды в 36 карт?

▷ Изъятые из колоды 3 карты без учёта порядка их расположения в наборе являются сочетаниями из 36 по 3. По формуле (2) находим число всех таких сочетаний:

$$C_{36}^3 = \frac{36!}{(36-3)!\,3!} = \frac{36!}{33! \cdot 6} = \frac{34 \cdot 35 \cdot 36}{6} = 34 \cdot 35 \cdot 6 = 7140,$$

т. е. существует 7140 способов. ◀

Замечание. В учебнике 10 класса при разложении степени бинома $(a+b)^n$ было введено понятие биномиальных коэффициентов, которые в общем виде обозначались C_m^n. Была без доказательства принята формула (2) для вычисления этих коэффициентов. Теперь стало очевидным, что ранее рассмотренные биномиальные коэффициенты — это числа сочетаний из m по n.

С помощью формулы (2) в курсе 10 класса доказывались свойства сочетаний:

$$C_m^n = C_m^{m-n}, \qquad (3)$$

$$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}. \qquad (4)$$

Докажем свойство (4), так называемое *рекуррентное свойство* числа сочетаний, пользуясь соотношением (1):

○ $C_m^n + C_m^{n+1} = \frac{A_m^n}{P_n} + \frac{A_m^{n+1}}{P_{n+1}} =$

$$= \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1))}{n!} + \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1))(n+1) + m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1))(\cancel{n}+1+m-\cancel{n})}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(m+1) \cdot m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1))}{(n+1)!} = \frac{A_{m+1}^{n+1}}{P_{n+1}} = C_{m+1}^{n+1}. \quad ●$$

На основе свойства (4) и с учётом того, что $C_m^0 = C_m^m = 1$, составляется так называемый *треугольник Паскаля* — таблица значений C_m^n (ниже приведён фрагмент таблицы). Иногда эту таблицу располагают в виде «равнобедренного треугольника», как это было сделано в учебнике 10 класса (см. также последний форзац этой книги).

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Эта таблица наглядно иллюстрирует и свойство (3) — равны числа, одинаково удалённые от концов строки треугольника Паскаля $\left(C_m^n = C_m^{m-n}\right)$.

Треугольником Паскаля пользуются при возведении бинома $a + b$ в натуральные степени по знакомой вам из курса 10 класса формуле *бинома Ньютона*:

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \ldots + C_m^{m-1} a b^{m-1} + C_m^m b^m. \quad (5)$$

Задача 3. Записать разложение бинома $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^5$.

▷ По формуле (5) находим:

$$\left(2x - \frac{1}{2}\right)^5 = C_5^0 (2x)^5 + C_5^1 (2x)^4 \left(-\frac{1}{2}\right) + C_5^2 (2x)^3 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + C_5^3 (2x)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 +$$

$$+ C_5^4 (2x) \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + C_5^5 \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = 32x^5 + 5 \cdot 16x^4 \left(-\frac{1}{2}\right) + 10 \cdot 8x^3 \cdot \frac{1}{4} +$$

$$+ 10 \cdot 4x^2 \left(-\frac{1}{8}\right) + 5 \cdot 2x \cdot \frac{1}{16} + \left(-\frac{1}{32}\right) =$$

$$= 32x^5 - 40x^4 + 20x^3 - 5x^2 + \frac{5}{8}x - \frac{1}{32}. \blacktriangleleft$$

Задача 4. Доказать свойство элементов строки треугольника Паскаля

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m. \quad (6)$$

▷ Равенство (6) получается из равенства (5) при $a = b = 1$. ◀

Проведём доказательство справедливости формулы бинома Ньютона (5), используя теорию соединений с повторениями.

○ Проследим процесс возведения в натуральную степень бинома $a + b$, не выполняя приведения подобных слагаемых:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa + ab + ba + bb, \qquad (7)$$

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) =$$
$$= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb. \qquad (8)$$

Заметим, что в результат возведения бинома во вторую степень (7) входят все размещения с повторениями, составленные из букв a и b по две буквы в каждом размещении. В результат возведения бинома в третью степень (8) входят все размещения с повторениями, составленные из тех же букв a и b по три буквы в каждом.

После раскрытия скобок при возведении двучлена $a + b$ в степень m, т. е. в выражении

$$\underbrace{(a+b)(a+b)\cdot \ldots \cdot (a+b)}_{m \text{ множителей}}, \qquad (9)$$

будут получены всевозможные размещения с повторениями из букв a и b, состоящие из m элементов.

Подобными членами после раскрытия скобок в равенстве (9) будут слагаемые, содержащие одинаковое число букв a (очевидно, букв b в них тоже будет одинаковое число). Выясним, сколько будет подобных членов, содержащих k раз букву b (букву a соответственно $(m - k)$ раз).

Эти члены являются перестановками с повторениями, составленными из k букв b и $m - k$ букв a. Согласно формуле (3) из § 3 имеем

$$\overline{P}_{k,\, m-k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}.$$

Но выражение, стоящее в правой части этой формулы, есть не что иное, как C_m^k. Следовательно, $\overline{P}_{k, m-k} = C_m^k$, а значит, после приведения подобных слагаемых в равенстве (9) одночлен с буквенной частью $b^k a^{m-k}$ (или $a^{m-k} b^k$) будет иметь коэффициент C_m^k. Это доказывает формулу (5). ●

Упражнения

445. Найти:

1) C_6^2; 2) C_8^3; 3) C_8^6; 4) C_8^5; 5) C_9^1; 6) C_9^8;
7) C_{10}^{10}; 8) C_{10}^0; 9) C_{10}^3; 10) C_{10}^7; 11) C_{100}^{98}; 12) C_{70}^2.

446. Сколькими способами можно делегировать троих студентов на межвузовскую конференцию из 9 членов научного общества?

447. Сколько различных аккордов, содержащих 3 звука, можно взять на 13 клавишах одной октавы?

448. В помещении 20 ламп. Сколько существует разных вариантов освещения, при котором должны светиться ровно 18 ламп?

449. Имеется 15 точек на плоскости, причём никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Сколько различных отрезков можно построить, соединяя эти точки попарно?

450. На окружности отмечено 12 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

451. Сколькими способами можно составить из партии, содержащей n деталей, комплект из p деталей ($p \leqslant n$) для контроля за качеством продукции?

452. Записать разложение бинома:

1) $(1+x)^7$; 2) $(x-2)^4$; 3) $(2x+3)^4$;

4) $(3x-2)^4$; 5) $\left(2a-\frac{1}{2}\right)^5$; 6) $\left(\frac{a}{2}+2\right)^6$.

---

453. В школьном хоре 6 девочек и 4 мальчика. Сколькими способами можно выбрать из состава школьного хора двух девочек и одного мальчика для участия в выступлении окружного хора?

454. Решить уравнение относительно m:

1) $C_m^3 = \frac{4}{15}C_{m+2}^4$; 2) $12C_{m+3}^{m-1} = 55A_{m+1}^2$;

3) $5C_m^3 = C_{m+2}^4$; 4) $C_{3m+1}^{3m-1} = 120$.

455. Найти значение выражения, предварительно упростив его:

1) $C_{15}^{12} + C_{15}^{13}$; 2) $C_{11}^3 + C_{11}^2$;

3) $C_{21}^4 - C_{20}^4$; 4) $C_{101}^3 - C_{100}^3$.

456. С помощью свойств числа сочетаний найти сумму:

1) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$; 2) $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5$.

457. Решить уравнение:

1) $C_x^2 + C_x^3 = 15(x-1)$; 2) $C_{x-1}^3 + C_{x-1}^2 = 15(x-2)$.

458. Доказать свойство числа сочетаний

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

459. В вазе лежат 5 разных яблок и 6 различных апельсинов. Сколькими способами из них можно выбрать 2 яблока и 2 апельсина?

460. Колода карт содержит по 13 карт каждой из четырёх мастей. Сколькими способами можно выбрать из колоды следующий набор: 3 карты пиковой, 4 карты трефовой, 5 карт червовой, 2 карты бубновой масти?

461. Найти член разложения $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, содержащий x^2.

462. Найти член разложения $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий x^3.

463. На плоскости проведены k прямых, причём никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Определить число точек пересечения этих прямых.

464. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 чёрных шашек на 32 чёрных клетках шахматной доски?

465. С помощью математической индукции доказать справедливость формулы (6).

§ 6. Сочетания с повторениями

Определение

Сочетаниями с повторениями из m по n называют соединения, состоящие из n элементов, выбранных из элементов m разных видов, и отличающиеся одно от другого хотя бы одним элементом.

Число сочетаний с повторениями из m по n обозначают $\overline{C}_m^n$.

<u>Задача 1.</u> В киоске продаются карандаши трёх цветов: красные, синие и чёрные (карандашей каждого цвета в киоске больше четырёх). Сколькими способами можно купить 4 карандаша?

▷ В задаче требуется найти число соединений, состоящих из 4 элементов, выбранных из элементов 3 видов, порядок расположения которых в соединениях не имеет значения, т. е. нужно найти $\overline{C}_3^4$. Обозначим карандаш красного цвета буквой **к**, синего — буквой **с**, чёрного — буквой **ч**. Выпишем всевозможные наборы из 4 карандашей:

к, к, к, к	**к, к, к, ч**	**к, к, ч, ч**	**к, ч, ч, ч**	**ч, ч, ч, ч**
к, к, к, с	**к, к, с, ч**	**к, с, ч, ч**	**с, ч, ч, ч**	
к, к, с, с	**к, с, с, ч**	**с, с, ч, ч**		(1)
к, с, с, с	**с, с, с, ч**			
с, с, с, с				

Число полученных соединений $\overline{C}_3^4 = 15$. ◀

Для вывода формулы числа сочетаний с повторениями будем использовать искусственный приём, который поясним на сочетаниях, составленных в задаче **1**.

Так как в сочетаниях (1) порядок расположения элементов не имеет значения, то при перечислении сочетаний все элементы одного вида будем записывать рядом, а между наборами элементов разных видов будем ставить *знак границы видов* □. В задаче **1** различных видов элементов было 3, значит, границ □ должно быть 2. Например: **к□ч,ч□с**; **к□ч□с,с**. При «расширении» в наборе числа элементов некоторого вида граница видов будет «перемещаться». С использованием знака □ перечень соединений (1) может быть записан следующим образом:

к,к,к,к □□   к,к,к,□□ч   к,к □□ч,ч   к □□ч,ч,ч   □□ч,ч,ч,ч
к,к,к □с □   к,к,□с □ч   к □с □ч,ч   □с □ч,ч,ч
к,к,□с, с □   к □с, с □ч   □с, с □ч,ч   (2)
к □с, с, с □   □с, с, с □ч
□с, с, с, с □

В общем виде любой набор из n элементов, выбранных из элементов m видов, можно представить в виде

$$\underbrace{\ \ldots\ }_{n_1}\ \square\ \underbrace{\ \ldots\ }_{n_2}\ \square\ldots\square\ \underbrace{\ \ldots\ }_{n_m} \tag{3}$$

где число разделительных знаков □ равно $m-1$, хотя бы одно из чисел n_1, n_2, ..., n_m отлично от нуля и $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$.

Так, например, в каждом из соединений (2) число знаков □ равно $m-1=3-1=2$, а число букв $n=4$.

Легко заметить, что как соединения (2) в наборе, так и соединения (3) отличаются друг от друга, по существу, лишь месторасположением в них разделителей. Заменим все элементы-буквы знаком ■. Тогда соединения (3) можно представить в виде

$$\underbrace{\blacksquare\blacksquare\ldots\blacksquare}_{n_1}\ \square\ \underbrace{\blacksquare\blacksquare\ldots\blacksquare}_{n_2}\ \square\ldots\square\ \underbrace{\blacksquare\blacksquare\ldots\blacksquare}_{n_m}, \tag{4}$$

где $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$.

Учитывая принцип составления соединений (4), видим, что $\overline{C}_m^n$ равно числу перестановок с повторениями из $(m-1)$ элементов □ и n элементов ■, т. е.

$$\overline{C}_m^n=\overline{P}_{m-1,\,n}=\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!}. \tag{5}$$

Таким образом, в задаче **1** подсчитанное число $\overline{C}_3^4$ можно найти с помощью формулы (5):

$$\overline{C}_3^4=\frac{(3+4-1)!}{(3-1)!\,4!}=\frac{6!}{2!\,4!}=\frac{5\cdot 6}{2}=15.$$

Задача 2. В продажу поступили мячи 7 различных цветов (мячей каждого цвета больше трёх). Сколькими способами можно купить 3 мяча?

▷ Не имеет значения, в каком порядке будут находиться мячи в приобретённом наборе из 3 мячей. Поэтому решение задачи сводится к подсчёту числа сочетаний с повторениями из 7 по 3:

$$\overline{C}_7^3=\frac{(7+3-1)!}{(7-1)!\,3!}=\frac{9!}{6!\,3!}=\frac{7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3}=84,$$

т. е. покупку можно совершить 84 способами. ◀

Упражнения

466. Вычислить:

1) $\overline{C}_4^6$; 2) $\overline{C}_6^4$; 3) $\overline{C}_9^2$; 4) $\overline{C}_2^9$.

467. В кафе подавали мороженое четырёх видов. Сколькими способами трое друзей могут сделать заказ официанту на 3 порции мороженого?

468. Семь детских игрушек выбираются из игрушек четырёх видов. Сколькими способами это можно сделать, если игрушек каждого вида больше семи?

469. Сколько существует различных прямоугольных параллелепипедов, если длина каждого его ребра может выражаться любым целым числом от 1 до 8?

Упражнения к главе V

470. Вычислить:

1) $\frac{5!-4!}{2!}$; 2) $\frac{7!-6!}{5!}$; 3) $\frac{54!}{53!}+\frac{70!}{69!}$; 4) $\frac{60!}{58!}-\frac{50!}{48!}$.

471. Упростить:

1) $\frac{(n+2)!}{n!}$; 2) $\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)n!$.

472. Найти значение выражения:

1) $\frac{A_6^3}{P_4}+\frac{A_{11}^6}{11P_6}$; 2) $\left(\frac{C_{11}^7}{10}-\frac{C_7^2}{7}\right)\frac{P_5}{A_6^4}$.

473. Решить относительно n уравнение:

1) $\frac{P_{n+2}}{P_n}=12$; 2) $\frac{1}{P_{n-4}}=\frac{20}{P_{n-2}}$; 3) $A_{n+1}^4=6n(n+1)$;

4) $A_{n-1}^5=2A_{n-2}^5$; 5) $\frac{C_{n+1}^3}{C_n^4}=\frac{8}{5}$; 6) $C_n^3=4C_{n-2}^2$.

474. Сколькими способами можно составить график очерёдности ухода в отпуск восьми сотрудников лаборатории?

475. Сколько существует способов делегирования на конференцию двоих человек из восьми сотрудников лаборатории?

476. Восемь сотрудников лаборатории участвовали в научном конкурсе, по результатам которого были присуждены одна первая и одна вторая премии. Сколькими способами могли быть присуждены рассматриваемые премии?

477. Сколькими разными способами можно рассадить троих учащихся, пришедших на факультативные занятия, на сорока имеющихся в классе стульях?

478. Сколькими способами можно назначить патруль из двух солдат и одного офицера, если в роте 80 солдат и 5 офицеров?

479. Сколько диагоналей имеет выпуклый пятиугольник? семиугольник? n-угольник?

480. Найти значение выражения, предварительно упростив его:

1) $C_{13}^{10}+C_{13}^{11}$; 2) $C_{14}^3+C_{14}^2$.

481. Используя свойства числа сочетаний, найти:

1) $C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4$; 2) $C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3$.

482. Найти разложение бинома:

1) $(x+1)^6$; 2) $(x-1)^5$; 3) $(2-a)^4$; 4) $(a+3)^4$.

483. Доказать, что число перестановок при любом $n>1$ является чётным числом.

484. Имеются отличающиеся друг от друга 7 роз и 5 веток зелени. Нужно составить букет из трёх роз и двух веток зелени. Сколькими способами это можно сделать?

485. В двоичной системе счисления, используемой в ЭВМ, информация записывается с помощью цифр 0 и 1. В некоторой ЭВМ каждое «машинное слово» записывается в ячейке памяти, содержащей 32 пронумерованных двоичных разряда. Сколько различных «слов» может быть записано в такой ячейке?

486. В одной стране номера автомобилей составляются из двух неодинаковых букв алфавита, содержащего 20 букв, и четырёх цифр (с возможными повторами). Скольким машинам можно присвоить полученные таким образом номера?

487. Сколько различных экзаменационных комиссий, состоящих из 5 членов, можно образовать из 10 преподавателей?

488. С помощью свойств числа сочетаний найти:

1) $C_{12}^2+C_{12}^3+C_{13}^4$; 2) $C_9^3+C_9^4+C_{10}^5$; 3) $C_8^4-C_7^4$; 4) $C_9^3-C_8^2$;

5) $C_7^4+C_7^5+C_7^6+C_7^7$; 6) $C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_9^9+C_9^8+C_9^7+C_9^6+C_9^5$.

489. Найти разложение бинома:

1) $(2a-1)^5$; 2) $\left(\frac{1}{2}+2b\right)^6$; 3) $\left(3x+\frac{1}{3}\right)^4$; 4) $\left(\frac{y}{3}-3\right)^5$.

490. Допустим, что Кай из сказки «Снежная королева» выкладывал слово *вечность* не из льдинок, а из букв *в, е, ч, н, о, с, т, ь,* каждая из которых написана на своей льдинке. Какое наибольшее число попыток расположения льдинок могло понадобиться Каю до того, как выложилось слово *вечность*?

491. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 8 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестёрку, состоящую из вратаря, двух защитников и трёх нападающих?

492. Сколько различных делителей у числа: 1) 100; 2) 1000?

493. Используя бином Ньютона, найти приближённое значение степени: 1) $1{,}002^8$; 2) $0{,}997^9$.

494. В лифте, останавливающемся на 6 этажах, едут 5 человек. Каждый из них, независимо друг от друга, может выйти из лифта на любом этаже. Сколько существует вариантов выходящих на этих этажах людей.

495. По m единицам пространства распределяются N различных частиц газа. Каждая частица может занять место в любой единице пространства, независимо от остальных частиц. И в каждой единице пространства может оказаться любое число частиц. Найти число всевозможных распределений частиц по данным единицам пространства.

496. Сколько различных значений сопротивлений на участке цепи можно получить, имея в наличии три различных сопротивления R_1, R_2, R_3? Варианты соединения, дающие одинаковые сопротивления всего участка цепи, считать одинаковыми вариантами. Рассчитать все возможные сопротивления получаемых участков (применяя знания расчётов сопротивления при последовательном и параллельном соединении проводников).

497. Сколько существует различных комбинаций соединения четырёх различных сопротивлений на одном участке цепи? Варианты соединения, дающие одинаковые сопротивления всего участка цепи, считать одним вариантом.

498. Сколькими способами можно поставить на шахматной доске чёрную и белую ладьи так, чтобы они не били друг друга?

499. В чемпионате страны по футболу участвуют 18 команд, каждые 2 команды встречаются на футбольных полях 2 раза. Сколько матчей играется в сезоне?

500. Сколькими способами $2n$ разных элементов можно разбить на пары?

501. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой из двух стопок было по 2 туза?

502. В классе 28 учеников. Каждый день двое из них назначаются дежурными. Можно ли составить на весь год ежедневное расписание дежурства таким образом, чтобы никакие 2 ученика не дежурили вместе в течение года дважды?

503. Найти член разложения бинома $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$, содержащий x^4.

504. Найти член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, содержащий $\frac{1}{x}$.

505. Даны числа от 1 до 20. Сколькими способами можно выбрать из них 3 числа, сумма которых будет числом чётным?

506. Доказать, что число *круговых перестановок* (важен порядок следования расположенных на окружности элементов, а начальный элемент безразличен) из n элементов равно $(n-1)!$.

507. Найти значение выражения:

1) $\overline{P}_{2,2,4} : \overline{C}_3^5$; 2) $\overline{A}_5^2 + \overline{C}_6^3 : \overline{P}_{3,5}$.

508. В цветочном магазине продают цветы 7 видов (каждый вид представлен более чем 3 цветками). Сколькими способами можно составить букет из 3 цветков?

Вопросы к главе V

1. Решением каких задач занимается комбинаторика?
2. Сформулировать правило произведения.
3. Какие соединения называют размещениями с повторениями? Чему равно число размещений с повторениями из m элементов по n?
4. Какие соединения называют перестановками? Чему равно число перестановок из n элементов?
5. Какие соединения называют размещениями (без повторений)? Чему равно число размещений (без повторений) из m элементов по n?
6. Какие соединения называют сочетаниями (без повторений)? Чему равно число сочетаний (без повторений) из m элементов по n?
7. Перечислить свойства сочетаний без повторений.
8. Что такое *треугольник Паскаля*?
9. Записать формулу *бинома Ньютона*.

Проверь себя!

1. Найти:
   1) P_7; 2) A_8^3; 3) C_8^3; 4) $\frac{P_6}{A_7^5}$.
2. Упростить:
   1) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$; 2) $\frac{(n-4)!}{(n-2)!}$.
3. Сколькими способами можно выбрать для подарка 3 предмета из девяти различных предметов?
4. В одном классе изучается 10 разных учебных предметов. В пятницу завуч должен поставить в расписание этого класса 4 различных предмета. Сколькими способами он может это сделать?
5. Сколькими разными способами можно разместить 6 групп школьников в шести классных комнатах (по одной группе в комнате)?
6. Сколько существует трёхзначных цифровых кодов, в которых нет одинаковых цифр?
7. Записать разложение бинома: 1) $(x+y)^6$; 2) $(1-a)^5$.

---

1. Решить относительно n уравнение:
   1) $P_{n+4} = 20P_{n+2}$; 2) $A_{n+1}^3 = C_{n+2}^2$.
2. Решить неравенство $(n-3)P_{n+2} < P_{n+1}$.

3. Шифр некоторого сейфа образуется из двух чисел. Первое, трёхзначное число, составляется из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (каждая цифра встречается не более одного раза); второе, пятизначное число, записывается с помощью цифр 6, 7, 8. Сколько различных шифров можно использовать в этом сейфе?

4. Сколькими способами можно разложить 6 монет по двум карманам?

5. Используя свойство числа сочетаний, найти:

1) $C_{10}^7 - C_9^6$; 2) $C_9^5 + C_9^6 + C_9^7 + C_9^8 + C_9^9$.

6. Найти член разложения бинома $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{20}$, содержащий x^5.

Историческая справка

Задачи, связанные с возможным выбором и упорядочением определённых объектов, приходилось решать во многих сферах человеческой деятельности. С такими задачами, получившими название «комбинаторные», люди сталкивались ещё в древности. Так, в Древнем Китае не только математики, но и простые люди увлекались составлением *магических квадратов* (в них заданные числа надо было расположить так, чтобы их суммы по горизонталям, вертикалям и главным диагоналям были одинаковые). В Древней Греции занимались теорией *фигурных чисел*, а также составлением различных фигур из частей специальным способом разрезанного квадрата. В разных странах решались комбинаторные задачи, связанные с такими играми, как шахматы, шашки, карты, кости и т. п.

Первые научные исследования по комбинаторике принадлежат итальянским учёным Дж. Кардано (1501—1576), Н. Тарталье (ок. 1499—1557), Г. Галилею (1564—1642) и французским учёным Б. Паскалю (1623—1662) и П. Ферма (1601—1665). Комбинаторика как наука стала развиваться в XVIII в. параллельно с возникновением теории вероятностей, так как для решения вероятностных задач необходимо было подсчитывать число разных комбинаций элементов.

Комбинаторику как самостоятельный раздел математики первым стал рассматривать немецкий учёный Г. Лейбниц в своей работе «Об искусстве комбинаторики». Ему также принадлежит и введение самого термина «комбинаторика». Значительный вклад в развитие комбинаторики внёс Л. Эйлер.

В современном обществе с развитием вычислительной техники комбинаторика добилась новых успехов. Так, с помощью ЭВМ была решена комбинаторная задача, известная под названием *проблема четырёх красок*. Удалось доказать, что любую карту можно раскрасить в 4 цвета таким образом, что никакие две страны, имеющие общую границу, не будут окрашены в один и тот же цвет.

Глава VI

Элементы теории вероятностей

Без учёта влияния случайных явлений человек становится бессильным управлять развитием интересующих его процессов в желательном для него направлении.

Б. В. Гнеденко

Из курса основной школы вы уже знаете, что *вероятность* — это числовая характеристика возможности появления случайного события в конкретных условиях, которые могут быть воссозданы многократно.

Случайные события пытались изучать и древние учёные. Например, они наблюдали за поражением (и не поражением) цели существовавшими тогда орудиями; наблюдая за погодой, пытались определить закономерности в стихийных бедствиях и т. п. Но многие века люди не давали числовых характеристик случайным событиям.

К XVII в. в науке и практике (в физике, астрономии, в страховом деле, в статистике заболеваний и несчастных случаев и др.) накопились проблемы, требующие специального математического аппарата для анализа случайных явлений. Как вы, наверное, помните из введения к предыдущей главе, соответствующий математический аппарат удалось создать при анализе закономерностей в азартных играх (дающих простые модели для решения вероятностных задач). Становление теории вероятностей связано с именами замечательных учёных Паскаля, Ферма и Гюйгенса, чьи научные труды создавались в XVII в.

К началу XVIII в. сложилось чёткое понятие классической вероятности как отношения числа равновозможных случаев (исходов испытания) m, благоприятствующих наступлению события A, к числу всех возможных случаев n: $P(A)=\frac{m}{n}$.

Однако классическое определение вероятности имеет ограниченную сферу применения, так как далеко не в каждом явлении можно выделить конечное число равновозможных случаев. По формуле классической вероятности нельзя, например, найти вероятность попадания в цель при выстреле из конкретного орудия. В этом случае прибегают к понятию *статистической вероятности* — относительной частоте события, наблюдаемого в большой серии повторяющихся однотипных испытаний с неизменными условиями.

К событиям, вероятность которых находится по формуле классической вероятности, можно применять и статистический подход. Связь статистического и классического определений вероятности для таких событий обосновал Я. Бернулли в так называемом *законе больших чисел*. Этот закон гласит: при большом числе испытаний можно считать, что вероятность события (в классическом понимании) мало чем отличается от относительной частоты этого события.

В XVIII в. и начале XIX в. теория вероятностей была «модным знанием»: с её помощью некомпетентные люди пытались доказывать абсурдные вещи, после чего многие её стали считать сомнительной наукой.

В середине XIX в. в России создалась так называемая Петербургская математическая школа, трудами которой теория вероятностей приобрела стройную логическую и математическую основу, стала эффективным методом познания.

За последние десятилетия теория вероятностей превратилась в интенсивно развивающуюся науку с широким применением в теоретических исследованиях естественных наук, в практике, технике, экономике. При этом отечественная теоретико-вероятностная школа стала занимать одно из лидирующих мест в мире.

В данной главе вы познакомитесь лишь с основными понятиями теории вероятностей (часть из которых в ознакомительном плане вы рассматривали в основной школе), узнаете ряд теорем и методов, позволяющих вычислять вероятность события косвенно — по вероятностям других событий, с ним связанных; рассмотрите опыты Бернулли и его формулу, решите с её помощью интересные задачи.

§ 1. Вероятность события

Практикой установлено, что в часто происходящих случайных явлениях (событиях) существуют определённые закономерности. Задача теории вероятностей — установление и математическое исследование закономерностей в массовых случайных явлениях.

1. Виды событий

Определение

Некоторое событие называют *случайным* по отношению к данному опыту (испытанию), если при осуществлении этого опыта оно либо происходит, либо не происходит.

Примеры случайных событий:

1) выпадение орла при подбрасывании монеты;

2) выпадение шестёрки при бросании игральной кости;

3) выигрыш по данному лотерейному билету;

4) выход из строя электролампы в течение определённого отрезка времени.

Случайные события обычно обозначают буквами A, B, C и т. д.

Событие U называется *достоверным*, если оно обязательно наступает в результате данного опыта.

Событие V называется *невозможным*, если оно заведомо не может произойти в результате данного опыта.

Пусть, например, в урне находятся только чёрные шары, а опыт заключается в извлечении шара из урны. Тогда событие «извлечён чёрный шар» является достоверным, а событие «извлечён белый шар» — невозможным.

При одном бросании игральной кости возможны следующие события (*исходы* испытания): на верхней грани может оказаться число 1, число 2, число 3, число 4, число 5 или число 6. Каждое из этих событий является случайным, так как оно может произойти, а может не произойти. Тот факт, что выпадет одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6,— достоверное событие, так как при бросании игральной кости оно обязательно произойдёт, а выпадение, например, числа 7, является невозможным событием.

Рассмотренные возможные при бросании игральной кости события *несовместны* (появление одного из них исключает появление другого), *единственно возможны* (обязательно появится одно число) и *равновозможны* (у всех чисел шансы появиться одинаковы).

Предположим, что в результате некоторого опыта обязательно происходит одно из взаимно исключающих друг друга событий, причём каждое из них не разделяется на более простые. Такие события называют ***элементарными событиями*** (или ***элементарными исходами*** испытания).

2. Комбинации событий. Противоположные события

Пусть с некоторым опытом связаны события A и B.

Определение

Суммой (объединением) событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий. Сумму событий A и B обозначают $A + B$ (или $A \cup B$).

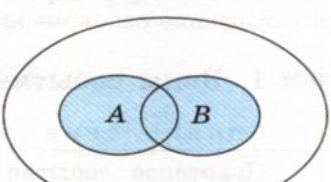


Рис. 102

На рисунке 102 с помощью кругов Эйлера проиллюстрировано понятие суммы событий A и B: большой круг изображает все элементарные события, связанные с рассматриваемым опытом; левый круг изображает событие A, правый круг — событие B, а закрашенная область — событие $A+B$.

Определение

Произведением (пересечением) событий A и B называется событие, которое считается наступившим тогда и только тогда, когда наступают оба события A и B. Произведение событий A и B обозначают AB (или $A \cap B$).

Рисунок 103 иллюстрирует с помощью кругов Эйлера произведение событий A и B: общая часть кругов (закрашенная область) изображает событие AB.

Рассмотрим примеры с конкретными событиями A и B.

1) Пусть в опыте с бросанием игральной кости события A и B определяются так: A — выпало число очков, кратное 2, B — выпало число очков, кратное 3. Тогда событие $A+B$ означает, что выпало хотя бы одно из чисел 2, 3, 4, 6; событие AB — выпало число 6.

2) Пусть опыт заключается в том, что из колоды карт вынимается наудачу одна карта, и пусть рассматриваются следующие события: A — вынут король, B — вынута карта пиковой масти. Тогда событие $A+B$ — вынут или король, или карта пиковой масти, AB — из колоды вынут король пик.

События A и B называют *равносильными (равными)* и пишут $A=B$, если каждое из них происходит тогда и только тогда, когда происходит другое событие. Например, в опыте с бросанием игральной кости событие A — выпала шестёрка и событие B — выпало наибольшее число очков являются равносильными.

Для каждого события A можно рассматривать *противоположное* для него событие $\overline{A}$, которое считается наступившим тогда и только тогда, когда A не наступает. Из двух противоположных событий, которые могут произойти в одном опыте, одно обязательно произойдёт, а одновременно они произойти не могут. Например, если A — выпадение нечётного числа очков при бросании игральной кости, то $\overline{A}$ — выпадение чётного числа очков; если A — попадание в цель при выстреле, то $\overline{A}$ — промах.

На рисунке 104 проиллюстрирована взаимосвязь событий A и $\overline{A}$ на множестве всех элементарных событий рассматриваемого опыта (событие $\overline{A}$ изображено закрашенной областью).

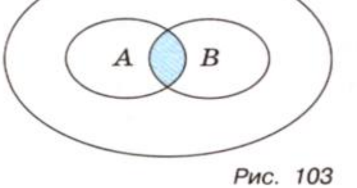


Рис. 103

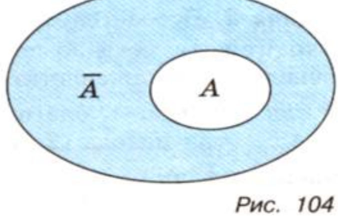


Рис. 104

Задача 1. A, B, C — три произвольных события, которые могут произойти в одном опыте. Записать следующие события:

1) A_1 — все три события произошли;
2) A_2 — ни одно событие не произошло;
3) A_3 — произошло только событие A;
4) A_4 — произошло по крайней мере одно из событий A, B, C;
5) A_5 — произошло одно и только одно из этих событий;
6) A_6 — произошли по крайней мере два из этих событий.

▷ 1) $A_1 = ABC$; 2) $A_2 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$; 3) $A_3 = A\overline{B}\,\overline{C}$;
4) $A_4 = A + B + C$; 5) $A_5 = A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$;
6) $A_6 = AB\overline{C} + AC\overline{B} + BC\overline{A} + ABC$. ◀

3. Опыт с равновозможными исходами. Классическое определение вероятности события

Пусть событие A, связанное с опытом, имеющим n равновозможных исходов, наступает тогда, когда осуществляется один из каких-то m исходов, и не наступает, когда осуществляется любой из оставшихся $n - m$ исходов. Тогда говорят, что исходы, приводящие к наступлению события A, *благоприятствуют* событию A.

Определение

Вероятностью $P(A)$ события A в опыте с равновозможными элементарными исходами называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию A, к числу всех возможных исходов.

Если n — число всех возможных исходов опыта, m — число исходов, благоприятствующих событию A, то вероятность $P(A)$ события A определяется формулой

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Приведённое определение вероятности называется *классическим определением вероятности*.

Заметим, что вероятность каждого элементарного события в опыте с n равновозможными исходами равна $\frac{1}{n}$.

Из формулы (1) следует, что

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1,\ P(V) = 0,\ P(U) = 1,$$

где V — невозможное, а U — достоверное события.

Задача 2. Бросается игральная кость. Найти вероятности событий A_1 и A_2, если A_1 — число выпавших очков кратно 3, A_2 — число выпавших очков чётное.

▷ Так как событию A_1 благоприятствуют два исхода (3 и 6), событию A_2 — три исхода (2, 4, 6), а число всех исходов равно 6, то $P(A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. ◀

Задача 3. Монета бросается дважды. Найти вероятность события A — хотя бы один раз выпадет орёл.

▷ Пусть О — появление орла, Р — появление решки. Тогда результат двух бросаний — появление одной из четырёх равновозможных комбинаций ОО, ОР, РО, РР ($n = 4$). Событию A благоприятствуют первые три комбинации ($m = 3$). Поэтому искомая вероятность $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$. ◀

Задача 4. Брошены две игральные кости. Найти вероятность события A — произведение выпавших очков есть нечётное число.

▷ Результат бросаний двух игральных костей — появление равновозможных упорядоченных пар чисел. Согласно правилу произведения число таких пар $n = 6 \cdot 6 = 36$. Событию A благоприятствуют 9 пар ($m = 9$):

1 и 1, 1 и 3, 1 и 5, 3 и 1, 3 и 3, 3 и 5, 5 и 1, 5 и 3, 5 и 5,

а искомая вероятность $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. ◀

Задача 5. В ящике лежат десять одинаковых на ощупь шаров, из них четыре белых и шесть чёрных. Наугад вынимаются два шара. Найти вероятности событий A и B, если A — оба вынутых шара белого цвета, B — вынутые шары имеют разный цвет.

▷ 1) Общее число возможных исходов опыта — число сочетаний из 10 элементов по 2, т. е. $n = C_{10}^2 = \frac{A_{10}^2}{P_2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$, а число благоприятствующих событию A исходов $m = C_4^2 = \frac{A_4^2}{P_2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. Поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$.

2) Так как любой из четырёх белых шаров может комбинироваться с любым из шести чёрных шаров, то по правилу произведения имеется $4 \cdot 6 = 24$ исхода, благоприятствующие событию B. Искомая вероятность $P(B) = \frac{24}{C_{10}^2} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$. ◀

Упражнения

509. Каким событием (достоверным, невозможным или случайным) является следующее событие:

1) при комнатной температуре и нормальном атмосферном давлении сталь находится в жидком состоянии;

2) наугад вынутая из кошелька монета оказалась пятирублёвой;

3) наугад названное натуральное число больше нуля?

510. Выяснить, являются ли события A и B несовместными, если:

1) A — появление туза, B — появление дамы при взятии одной карты из колоды карт;

2) A — появление туза, B — появление карты пиковой масти при взятии одной карты из колоды карт;

3) A — выпадение четырёх очков, B — выпадение чётного числа очков при одном бросании игральной кости;

4) A — выпадение четырёх очков, B — выпадение нечётного числа очков при одном бросании игральной кости.

511. Установить, что является событием, противоположным событию:

1) сегодня первый урок — физика;

2) экзамен сдан на «отлично»;

3) на игральной кости выпало меньше пяти очков;

4) хотя бы одна пуля при трёх выстрелах попала в цель.

512. Пусть A и B — произвольные события, которые могут произойти в одном опыте. Записать следующие события: 1) произошли оба данных события; 2) произошло по крайней мере одно из событий; 3) произошло только одно из двух данных событий; 4) ни одно из событий не произошло; 5) произошло только событие B.

513. Какова вероятность выпадения числа, кратного 3, в результате одного подбрасывания игральной кости?

514. Какова вероятность того, что на открытом наугад листе нового отрывного календаря на високосный год окажется пятое число?

515. В коробке находится 3 чёрных, 4 белых и 5 красных шаров. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар: 1) чёрный; 2) белый; 3) красный; 4) чёрный или белый; 5) чёрный или красный; 6) красный или белый; 7) или чёрный, или белый, или красный; 8) зелёный?

---

516. Среди 100 электроламп 5 испорченных. Какова вероятность того, что выбранные наугад 3 лампы окажутся исправными?

517. Брошены три игральные кости. Какова вероятность того, что:

1) на всех трёх костях выпало одинаковое количество очков; 2) сумма очков на всех костях равна 4; 3) сумма очков на всех костях равна 5?

518. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что:

1) сумма очков, выпавших на обеих костях, есть число нечётное; 2) произведение очков, выпавших на обеих костях, есть число чётное; 3) сумма выпавших очков больше 6?

519. В лотерее участвует 15 билетов, среди которых 3 выигрышных. Наугад вынуты 2 билета. Какова вероятность того, что:

1) оба вынутых билета выигрышные; 2) только один билет выигрышный; 3) выигрышного билета не оказалось?

520. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой игральной кости число очков будет больше, чем на второй?

521. Имеются две урны: первая содержит 1 белый, 3 чёрных и 4 красных шара, вторая — 3 белых, 2 чёрных и 3 красных шара. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что цвета вынутых шаров совпадут.

§ 2. Сложение вероятностей

Напомним, что сумма событий A и B (связанных с одним опытом) — это событие $A+B$, состоящее в наступлении либо только события A, либо только события B, либо и события A и события B одновременно.

Например, если стрелок сделал два выстрела по мишени и A — попадание в мишень при первом выстреле, B — попадание при втором выстреле, то событие $A+B$ — это попадание стрелком по мишени хотя бы при одном из выстрелов.

Теорема 1

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (1)$$

○ Пусть событиям A и B благоприятствуют соответственно k и l исходов, а всего имеется n равновозможных исходов. Так как события A и B несовместны, то среди n исходов нет таких, которые одновременно благоприятствовали бы как событию A, так и событию B. Поэтому событию $A+B$ будут благоприятствовать $k+l$ исходов. По определению вероятности $P(A)=\frac{k}{n}$, $P(B)=\frac{l}{n}$, $P(A+B)=\frac{k+l}{n}=\frac{k}{n}+\frac{l}{n}$, откуда следует равенство (1). ●

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \qquad (2)$$

○ События A и $\overline{A}$ несовместны, поэтому по теореме 1 имеем $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$. Но $A+\overline{A}=U$ — достоверное событие, и поэтому $P(A+\overline{A})=P(U)=1$, т. е. $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$. ●

З а м е ч а н и е. Теорема 1 верна для любого конечного числа событий, т. е. $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$, если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — попарно несовместные события.

Задача 1. В ящике лежат 10 шаров: 3 красных, 2 синих и 5 белых. Наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной (не белый)?

▷ I с п о с о б. Пусть событие A — появление красного шара, B — появление синего шара, тогда $A+B$ — появление цветного шара. Очевидно, что $P(A)=\frac{3}{10}$, $P(B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$. Так как события A и B несовместны, к ним применима теорема 1:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

II с п о с о б. Пусть событие C — появление белого шара, тогда событие $\overline{C}$ — появление не белого (т. е. цветного) шара.

Очевидно, $P(C)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, а $P(\overline{C})=1-P(C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. ◀

Задача 2. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что он, выстрелив по мишени, промахнётся?

▷ Если событие A — попадание в мишень, то по условию $P(A)=0{,}6$. Промах — противоположное попаданию событие, и его вероятность $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}6=0{,}4$. ◀

Задача 3. В роте из 100 солдат две имеют высшее образование. Какова вероятность того, что в случайным образом сформированном взводе из 30 солдат будет хотя бы один человек с высшим образованием?

▷ Пусть событие A — во взводе хотя бы один человек имеет высшее образование, тогда событие $\overline{A}$ — ни один человек во взводе не имеет высшего образования. В данной ситуации проще вычислить $P(\overline{A})$, чем $P(A)$. Найдём $P(\overline{A})$.

Число способов составления взвода в количестве 30 человек из 100 солдат роты равно C_{100}^{30}. Число солдат, не имеющих высшего образования, равно $100-2=98$. Из 98 человек составить взвод в количестве 30 человек можно C_{98}^{30} способами. Найдём вероятность того, что среди отобранных 30 человек нет ни одного с высшим образованием:

$$P(\overline{A})=\frac{C_{98}^{30}}{C_{100}^{30}}=\frac{\dfrac{98!}{30!\cdot 68!}}{\dfrac{100!}{30!\cdot 70!}}=\frac{98!\cdot 70!}{68!\cdot 100!}=\frac{69\cdot 70}{99\cdot 100}=\frac{161}{330}.$$

Отсюда находим $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{161}{330}=\frac{169}{330}\approx 0{,}512$. ◀

Теорема 2

Вероятность суммы двух произвольных событий (связанных с одним опытом) равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения, т. е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \quad (3)$$

○ Пусть событиям A и B благоприятствуют соответственно k и l равновозможных исходов, а совместному осуществлению событий A и B благоприятствует r исходов. Если число всех равновозможных исходов равно n, то $P(A)=\frac{k}{n}$, $P(B)=\frac{l}{n}$, $P(AB)=\frac{r}{n}$.

Так как событию $A+B$ благоприятствует $(k-r)+(l-r)+$ $+r=k+l-r$ исходов, то $P(A+B)=\frac{k+l-r}{n}=\frac{k}{n}+\frac{l}{n}-\frac{r}{n}$, откуда следует равенство (3). ●

Задача 4. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна карта. Какова вероятность того, что будет вынута карта бубновой масти или туз?

▷ Введём обозначения событий: A — вынута карта бубновой масти, B — появится туз. Очевидно, что событие AB — появление туза бубновой масти. Нужно найти вероятность события $A+B$. Воспользуемся формулой (3). Так как

$$P(A)=\frac{1}{4},\ P(B)=\frac{1}{9},\ P(AB)=\frac{1}{36},$$

то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{36}=\frac{1}{3}.$$ ◀

Упражнения

522. В колоде 36 карт. Наугад вынимается одна карта. Какова вероятность того, что эта карта либо туз, либо дама?

523. В пачке находится 12 билетов денежно-вещевой лотереи, 16 билетов спортивной лотереи и 20 билетов художественной лотереи. Какова вероятность того, что наудачу вынутый один билет будет билетом либо денежно-вещевой, либо художественной лотереи?

524. В ящике лежат 5 белых, 10 чёрных и 15 красных шаров. Какова вероятность того, что наугад вынутый шар не будет белым? Решить задачу двумя способами.

525. Вероятность выигрыша главного приза в некоторой лотерее (по одному билету) равна 10^{-8}. Какова вероятность не выиграть главный приз, приобретая один билет этой лотереи?

526. Найти вероятность того, что наугад вынутая из полного набора домино (28 костей) одна кость не будет «дублем».

527. В вазе стоят 4 белые и 7 красных астр. Какова вероятность того, что среди случайным образом вынутых из вазы трёх цветков окажется по крайней мере одна белая астра?

528. В студенческой группе 22 человека, среди которых 4 девушки. Какова вероятность того, что среди троих случайным образом выбранных из этой группы студентов (для участия в конференции) окажется по крайней мере одна девушка?

529. Вероятность поражения мишени при первом выстреле равна 0,7. Вероятность поражения мишени при втором выстреле равна 0,8. Вероятность поражения мишени и при первом, и при втором выстрелах равна 0,56. Найти вероятность того, что:

1) мишень будет поражена хотя бы одним выстрелом;
2) мишень не будет поражена ни одним из выстрелов.

530. Известно, что $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}8$, $P(AB) = 0{,}1$. Доказать, что $A + B = U$.

§ 3. Условная вероятность. Независимость событий

1. Условная вероятность

В теории вероятностей для характеристики зависимости одних событий от других вводится понятие условной вероятности.

Определение

Если A и B — два события, связанные с некоторым опытом, причём $P(B) \neq 0$, то число $\frac{P(AB)}{P(B)}$ называют *вероятностью* события A при условии, что наступило событие B, или просто *условной вероятностью* события A и обозначают $P(A/B)$.

Таким образом, по определению

$$P(A / B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (1)$$

Задача 1. Какова вероятность того, что наугад вынутая из полного набора домино кость окажется «дублем», если известно, что сумма очков на этой кости меньше чем 5?

▷ В наборе домино 28 костей, из них 7 «дублей». На девяти костях сумма очков меньше чем 5:

0—0, 0—1, 0—2, 0—3, 0—4, 1—1, 1—2, 1—3, 2—2.

Пусть событие B — сумма очков на вынутой кости меньше пяти, а событие A — вынутая кость есть «дубль». Тогда событие

AB — на вынутой кости, являющейся «дублем», сумма очков меньше пяти (таких костей три: 0 — 0, 1 — 1, 2 — 2). Вычислим вероятность события A при условии, что наступило событие B: $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{28}}{\frac{9}{28}} = \frac{1}{3}$. ◀

Значение $P(A/B)$ в задаче **1** можно было найти, рассуждая следующим образом: из тех 9 случаев, к которым сводится событие B, событию A благоприятствуют 3 случая:

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Пусть в некотором опыте с числом n равновозможных элементарных исходов событию B благоприятствуют l элементарных исходов ($l \neq 0$), а событию AB благоприятствуют r исходов. Тогда $P(B) = \frac{l}{n}$, а $P(AB) = \frac{r}{n}$. Согласно формуле (1) имеем

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{r}{n} : \frac{l}{n} = \frac{r}{l}.$$

Равенство $P(A/B) = \frac{r}{l}$ определяет фактически вероятность события A в условиях, которые возникают при наступлении события B.

Так как формула (1) верна для любых событий (связанных с одним опытом), то, поменяв местами A и B (понимая, что $AB = BA$), а также полагая $P(A) \neq 0$, получаем

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad (2)$$

Задача 2. В ящике лежат 3 белых и 2 чёрных шара. Из ящика дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что: 1) первым был извлечён белый шар, а вторым — чёрный; 2) вторым был вынут чёрный шар при условии, что первым уже был извлечён белый.

▷ При решении задачи рассмотрим события:

A — первым вынут белый шар;

B — вторым вынут чёрный шар;

AB — последовательно извлечены белый, затем чёрный шары;

B/A — вторым вынут чёрный шар при условии, что первым был извлечён белый.

1) Число всех возможных вариантов извлечения двух шаров из ящика с пятью шарами (с учётом порядка их появления) равно $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$, т. е. $n = 20$. Благоприятствующими событию AB будут все возможные упорядоченные пары «белый

шар, чёрный шар», составленные из имеющихся трёх белых и двух чёрных шаров. Таких соединений согласно правилу произведения будет $3 \cdot 2 = 6$ ($m = 6$). Таким образом, $P(AB) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

2) После извлечения из ящика первым белого шара (произошло событие A) там останутся 2 белых и 2 чёрных шара. Появлению чёрного шара вторым из четырёх оставшихся ($n = 4$) благоприятствуют два исхода ($m = 2$), поэтому $P(B/A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Можно рассудить иначе. Имеем $P(A) = \frac{3}{5}$, так как $n = 5$ (в ящике первоначально находилось 5 шаров) и $m = 3$ (белых было 3). Подставив в формулу (2) значения $P(AB) = \frac{3}{10}$ и $P(A) = \frac{3}{5}$, получим $P(B/A) = \frac{3}{10} : \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 5}{10 \cdot 3} = \frac{1}{2}$. ◀

Из равенства (1) следует, что

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (3)$$

Из равенства (2) получаем

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A). \quad (4)$$

Равенства (3) и (4) можно записать в виде следующих равенств:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (5)$$

Задача 3. В лаборатории работают 7 женщин и 3 мужчины. Случайным образом из числа этих сотрудников для научной конференции выбираются один докладчик и один содокладчик. Какова вероятность того, что докладчиком будет выбрана женщина, а содокладчиком — мужчина?

▷ Пусть событие A — докладчиком выбрана женщина, событие B — содокладчик — мужчина.

I способ. Вероятность того, что сначала выбирался основной докладчик и им оказалась женщина (наступило событие A), равна $P(A) = \frac{7}{10}$.

Вероятность того, что вторым выбирался содокладчик и им оказался мужчина (произошло событие B), вычисляется при условии, что первой уже была выбрана женщина, т. е. $P(B/A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

По формуле (4) имеем $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{30}$.

II способ. Вероятность того, что первым выбирался содокладчик и им оказался мужчина (произошло событие B), равна $P(B) = \frac{3}{10}$.

Вероятность того, что вторым выбирался докладчик и им оказалась женщина (событие A), вычисляется при условии, что первым уже выбран мужчина, т. е. $P(A/B) = \frac{7}{9}$. По формуле (3) получаем $P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}$. ◀

2. Независимость событий

Определение

События A и B называют *независимыми*, если

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (6)$$

Если равенство (6) не выполняется, то события A и B называют зависимыми.

Определение независимости событий согласуется с введённым понятием условной вероятности. Действительно, событие A является независимым от события B тогда и только тогда, когда наступление события B не влияет на вероятность наступления события A, т. е. когда $P(A/B) = P(A)$. В самом деле, соотношение $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$ имеет место тогда и только тогда, когда выполняется равенство (6).

Задача 4. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна карта. Выяснить, являются ли независимыми события A и B, если A — появился король, B — вынута карта червовой или пиковой масти.

▷ Общее число элементарных исходов испытания равно 36, событию A благоприятствуют 4 исхода, поэтому $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Если произошло событие B, то осуществилось одно из 18 элементарных событий, среди которых событию A благоприятствуют 2, и поэтому $P(A/B) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$. Итак, $P(A/B) = P(A)$, т. е. события A и B независимы. ◀

Определение независимости обобщается на случай $n > 2$ событий. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если независимы всевозможные пары из этих событий, а также если каждое из этих событий и событие, являющееся произведением любого числа остальных событий, независимы.

Например, независимость трёх событий A, B и C означает, что независимыми должны быть 6 пар событий: A и B, B и C, C и A, A и BC, B и CA, C и AB. Из определений независимости и формулы (6) следует, что если A, B, C — независимые в совокупности события, то $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

Упражнения

531. На столе лежат 4 синих и 3 красных карандаша. Редактор дважды наугад берёт по одному карандашу и обратно их не кладёт. Найти вероятность того, что:

1) вторым был взят красный карандаш при условии, что первым был синий;

2) вторым взят синий карандаш при условии, что первым оказался синий;

3) вторым взят синий карандаш при условии, что первым был красный;

4) вторым взят красный карандаш при условии, что первым также оказался красный карандаш.

532. В барабане находится 10 лотерейных билетов, из них 2 выигрышных. Из барабана 2 раза вынимают по одному билету, не возвращая их обратно. Какова вероятность того, что:

1) во второй раз был извлечён билет без выигрыша при условии, что первым оказался выигрышный билет;

2) в первый раз был вынут выигрышный билет, а во второй раз — билет без выигрыша?

533. Из ящика, содержащего 4 белых и 5 красных шаров, 2 раза наугад извлекают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что:

1) вторым извлечён красный шар при условии, что первым также оказался красный шар;

2) оба раза извлекались красные шары.

534. Из колоды в 36 карт последовательно наугад вынимаются и не возвращаются 2 карты. Какова вероятность того, что:

1) оба раза извлекались карты красной масти;

2) первой была вынута карта красной масти, а второй — чёрной масти;

3) второй вынута карта чёрной масти при условии, что первой была карта красной масти?

535. Выяснить, являются ли независимыми события A и B, если:

1) игральная кость бросается дважды; событие A — при первом бросании выпало 2 очка, событие B — при втором бросании выпало 5 очков;

2) брошены две игральные кости; A — на первой кости появилось 6 очков, B — на второй кости также 6 очков;

3) из колоды карт вынимают по одной карте, возвращая вынутую карту в колоду; A — первой вынута дама пик, B — второй также вынута дама пик;

4) из колоды карт дважды вынимают по одной карте, не возвращая их в колоду; событие A — первой вынута шестёрка треф, событие B — вторым вынут король пик.

536. В букете 10 гвоздик и 5 нарциссов. Оля и Таня случайным образом поочереди вынимают из букета по одному цветку. Какова вероятность того, что Оля вынула гвоздику, а Таня — нарцисс? (Решить задачу разными способами.)

537. В партии из 100 деталей 2 детали бракованные. Два контролёра поочереди вынимают случайным образом по одной детали. Какова вероятность того, что первому контролёру досталась бракованная, а второму — небракованная деталь? (Решить задачу разными способами.)

538. Студент, которому предстояло сдать зачёт, знал ответы на 70 вопросов из 90. Какова вероятность того, что он:

1) верно ответит на два вопроса;

2) ответит на второй вопрос при условии, что он не знал ответа на первый вопрос?

§ 4. Вероятность произведения независимых событий

Существуют события (происходящие в одном опыте), для которых вероятность их совместного появления равна произведению вероятностей каждого из них.

Определение

События A и B называют *независимыми*, если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (1)$$

Если равенство (1) не выполняется, то события A и B называют *зависимыми*.

Рассмотрим опыт с бросанием двух игральных костей и исследуем два события: A — на первой кости выпало 5 очков, B — на второй кости выпало 5 очков. Выясним, будут ли события A и B независимыми.

○ Появление любого числа очков на первой кости (в частности, наступление события A) не влияет на событие B и его вероятность. Наступление события B не влияет на вероятность события A. Имеем $P(A) = \frac{1}{6}$ и $P(B) = \frac{1}{6}$.

Событие AB состоит в совместном наступлении событий A и B. Элементарные исходы события AB — это пары чисел, в которых на первом месте стоит число очков первой кости, на втором — число очков второй кости. Всего элементарных исходов испытания $n = 36$. Среди них присутствует лишь одна пара (5 и 5 очков), благоприятствующая событию AB, т. е. $m = 1$. Таким образом, $P(AB) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$, т. е. события A и B независимые. ●

Существует немало испытаний (называемых *независимыми испытаниями*), в которых вероятности рассматриваемых событий не зависят от того, произошли или нет другие события, связанные с этим испытанием.

Наверняка можно говорить о независимости событий, если они появляются в независимых испытаниях. Так, в рассмотренном выше примере бросания двух игральных костей — независимые испытания.

Когда же независимость испытаний неочевидна, то независимость событий A и B проверяют с помощью формулы (1).

Задача 1. Из чисел 1, 2, 3, ..., 11, 12 случайным образом выбирают одно число и рассматривают два события: A — выбрано чётное число, B — выбрано число, кратное трём. Выяснить, являются ли события A и B независимыми.

▷ Среди данных чисел чётных чисел 6, поэтому $P(A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$. Кратных трём в данном наборе чисел 4, т. е. $P(B)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$. Событие AB состоит в выборе числа, кратного как числу 2, так и числу 3, т. е. кратного числу 6. Таких чисел в наборе 2, поэтому $P(AB)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$. Так как $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}=P(AB)$, то события A и B независимые. ◀

Заметим, что если бы в задаче 1 выбор осуществлялся из первых 13 натуральных чисел, то события A и B были бы зависимы.

Задача 2. Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A)=0{,}8$, $P(B)=0{,}6$, $P(AB)=0{,}48$;

2) $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{1}{12}$.

▷ 1) Так как $P(A)\cdot P(B)=0{,}8\cdot 0{,}6=0{,}48=P(AB)$, то события A и B независимые.

2) Так как $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}\neq\frac{1}{12}=P(AB)$, то события A и B не являются независимыми. ◀

Задача 3. В изготовленной партии детских мячей вероятность появления бракованного мяча равна 0,004. Произвольным образом в красный цвет окрашены $\frac{3}{4}$ всех мячей, а остальные мячи окрашены в синий. Какова вероятность того, что наугад вынутый мяч будет небракованным и красным?

▷ Пусть событие A — появление бракованного мяча. По условию $P(A)=0{,}004$. Появление небракованного мяча — событие $\overline{A}$, и $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}004=0{,}996$. Пусть событие B — появление красного мяча, тогда согласно условию $P(B)=\frac{3}{4}$.

Задача сводится к нахождению вероятности совместного появления независимых событий $\overline{A}$ и B, т. е. к нахождению вероятности события $\overline{A}B$. Согласно формуле (1) имеем

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}996 \cdot \frac{3}{4} = 0{,}747.$$ ◀

Более двух событий называют *независимыми в совокупности*, если независимы всевозможные пары из этих событий и если каждое из этих событий и событие, являющееся произведением любого числа остальных событий, независимы. Вероятность совместного появления независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий.

Задача 4. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени по одному разу. Вероятности попадания в мишень для них равны соответственно 0,2; 0,5 и 0,4. Найти вероятность того, что все три стрелка попадут в мишень.

▷ Введём обозначения: A_1 — попадание в мишень первым стрелком, A_2 — попадание в мишень вторым стрелком, A_3 — попадание в мишень третьим стрелком. Тогда $A_1A_2A_3$ — попадание в мишень всеми стрелками. События A_1, A_2, A_3 независимые в совокупности события, поэтому

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}04.$$ ◀

Упражнения

539. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что стрелок попадает в мишень в каждом из двух последовательных выстрелов?

540. Вероятность поражения определённой цели первым орудием равна 0,7, а вторым — 0,6. Найти вероятность поражения этой цели обоими орудиями, стрелявшими по одному разу независимо друг от друга.

541. В урне 2 белых, 3 красных и 5 чёрных шаров. Дважды вынимают по одному шару и оба раза возвращают их обратно в урну. Какова вероятность того, что:

1) первым вынут красный шар, а вторым — чёрный;

2) первым вынут чёрный шар, а вторым — белый?

542. Бросают три игральные кости. Найти вероятность выпадения чётного числа очков на каждой кости.

543. Дважды бросают игральную кость. Событие A — при первом бросании выпало 6 очков, событие B — в результате второго бросания появилось число очков, кратное трём. Найти вероятность события $A\overline{B}$.

544. Дважды бросают игральную кость. Событие A — первый раз выпало чётное число, событие B — второй раз выпало число, меньшее трёх. Найти вероятность события $A\overline{B}$.

545. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,7. Какова вероятность хотя бы одного попадания в мишень этим стрелком в результате двух выстрелов?

546. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,2, а вторым — 0,3. Какова вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы одним выстрелом, если стрелки выстрелили в неё по одному разу независимо друг от друга?

547. В выпущенной заводом партии деталей 2% брака, и произвольным образом выбранные 0,3 от числа всех деталей окрашены в зелёный цвет. Какова вероятность того, что случайным образом вынутая из партии деталь окажется неокрашенной и небракованной?

548. Вероятность попадания по мишени первым стрелком равна 0,6, вторым — 0,7, третьим — 0,8. Каждый из них стреляет по мишени один раз. Какова вероятность того, что мишень поразят только первый и третий стрелки?

549. На предприятии 120 человек, среди которых 40 женщин. Каждый сотрудник покупает один билет денежно-вещевой лотереи (20 % выигрышных билетов) и один билет спортивной лотереи (10 % выигрышных билетов). Какова вероятность того, что выбранный случайным образом из списка сотрудников предприятия один человек окажется мужчиной, выигравшим в обеих лотереях?

§ 5. Формула Бернулли

В курсе теории вероятностей обосновывается следующее утверждение:

если произведено n независимых испытаний, то вероятность события B, состоящего в том, что в первом испытании произойдёт событие A_1, во втором — событие A_2, ..., в n-м — событие A_n, равна произведению вероятностей событий A_1, A_2, ..., A_n, т. е.

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \qquad (1)$$

Задача 1. Стрелок поражает мишень при каждом выстреле с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена лишь при первом и третьем выстрелах, если стрелок выстрелит по мишени 3 раза?

▷ Пусть событие A — попадание стрелком по мишени при одном выстреле, тогда событие $\overline{A}$ — промах. По условию задачи $P(A) = 0,8$, тогда $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,8 = 0,2$. Рассматриваемое в задаче событие B состоит в том, что стрелок при первом выстреле поразил мишень, при втором промахнулся, при третьем снова попал, т. е. $B = A\overline{A}A$.

Согласно формуле (1)

$$P(B) = P(A\overline{A}A) = P(A)P(\overline{A})P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}128.$$ ◀

Задача 2. Стрелок поражает мишень при одном выстреле с вероятностью 0,8. Найти вероятность поражения мишени лишь двумя выстрелами, если всего стрелок стреляет 3 раза.

▷ Пусть событие A — попадание по мишени при одном выстреле, а событие B состоит в попадании по мишени при любых двух из трёх сделанных выстрелов. Иначе: событие B произойдёт, когда произойдёт одно из несовместных событий $AA\overline{A}$, $A\overline{A}A$ или $\overline{A}AA$, т. е. $B = AA\overline{A} + A\overline{A}A + \overline{A}AA$.

Согласно теореме о вероятности суммы несовместных событий (см. § 2) имеем

$$P(B) = P(AA\overline{A}) + P(A\overline{A}A) + P(\overline{A}AA). \qquad (2)$$

Используя рассуждения задачи **1**, заметим, что каждое слагаемое в правой части равенства (2) равно 0,128. Таким образом, искомая вероятность $P(B) = 3 \cdot 0{,}128 = 0{,}384$. ◀

Допустим, производятся n однотипных независимых испытаний, в каждом из которых событие A может произойти, а может не произойти (т. е. произойдёт событие $\overline{A}$). Условимся считать, что в каждом из испытаний вероятность события A равна p. Тогда вероятность противоположного ему события $\overline{A}$ будет равна $1 - p$.

Поставим задачу:

Вычислить вероятность события B, заключающегося в том, что при n независимых испытаниях событие A произойдёт ровно k раз.

Рассмотрим событие B_1, состоящее в том, что в первых k испытаниях наступило событие A, а в следующих $(n - k)$ испытаниях — событие $\overline{A}$, т. е.

$$B_1 = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ множителей}} \cdot \underbrace{\overline{A} \cdot \overline{A} \cdot \ldots \cdot \overline{A}}_{n-k \text{ множителей}}.$$

Согласно формуле (2)

$$P(B_1) = \underbrace{P(A) \cdot P(A) \cdot \ldots \cdot P(A)}_{k \text{ множителей}} \cdot \underbrace{P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{A})}_{n-k \text{ множителей}} =$$

$$= \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{k \text{ множителей}} \cdot \underbrace{(1-p) \cdot (1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p)}_{n-k \text{ множителей}} = p^k(1-p)^{n-k}.$$

Рассмотрим события B_i, в которых событие A повторяется k раз в различных последовательностях. Тем не менее вероятность любого события B_i, являющегося произведением k событий A и $(n - k)$ событий $\overline{A}$, будет равна $p^k(1-p)^{n-k}$.

Число способов записи произведений из k событий A и $(n-k)$ событий $\overline{A}$, отличающихся друг от друга порядком расположения в них множителей A и $\overline{A}$, равно числу перестановок с повторениями $\overline{P}_{k,n-k}$.

По доказанному в § 5 предыдущей главы

$$\overline{P}_{k,n-k} = C_n^k. \tag{3}$$

Событие B, состоящее в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $(n-k)$ раз, очевидно, равно сумме несовместных событий B_i, отличающихся друг от друга лишь порядком расположения в них k множителей A и $(n-k)$ множителей $\overline{A}$. Число таких событий согласно равенству (3) равно C_n^k:

$$B = \underbrace{B_1 + B_2 + \ldots + B_i + \ldots}_{C_n^k \text{ слагаемых}}.$$

Согласно замечанию к теореме 1 из § 2 о вероятности суммы попарно несовместных событий имеем

$$P(B) = \underbrace{P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_i) + \ldots}_{C_n^k \text{ слагаемых}} =$$

$$= \underbrace{p^k(1-p)^{n-k} + p^k(1-p)^{n-k} + \ldots + p^k(1-p)^{n-k} + \ldots}_{C_n^k \text{ слагаемых}} =$$

$$= C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Вероятность события B принято обозначать $P_n(k)$, подчёркивая тем самым, что рассматривается вероятность события, наступившего ровно k раз в серии из n однотипных испытаний. По доказанному выше

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \tag{4}$$

где $p = P(A)$.

Формулу (4) называют *формулой Бернулли* в честь швейцарского математика Якоба Бернулли, изучавшего в начале XVIII в. испытания с двумя возможными исходами.

Задача 3. Игральный кубик бросается 4 раза. Какова вероятность того, что в этой серии испытаний 5 очков появятся ровно 3 раза?

▷ Пусть A — появление 5 очков в одном испытании. Событие A в каждом из четырёх независимых испытаний может произойти, а может и не произойти. Известно, что $p = P(A) = \frac{1}{6}$. Тогда согласно формуле (4)

$$P_4(3) = C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-3} = 4 \cdot \frac{1}{216} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{324} \approx 0{,}015. \blacktriangleleft$$

Задача 4. Вероятность того, что лампа определённого вида не перегорит в течение 1000 ч, равна 0,3. Какова вероятность того, что из пяти ламп данного вида не менее четырёх останутся исправными после 1000 ч горения?

▷ Рассмотрим горение каждой из 5 ламп в течение 1000 ч как независимые испытания, в которых вероятность неперегорания лампы равна 0,3. В серии из 5 подобных испытаний фактически требуется найти вероятность суммы следующих несовместных событий: A — исправными остались 4 лампы и B — исправными остались 5 ламп. Вероятность этого события равна сумме вероятностей событий A и B:

$$P(A) + P(B) = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 0{,}3^4(1-0{,}3)^{5-4} +$$

$$+ C_5^5 \cdot 0{,}3^5 \cdot (1-0{,}3)^{5-5} = 5 \cdot 0{,}0081 \cdot 0{,}7 + 1 \cdot 0{,}00243 \cdot 1 =$$

$$= 0{,}03078 \approx 0{,}03.$$ ◀

Упражнения

550. Монету бросают 10 раз. Какова вероятность того, что орёл появится при этом ровно: 1) 4 раза; 2) 5 раз?

551. Игральный кубик бросают 5 раз. Какова вероятность того, что 6 очков появятся ровно: 1) 2 раза; 2) 4 раза?

552. Игральный кубик бросают 4 раза. Какова вероятность того, что 6 очков в этой серии испытаний появятся не менее трёх раз?

553. Вероятность попадания по кольцу у некоторого баскетболиста при каждом броске равна 0,7. Какова вероятность у этого баскетболиста попасть по кольцу хотя бы один раз в серии из трёх бросков?

Упражнения к главе VI

554. Какова вероятность того, что при одном бросании игральной кости выпадет либо 5, либо 6 очков?

555. Из урны, содержащей 15 белых, 10 красных и 5 синих шаров, наугад извлекается один шар. Какова вероятность появления белого шара?

556. Одновременно бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 8.

557. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

558. Брошена игральная кость. Какова вероятность того, что не выпадут 3 очка?

559. Брошены монета и игральная кость. Какова вероятность того, что выпадут орёл и 6 очков?

560. По мишени стреляют 2 раза. Вероятность попадания в мишень при первом выстреле равна 0,8, при втором выстреле — 0,9. Какова вероятность того, что мишень не будет поражена ни одним выстрелом?

561. Игральная кость брошена 2 раза. Найти вероятность того, что оба раза появится одинаковое число очков.

562. Из урны, содержащей 3 чёрных, 4 белых и 5 красных шаров, наудачу вынимают один. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется: 1) чёрным; 2) чёрным или белым?

---

563. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что 3 очка появятся хотя бы на одной из костей.

564. Из колоды в 36 карт последовательно наугад вынимают две карты и не возвращают обратно. Найти вероятность того, что:

1) вынуты два туза;
2) сначала извлечён туз, а затем дама;
3) вынуты 2 карты бубновой масти;
4) вторым извлечён туз, если известно, что первой была вынута дама.

565. В урне находится 10 белых и 10 чёрных шаров. Из неё последовательно вынимают 2 шара и не возвращают обратно. Какова вероятность того, что:

1) оба раза извлекались шары чёрного цвета;

2) первым вынут белый шар, а вторым — чёрный;

3) вторым извлечён чёрный шар, если известно, что первым был вынут белый шар?

566. Брошены три монеты. Найти вероятность того, что выпало не более двух орлов.

567. Из полного набора костей домино берутся наугад две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

568. В лотерее из 100 билетов 10 выигрышных. Какова вероятность того, что ни на один из трёх купленных билетов не выпадет выигрыш?

569. В лотерее n билетов, из которых m выигрышные. Найти вероятность выигрыша (наличия хотя бы одного выигрышного билета) у того, кто имеет k билетов ($k \leqslant n-m$).

570. Владелец одной карточки лотереи *Спортлото* (6 из 49) зачёркивает 6 номеров. Найти вероятность того, что им будут угаданы выигрышные: 1) все 6 номеров; 2) только 5 номеров?

571. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превосходящая заданную точность, равна 0,1. Произведены три независимых измерения этой физической величины. Найти вероятность того, что не более чем в одном измерении допущенная ошибка превысит заданную точность.

572. На участке цепи последовательно соединены три прибора, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказа каждого из этих приборов соответственно равны 0,05; 0,1; 0,2. Найти вероятность того, что на этом участке ток не пойдёт.

573. По данным технического контроля 2% изготовленных автомобильных двигателей нуждаются в дополнительной регулировке. Найти вероятность P того, что из пяти купленных оптовиком двигателей нуждаются в дополнительной регулировке: 1) два; 2) не более двух.

574. В партии из m деталей n бракованных. Выбирают наугад k деталей. Определить вероятность того, что среди этих k деталей будет p бракованных ($p \leqslant k \leqslant n \leqslant m$).

575. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две пачки по 26 листов в каждой. Найти вероятность того, что в каждой пачке окажется по два туза.

576. В розыгрыше первенства страны по волейболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников первенства имеются 5 команд из одной республики. Найти вероятность того, что все 5 команд этой республики попадут в одну и ту же группу.

577. Монету бросают 8 раз. Какова вероятность того, что орёл появится:

1) ровно 2 раза; 2) ровно 6 раз;
3) не менее 6 раз; 4) не более 2 раз?

578. Игральный кубик бросают 5 раз. Какова вероятность того, что одно очко появится:

1) ровно 2 раза; 2) ровно 3 раза;
3) не более 2 раз; 4) не менее 4 раз?

579. Вероятность того, что насекомое определённого вида будет жить более 100 дней, равна 0,5. Какова вероятность того, что среди выбранных для наблюдения 10 насекомых этого вида не менее 8 экземпляров будут жить более 100 дней?

Вопросы к главе VI

1. **Какие события называют случайными? достоверными? невозможными?**
2. **Что называют суммой событий?**
3. **Что называют произведением событий?**
4. **Какое событие называют противоположным данному событию?**
5. **Какие события называют равновозможными?**
6. **Что называют вероятностью (в классическом понимании) события *A*?**
7. **Какие события называют несовместными?**
8. **Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?**
9. **Какие события называют независимыми?**
10. **Чему равна вероятность суммы двух произвольных событий, которые могут произойти в одном опыте?**
11. **Записать формулу Бернулли и пояснить её смысл.**

Проверь себя!

1. **Бросают 2 монеты. Какова вероятность того, что на обеих монетах выпадет орёл?**
2. **Вероятность извлечения из партии одной бракованной детали равна 0,05. Какова вероятность того, что наугад извлечённая деталь окажется небракованной?**
3. **В ящике лежат 2 чёрных, 3 белых и 10 красных шаров. Какова вероятность того, что наугад вынутый один шар окажется или чёрного, или белого цвета?**
4. **В вазе лежат 3 апельсина и 5 яблок. Мальчик не глядя берёт из вазы один плод, затем, не возвращая его, берёт другой. Найти вероятность того, что первым был взят апельсин, а вторым — яблоко.**
5. **Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,8. Какова вероятность попадания в мишень в каждом из двух произведённых выстрелов?**
6. **Ученик знал ответы на 15 вопросов из 20, которые предлагались к зачёту. Ответа на первый попавшийся на зачёте вопрос он не знал. Какова вероятность того, что ученик ответит на второй из предложенных ему вопросов?**

1. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,9. Какова вероятность того, что после двух выстрелов в мишени окажется одна пуля?
2. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что мишень после трёх выстрелов будет поражена хотя бы одним выстрелом?
3. В коробке лежат 20 одинаковых по форме шаров, причём 8 из них легче остальных. Известно, что произвольные 5 шаров из 20 окрашены в красный цвет. Какова вероятность того, что случайным образом вынутый один шар окажется не красным, но лёгким шаром?
4. В первой коробке находятся 2 белых, 3 чёрных и 4 красных шара, а во второй коробке — 1 белый, 2 чёрных и 3 красных шара. Какова вероятность того, что вынутые по одному из каждой коробки шары окажутся разных цветов?

Историческая справка

Возникновение теории вероятностей как науки было обусловлено развитием в XVII в. страхового дела, демографии, а также широким распространением в Европе азартных игр. В таких играх (картах, домино, костях и пр.) выигрыш в основном зависел не от искусства игрока, а от случайности. Слово «азарт» произошло от французского слова *hasard*, означающего «случай», «риск». Богатые люди, увлечённые азартными играми, порой прибегали к помощи математиков для решения проблем, возникающих во время игры. Годом рождения теории вероятностей многие учёные считают 1654 г., к которому относится переписка двух великих французских учёных Б. Паскаля и П. Ферма по поводу решения задачи, возникшей при игре в кости.

В XVII в. учёные начали использовать азартные игры как удобные и наглядные модели для исследования понятий теории вероятностей. Первая книга по теории вероятностей называлась «О расчётах в азартной игре» и была опубликована в 1657 г. Её автор, голландский учёный Х. Гюйгенс, писал: «...при внимательном изучении предмета читатель заметит, что он занимается не только игрой, а что здесь даются основы теории вероятностей, глубокой и весьма интересной».

В 1713 г. была опубликована книга известного швейцарского математика Я. Бернулли «Искусство предположений», в которой автор изложил основы комбинаторики и аппарата вычисления вероятностей, а также доказал одну из замечательных теорем теории вероятностей, названную впоследствии *теоремой Бернулли*. На доказательство этой теоремы учёный потратил 20 лет жизни, а само оно заняло 12 страниц. Эта теорема — важный частный случай одного из основных законов теории вероятностей — *закона больших чисел*, открытого в середине XIX в. русским учёным П. Л. Чебышевым. Закон больших чисел имеет широкое практическое применение в вопросах, связанных с определением вероятностей событий, для которых рассчитать точное значение вероятности (в её классическом понимании) невозможно.

Дальнейшее развитие теории вероятностей связано с работами французского математика и астронома П. Лапласа (1749—1827), немецкого математика К. Гаусса, российских математиков А. А. Маркова (1856—1922), А. М. Ляпунова (1857—1918) и др. Значительный вклад в теорию вероятностей внесли отечественные учёные А. Н. Колмогоров (1903—1987), А. Я. Хинчин (1894—1959), Б. В. Гнеденко и др.

В настоящее время теория вероятностей продолжает развиваться и находит широкое применение в естествознании, экономике, производстве и гуманитарных науках.

Глава VII

Комплексные числа

Мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что сочетание бытия с небытием.

Г. Лейбниц

Наше представление о числе изменялось по мере расширения круга задач, которые необходимо было решать. Если для счёта отдельных предметов достаточно было *натуральных* чисел, то для решения уравнений вида $x+a=b$ натуральных чисел недостаточно, нужно было вводить *отрицательные* числа и *нуль*.

Для того чтобы решать уравнения вида $ax+b=0$, где $a \in Z$ и $b \in N$, понадобились *рациональные* числа. Но уже решение таких, например, уравнений, как $x^2=3$, $x^2-2=0$, потребовало введения *иррациональных* чисел. Однако оказалось, что рациональных и иррациональных чисел (образующих множество *действительных* чисел) также недостаточно даже для решения простейших квадратных уравнений с натуральными коэффициентами, таких, например, как

$$x^2+1=0,\ x^2+x+1=0.$$

Потребовалось введение новых чисел, названных сначала мнимыми, а затем *комплексными*.

Таким образом, стремление сделать уравнения разрешимыми явилось одной из главных причин расширения понятия числа.

В результате расширения понятия числа до комплексных чисел появилось понятие мнимой единицы — числа, квадрат которого равен -1. Выражение вида $\sqrt{-1}$ впоследствии Л. Эйлер предложил обозначать буквой i (по первой букве французского слова *imaginaire* — мнимый). Таким образом, $i=\sqrt{-1}$, или $i^2=-1$.

С помощью числа i корни уравнения $x^2+1=0$ записываются как $x=\pm i$, а корни уравнения $x^2+x+1=0$ — как $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

В общем виде все известные вам числа теперь можно записать так: $a+bi$, где a и b — действительные числа. При $b=0$ это число становится действительным аналогично тому, как рациональное число $\frac{m}{n}$ при $n=1$ становится целым.

Вид числа $a+bi$ говорит о том, что оно составное из действительной и мнимой частей. Его название — комплексное и произошло от латинского слова *complexus* — составной. Запись комплексного числа в виде $a+bi$ называется алгебраической. С числами в таком виде удобно работать как с многочленами (их можно складывать, вычитать, перемножать, делить). Существуют и другие формы записи комплексных чисел. С одной из них — тригонометрической вы познакомитесь в этой главе. С числами, записанными в такой форме, удобно выполнять действия умножения, деления и возведения в степень.

История появления комплексных чисел ведёт отсчёт с XVI в. К XIX в. было изобретено геометрическое толкование комплексных чисел вида $a+bi$ как точек координатной плоскости с координатами $(a;\ b)$. Позднее оказалось, что ещё удобнее изображать комплексные числа в виде векторов с началом в начале координат и концом в точке $(a;\ b)$, а действия с ними выполнять аналогично действиям с векторами. Это существенно расширило область применения комплексных чисел. Их стали применять не только при решении уравнений, но и в других разделах математики, например в планиметрии: многие её теоремы стало достаточно просто доказывать как некоторые комплексные тождества.

Геометрическая форма комплексного числа (с которой вы познакомитесь в этой главе) используется и в физике, там, где речь идёт о векторных величинах, например в теориях упругости и колебаний, в аэро- и гидродинамике, в электротехнике.

Комплексные числа используются, например, в описании процессов плоского течения жидкости, обтекания профилей газами и жидкостями. Так, комплексные числа использовал великий русский учёный Н. Е. Жуковский (1847—1921) при создании теории крыла летательных аппаратов.

С помощью комплексных чисел можно рассчитывать параметры для сетей постоянного и переменного тока. В электротехнике комплексными числами описывают реактивное сопротивление катушек и конденсаторов.

Комплексные числа лежат в основе математического аппарата квантовой физики. Ключевое уравнение квантовой механики — *уравнение Шрёдингера* — содержит мнимую единицу; решение этого уравнения также содержит i. Однако конечные формулы для расчёта наблюдаемых физических характеристик уже не содержат комплексных чисел (мнимая единица i «поработала» в расчётах как необходимый вспомогательный аппарат и «удалилась»).

Вычисления целого ряда интегралов при использовании теории функций комплексного переменного превращаются в тривиальные задачи.

Некоторые формулы с использованием мнимой единицы поражают воображение: $e^{i\pi} = -1$, $i^i = e^{i\ln i} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Знание комплексных чисел позволяет удобно и компактно формулировать многие математические модели, применяемые в естественных науках и прикладных знаниях. Например, с помощью модели $T = П + iЦ$ в экономике описывают свойства товара, имеющего определённые потребительские характеристики ($П$) и цену ($Ц$) — денежную оценку потребительских свойств товара.

§ 1. Определение комплексных чисел. Сложение и умножение комплексных чисел

1. Введение

Прежде чем давать определение комплексных чисел, необходимо понять, какими свойствами должны обладать новые числа, какие операции желательно ввести для них и каким законам должны подчиняться эти операции.

Прежде всего для новых чисел введём понятие равенства, определим операции сложения и умножения новых чисел так, чтобы для них имели место переместительный, сочетательный и распределительный законы.

В случае когда комплексные числа совпадают с действительными, новые операции сложения и умножения должны превращаться в известные: сложение и умножение действительных чисел.

Для того чтобы на множестве комплексных чисел уравнение $x^2 + 1 = 0$ имело решение, было введено некоторое новое число — корень этого уравнения, которое было обозначено буквой i. Таким образом, i — комплексное число, такое, что $i^2 = -1$.

2. Понятие комплексного числа

Комплексными числами называют выражения вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, а i — некоторый символ, для которого по определению выполняется равенство $i^2 = -1$.

Название «комплексные» происходит от слова «составные» — по виду выражения $a + bi$. Число a называется *действительной частью* комплексного числа $a + bi$, а число b — его *мнимой частью*. Число i называется *мнимой единицей*.

Например, действительная часть комплексного числа $2 - 3i$ равна 2, мнимая часть равна -3. Запись комплексного числа в виде $a + bi$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Два комплексных числа $a + bi$ и $c + di$ называются *равными* тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$, т. е. когда равны их действительные и мнимые части.

Например, $1{,}5 + \sqrt{9}i = \frac{3}{2} + 3i$, так как $1{,}5 = \frac{3}{2}$, $\sqrt{9} = 3$.

<u>Задача 1.</u> Найти действительные числа x и y из равенства

$$(3x - y) + (x + y)i = 6 - 2i.$$

▷ По определению равенства комплексных чисел запишем систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 6, \\ x + y = -2, \end{cases}$$

решая которую находим $x = 1$, $y = -3$. ◀

Операции сложения и умножения двух комплексных чисел определяются следующим образом:

Суммой двух комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ называется комплексное число $(a + c) + (b + d)i$, т. е.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \qquad (1)$$

Произведением двух комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ называется комплексное число $(ac - bd) + (ad + bc)i$, т. е.

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) следует, что сложение и умножение комплексных чисел можно выполнять по правилам действий с многочленами.

Поэтому нет необходимости запоминать формулы (1) и (2), их можно получить по обычным правилам алгебры, считая, что $i^2 = -1$.

<u>Задача 2.</u> Найти произведение

$$(2 + 3i)(1 + 2i).$$

▷ $(2 + 3i)(1 + 2i) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2i + 3i \cdot 1 + 3i \cdot 2i = 2 + 6i^2 + 7i =$
$= -4 + 7i$. ◀

Принято считать, что $a + 0 \cdot i = a$, т. е. комплексное число $a + 0i$ — это действительное число a.

Число вида $0 + bi$ обозначают bi, т. е. $0 + bi = bi$; его называют *чисто мнимым числом*.

Комплексное число $0 + 0i = 0$ является единственным числом, которое одновременно и действительное, и чисто мнимое.

Комплексное число принято обозначать одной буквой, чаще всего буквой z. Запись $z = a + bi$ означает, что комплексное число $a + bi$ обозначено буквой z.

Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают такими же свойствами, как и операции для действительных чисел.

3. Основные свойства сложения и умножения комплексных чисел

1. Переместительное свойство

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \; z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

2. Сочетательное свойство

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \; (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

3. Распределительное свойство

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

Докажем, например, свойство 3.

○ Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ и $z_3 = a_3 + b_3 i$. Доказать, что

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3. \qquad (3)$$

Преобразуем левую часть равенства (3):

$$z_1(z_2 + z_3) = (a_1 + b_1 i)(a_2 + a_3 + (b_2 + b_3)i) =$$
$$= a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3) + (b_1(a_2 + a_3) + a_1(b_2 + b_3))i =$$
$$= a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 + (b_1a_2 + b_1a_3 + a_1b_2 + a_1b_3)i.$$

Преобразуем правую часть равенства (3):

$$z_1z_2 + z_1z_3 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i)(a_3 + b_3 i) =$$
$$= a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)i + a_1a_3 - b_1b_3 + (a_1b_3 + b_1a_3)i =$$
$$= a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 + (b_1a_2 + b_1a_3 + a_1b_2 + a_1b_3)i.$$

Следовательно, равенство (3) выполняется. ●

Аналогично доказываются свойства 1 и 2.

Заметим, что числа $0 = 0 + 0i$ и $1 = 1 + 0i$ на множестве комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и на множестве действительных чисел:

$$z + 0 = z, \; z \cdot 1 = z.$$

Задача 3. Выполнить действия:

$$(1 + 2i)(-3 - i) + (4 + 3i) \cdot 2 - 12i.$$

▷ $(1 + 2i)(-3 - i) + (4 + 3i) \cdot 2 - 12i = -3 - i - 6i - 2i^2 + 8 + 6i - 12i =$
$= -3 - 7i + 2 + 8 - 6i = 7 - 13i.$ ◀

Определение комплексного числа как числа вида $a + bi$ несёт в себе определённую неясность, которая связана с применением знаков сложения и умножения до того момента, когда эти операции вводятся явно.

Устранению этой неясности способствует **строгое** определение комплексного числа.

Определение

***Комплексным числом* z называют пару $(a;\ b)$ действительных чисел a и b, взятых в определённом порядке.**

Пары $(a;\ b)$ и $(c;\ d)$ задают одно и то же комплексное число тогда и только тогда, когда они совпадают, т. е. тогда, когда $a=c,\ b=d$.

Сложение и умножение комплексных чисел определяются в этом случае равенствами

$$(a;\ b)+(c;\ d)=(a+c;\ b+d),$$
$$(a;\ b)(c;\ d)=(ac-bd;\ ad+bc).$$

Далее доказываются основные свойства арифметических действий. Затем особо выделяют числа вида $(a;\ 0)$, $a\in \boldsymbol{R}$, и $(0;\ 1)$ и устанавливают, что сложение и умножение комплексных чисел полностью согласуются со сложением и умножением действительных чисел, если пару $(a;\ 0)$ считать действительным числом a.

Число a называют *действительной частью* комплексного числа и обозначают $a=\operatorname{Re} z$, число b называют *мнимой частью* комплексного числа и обозначают $b=\operatorname{Im} z$ (от французских слов *réele* — действительный и *imaginaire* — мнимый).

Комплексные числа $(a;\ b)$ при $b\neq 0$ называют *мнимыми* числами, а числа вида $(0;\ b)$ называют чисто мнимыми числами.

Упражнения

580. (Устно.) Назвать действительную и мнимую части комплексного числа:

1) $3+4i$; 2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}i$; 3) $\sqrt{2}-\sqrt{5}i$;

4) $-\sqrt[3]{4}+i$; 5) 12; 6) $3{,}5i$.

581. Записать комплексное число, у которого действительная и мнимая части соответственно равны:

1) 2 и 5; 2) 2,3 и −1,7;
3) 0 и −6; 4) −6 и 0.

582. (Устно.) При каком значении x равна нулю действительная часть комплексного числа:

1) $(x-5)+2i$; 2) $\left(x+\frac{1}{3}\right)-i$;

3) $(2x+1)-3i$; 4) $(3x-5)+4i$?

583. (Устно.) При каком значении x равна единице мнимая часть комплексного числа:

1) $12+(x-3)i$; 2) $-1+(x+1)i$;

3) $\sqrt{2}+(2x-1)i$; 4) $-\frac{1}{5}-(3x-4)i$?

584. Указать, какие из данных комплексных чисел равны:

$-\frac{1}{2}+\sqrt{9}i$; $\sqrt[3]{8}+i$; $-0{,}5+3i$; $2+i$; $-5-\sqrt{36}i$; $\frac{10}{2}-\sqrt{36}i$.

585. Найти сумму комплексных чисел:

1) $(5+4i)+(-2+3i)$;
2) $(1+5i)+(6-7i)$;
3) $(0{,}5-3{,}2i)+(1{,}5-0{,}8i)$;
4) $(-1-2i)+3i$;
5) $\left(3+\sqrt{5}i\right)+\left(3-\sqrt{5}i\right)$;
6) $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)$.

586. Найти произведение комплексных чисел:

1) $(2+3i)(4+5i)$;
2) $(1-2i)(5-i)$;
3) $(-3-2i)(2+3i)$;
4) $(3-i)(3+i)$;
5) $\left(-\frac{1}{2}+1{,}5i\right)(2-4i)$;
6) $\left(\sqrt{2}+3i\right)\left(\sqrt{2}+3i\right)$.

587. Выполнить действия:

1) $2(1+i)+3-7i$
2) $(2+i)(-3-2i)+1+11i$;
3) $2i(1+i)+4i\left(2-\frac{1}{2}i\right)$;
4) $(-3+4i)2i+(-2-7i)(-3i)$;
5) $\left(\sqrt{3}+2i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)+1-4\sqrt{3}i$;
6) $\frac{1}{3}i(6-12i)+\frac{1}{4}i(4+8i)$.

588. Какое число можно прибавить к числу $7{,}5-2\sqrt{5}i$, чтобы оно стало:

1) действительным; 2) чисто мнимым?

589. Найти действительные числа x и y, если:

1) $9x+2yi=12+i$;
2) $x-2yi=-1-\sqrt{3}i$;
3) $2x-(3+y)i=-4+5{,}3i$;
4) $-3x+\left(y-\frac{3}{4}\right)i=1{,}5+\frac{1}{4}i$;
5) $(x+y)+(x-y)i=3+i$;
6) $(5x-y)+(x+y)i=7-i$.

590. Упростить выражение (a, b — действительные числа):

1) $(a+3bi)+(a-5bi)$;
2) $(3a+2bi)+(-7a-2bi)$;
3) $(a+3bi)(a-3bi)$;
4) $(2a+bi)(2a-bi)$;
5) $(2b+3ai)(3a+2bi)$;
6) $(3a+4bi)(4b+3ai)$.

591. Найти действительные значения x, при которых число z будет действительным:

1) $z=6x^2i+2xi-5x^2$;
2) $z=(x-3xi)+(5+x^2i)$.

592. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1=x^2-7x+9yi$ и $z_2=y^2i+20i-12$ равны?

593. Найти действительные значения x и y, если:

1) $(x+2yi)+(3y-2xi)=2+4i$;
2) $(2x+5yi)+(y+xi)=2+i$;
3) $y-\frac{10}{x}+7i=\frac{8i}{x}+yi-2$;
4) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{i}{x}=\frac{3}{x}-\frac{i}{y}+3i$.

594. Доказать равенство:

1) $z_1+z_2=z_2+z_1$;
2) $z_1z_2=z_2z_1$;
3) $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$;
4) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$;
5) $z+0=z$;
6) $z\cdot 1=z$.

§ 2. Комплексно сопряжённые числа. Модуль комплексного числа. Операции вычитания и деления

1. Комплексно сопряжённые числа

Определение

Сопряжённым с числом $z=a+bi$ называется комплексное число $a-bi$, которое обозначается $\bar{z}$, т. е.

$$\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi.$$

Например, $\overline{3+4i}=3-4i$, $\overline{-2-5i}=-2+5i$, $\bar{i}=-i$.

Отметим, что $\overline{a-bi}=a+bi$, поэтому для любого комплексного числа z имеет место равенство

$$\overline{(\bar{z})}=z.$$

Равенство $\bar{z}=z$ справедливо тогда и только тогда, когда z — действительное число.

○ Пусть $z=a+bi$. Тогда $\bar{z}=a-bi$, и равенство $a+bi=a-bi$ по определению равенства комплексных чисел справедливо тогда и только тогда, когда $b=-b$, т. е. $b=0$, а это и означает, что $z=a+bi=a+0i=a$ — действительное число. ●

Из определения следует, что

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}.$$

2. Модуль комплексного числа

Модулем комплексного числа $z=a+bi$ называется число $\sqrt{a^2+b^2}$ и обозначается $|z|$, т. е.

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}. \quad (1)$$

Например, $|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, $|i|=$ $=\sqrt{0^2+1^2}=1$.

Из формулы (1) следует, что $|z|\geqslant 0$ для любого комплексного числа z, причём $|z|=0$ тогда и только тогда, когда $z=0$, т. е. когда $a=0$ и $b=0$.

Докажем, что для любого комплексного числа z справедливы формулы

$$|z|=|\bar{z}|,\ z\bar{z}=|z|^2.$$

○ Пусть $z=a+bi$. Тогда $\bar{z}=a-bi$, и по определению модуля комплексного числа

$$|\bar{z}|=|a-bi|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}=|z|.$$

Найдём произведение:

$$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2=|z|^2. \ ●$$

3. Вычитание комплексных чисел

Комплексное число $(-1)z$ называется *противоположным* комплексному числу z и обозначается $-z$.
Если $z=a+bi$, то $-z=-a-bi$. Например, $-(3-5i)=-3+5i$.
Для любого комплексного числа z выполняется равенство

$$z+(-z)=0.$$

Вычитание комплексных чисел вводится как операция, обратная сложению: для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует, и притом только одно, число z, такое, что

$$z+z_2=z_1, \qquad (2)$$

т. е. уравнение (2) имеет только один корень.

Прибавим к обеим частям равенства (2) число $(-z_2)$, противоположное числу z_2:

$$z+z_2+(-z_2)=z_1+(-z_2),\ \text{откуда}\ z=z_1+(-z_2).$$

Число $z=z_1+(-z_2)$ обычно обозначают $z=z_1-z_2$ и называют *разностью* чисел z_1 и z_2.

Если $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, то разность z_1-z_2 имеет следующий вид:

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i. \qquad (3)$$

Формула (3) показывает, что разность комплексных чисел можно находить по правилам действий с многочленами.

Задача 1. Найти разность $(1+3i)-(-4+5i)$.

▷ $(1+3i)-(-4+5i)=1+3i+4-5i=5-2i$. ◀

4. Деление комплексных чисел

Деление комплексных чисел вводится как операция, обратная умножению: для любых комплексных чисел z_1 и $z_2\neq 0$

существует, и притом только одно, число z, такое, что $zz_2 = z_1$, т. е. это уравнение относительно z имеет только один корень, который называется *частным* чисел z_1 и z_2 и обозначается $z_1 : z_2$, или $\frac{z_1}{z_2}$, т. е. $z = z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2}$.

Комплексное число нельзя делить на нуль.

Докажем, что уравнение $z_2 z = z_1$ для любых комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ имеет только один корень, и найдём этот корень.

○ Умножив обе части уравнения на $\overline{z}_2$, получим $zz_2\overline{z}_2 = z_1\overline{z}_2$, т. е.

$$z|z_2|^2 = z_1\overline{z}_2.$$

Полученное уравнение равносильно данному, так как $z_2 \neq 0$, и потому $\overline{z}_2 \neq 0$. Умножим обе его части на действительное число $\frac{1}{|z_2|^2}$ (заметим, что $|z_2|^2 \neq 0$, так как $z_2 \neq 0$), получим $z = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}$. Итак, частное комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$ можно найти по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}. \bullet \qquad (4)$$

Каждое комплексное число z, не равное нулю, имеет *обратное* ему число w, такое, что $z \cdot w = 1$. Если $z = a + bi$ и $w = x + yi$, то равенство $z \cdot w = 1$ принимает вид

$$(a + bi)(x + yi) = 1 \text{ или } (ax - by) + (bx + ay)i = 1.$$

Из последнего равенства получаем систему

$$\begin{cases} ax - by = 1, \\ bx + ay = 0, \end{cases}$$

решая которую находим $x = \frac{a}{a^2 + b^2}$, $y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$.

Заметим, что $a^2 + b^2 \neq 0$, так как $z \neq 0$.

Таким образом, если $z = a + bi$, то число, ему обратное, принимает вид

$$w = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Если $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, то формулу (4) можно представить в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}i.$$

Эту формулу можно не запоминать, достаточно помнить, что она получается умножением числителя и знаменателя дроби $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$ на число, сопряжённое со знаменателем.

Например:

$$\frac{2+3i}{1-2i}=\frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{2+4i+3i+6i^2}{1+4}=\frac{-4+7i}{5}=-\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i.$$

По определению умножения комплексных чисел

$i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot i=-i,$

$i^4=i^3\cdot i=(-i)\cdot i=-i^2=-(-1)=1,$

$i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i.$

Вообще

$i^{4n+k}=(i^4)^n\cdot i^k=1^n\cdot i^k=i^k$, т. е. $i^{4n+k}=i^k$.

Например, $i^{23}=i^{4\cdot5+3}=i^3=-i$.

Задача 2. Вычислить $\frac{(1-2i)(1+i)}{3+i}+\frac{1}{i}$.

▷ $\frac{(1-2i)(1+i)}{3+i}+\frac{1}{i}=\frac{1+i-2i-2i^2}{3+i}+\frac{1}{i}=\frac{(3-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}+\frac{(-i)}{i(-i)}=$

$=\frac{9-3i-3i+i^2}{9+1}-i=\frac{8-6i}{10}-i=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i-i=\frac{4}{5}-\frac{8}{5}i.$ ◀

Задача 3. Вычислить $\left(\frac{1+i^7}{1+i^9}\right)^3$.

▷ $i^7=i^{4+3}=i^3=-i,\ i^9=i^{4\cdot2+1}=i,$

$\left(\frac{1+i^7}{1+i^9}\right)^3=\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3=\left(\frac{(1-i)(1-i)}{2}\right)^3=\left(\frac{-2i}{2}\right)^3=i.$ ◀

Задача 4. Доказать, что для любых двух комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$$

▷ Используя свойство комплексно сопряжённых чисел, получаем $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=(z_1+z_2)\times$
$\times(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=2z_1\bar{z}_1+2z_2\bar{z}_2=2(|z_1|^2+|z_2|^2).$ ◀

Упражнения

595. Записать комплексное число, сопряжённое с числом:
1) $1+i$; 2) $3+4i$; 3) $-2+5i$;
4) $-6-3i$; 5) $-0{,}7-1{,}3i$; 6) $\frac{1}{2}-\frac{3}{4}i$.

596. Найти модуль комплексного числа:
1) $6+8i$; 2) $8-6i$; 3) $-\sqrt{3}+i$; 4) $\sqrt{2}-\sqrt{3}i$;
5) $5i$; 6) $-2i$; 7) $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i$; 8) $-\frac{4}{7}-\frac{3}{7}i$.

597. Записать число, противоположное числу:

1) $5+3i$; 2) $4-2i$; 3) $-3+i$; 4) $-\sqrt{2}-7i$.

598. Найти разность комплексных чисел:

1) $(3+4i)-(1+3i)$; 2) $(2-7i)-(5+2i)$;
3) $(1+i)-(1-i)$; 4) $(5-2i)-(3-2i)$;
5) $(2+5i)-(-1+6i)$; 6) $(-1-4i)-(-1-3i)$;
7) $\left(\sqrt{2}+2\sqrt{3}i\right)-\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}i\right)$; 8) $\left(3\sqrt{5}-\sqrt{3}i\right)-\left(\sqrt{5}+4\sqrt{3}i\right)$.

599. Вычислить:

1) $(5-3i)-(1+2i)+(2-i)$; 2) $(4-2i)-(7+i)+(2-i)$;
3) $(8+2i)-(3-7i)-(5+6i)$; 4) $(2+3i)+(-6-i)-(-3+2i)$.

600. Найти частное комплексных чисел:

1) $\frac{1-i}{1+i}$; 2) $\frac{3+3i}{1-3i}$; 3) $\frac{2i}{1-i}$; 4) $\frac{1-i}{2i}$;
5) $\frac{2+5i}{-1+6i}$; 6) $\frac{5}{-1-2i}$; 7) $\frac{-3+2i}{1-4i}$; 8) $\frac{-4-3i}{-2-5i}$.

601. Вычислить:

1) $\frac{(4-3i)(2-i)}{1+i}$; 2) $\frac{(1+i)(2+i)}{3-i}$;
3) $\frac{1-i}{(2+i)(3-4i)}$; 4) $\frac{2-i}{(3-i)(1+3i)}$;
5) $\frac{5+2i}{2-5i}+\frac{3-4i}{4+3i}$; 6) $\frac{2-3i}{1+4i}-\frac{2+3i}{1-4i}$.

602. Найти модуль комплексного числа z, если:

1) $z=-5-2\sqrt{6}i$; 2) $z=-9$; 3) $z=-i$; 4) $z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$.

603. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1=9y^2-4-10xi$ и $z_2=8y^2+20i^7$ являются сопряжёнными?

604. При каком значении x комплексные числа $z_1=x-8-6i$ и $z_2=2x^2+6i-2$ являются противоположными?

Решить уравнение **(605—606)**.

605. 1) $(1-6i)+z=-4-7i$; 2) $\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{3}i\right)-z=\sqrt{5}+\sqrt{3}i$;
3) $(5-4i)-z=3-5i$; 4) $z+\left(5-\sqrt{2}\right)i=6-i$.

606. 1) $z(3-2i)=1+2i$; 2) $z\ (-3+2i)=5-4i$;
3) $z(1-3i)-6=2i$; 4) $z(-1+i)-7i=-1$.

607. Вычислить:

1) $(3-2i)^2$; 2) $(1+2i)^3$; 3) $(1+i)^4$;
4) $(1-i)^6$; 5) $(1+i)^3-(1-i)^3$;
6) $\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

608. Выполнить действия:

1) $\frac{5+12i}{8-6i}+\frac{(1+2i)^2}{2+i}$; 2) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$.

609. Решить уравнение:
1) $|z| - iz = 1 - 2i$; 2) $z^2 + 3|z| = 0$.

610. Вычислить:
1) $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$; 2) $\frac{1}{i^{13}} + \frac{1}{i^{23}} + \frac{1}{i^{33}}$.

611. Доказать, что $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4c^2$, если $|z_1| = |z_2| = c$.

612. Вычислить:
1) $(1 + i)^8$; 2) $(1 - i)^{12}$.

613. С помощью равенства $(m + ni)(m - ni) = m^2 + n^2$ доказать, что произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма квадратов двух целых чисел, является также суммой квадратов двух целых чисел.

614. Доказать, что комплексное число $\frac{1-z}{1+z}$ является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $|z| = 1$.

§ 3. Геометрическая интерпретация комплексного числа

1. Комплексная плоскость

Действительные числа геометрически изображаются точками числовой прямой. Комплексное число $a + bi$ можно рассматривать как пару действительных чисел $(a; b)$. Поэтому естественно комплексные числа изображать точками плоскости.

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $z = a + bi$ изображается точкой плоскости с координатами $(a; b)$, и эта точка обозначается той же буквой z (рис. 105).

Такое соответствие между комплексными числами и точками плоскости взаимно однозначно: каждому комплексному числу $a + bi$ соответствует одна точка плоскости с координатами $(a; b)$ и, наоборот, каждой точке плоскости с координатами $(a; b)$ соответствует одно комплексное число $a + bi$. Поэтому слова «комплексное число» и «точка плоскости» часто употребляются как синонимы. Так, вместо слов «точка, изображающая число $1 + i$» говорят «точка $1 + i$». Можно, например, сказать «треугольник с вершинами в точках i, $1 + i$, $-i$».

При такой интерпретации действительные числа a, т. е. комплексные числа $a + 0i$, изображаются точками с координатами $(a; 0)$, т. е. точками оси абсцисс. Поэтому ось абсцисс называют *действительной осью*. Чисто мнимые числа $bi = 0 + bi$ изображаются точками с координатами $(0; b)$, т. е. точками оси ординат, поэтому ось ординат называют

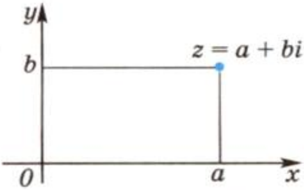


Рис. 105

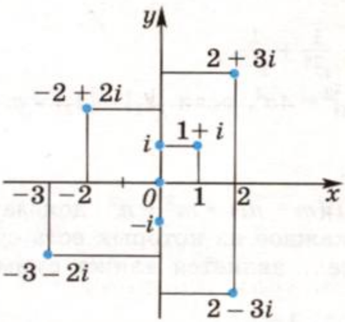


Рис. 106

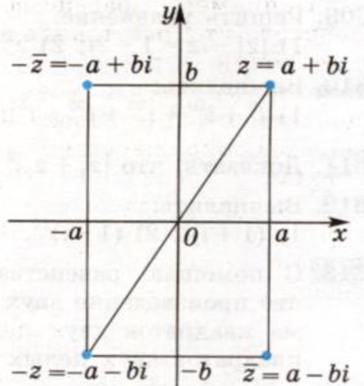


Рис. 107

мнимой осью. При этом точка с координатами (0; b) обозначается bi. Например, точка (0; 1) обозначается i, точка (0; −1) — это $-i$, точка (0; 2) — это точка $2i$ (рис. 106). Начало координат — это точка 0. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют *комплексной плоскостью*.

Отметим, что точки z и $-z$ симметричны относительно точки 0 (начала координат), а точки z и $\overline{z}$ симметричны относительно действительной оси (рис. 107).

○ Пусть $z=a+bi$. Тогда $-z=-a-bi$, $\overline{z}=a-bi$. Точки z и $-z$ имеют координаты соответственно $(a;\ b)$ и $(-a;\ -b)$, следовательно, они симметричны относительно начала координат. Точка $\overline{z}$ имеет координаты $(a;\ -b)$, следовательно, она симметрична точке z относительно действительной оси (см. рис. 107). ●

Комплексное число $z=a+bi$ можно изображать вектором с началом в точке 0 и концом в точке z. Этот вектор будем обозначать той же буквой z, длина этого вектора равна $|z|$.

Число z_1+z_2 изображается вектором, построенным по правилу сложения векторов z_1 и z_2, а вектор z_1-z_2 можно построить как сумму векторов z_1 и $-z_2$ (рис. 108).

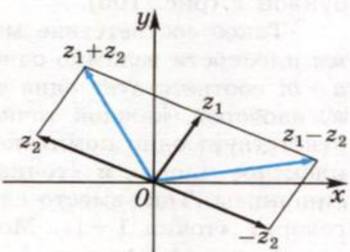


Рис. 108

2. Геометрический смысл модуля комплексного числа

Выясним геометрический смысл $|z|$.

Пусть $z=a+bi$. Тогда по определению модуля $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Это означает, что $|z|$ — расстояние от точки 0 до точки z.

Например, равенство $|z| = 4$ означает, что расстояние от точки 0 до точки z равно 4 (рис. 109). Поэтому множество всех точек z, удовлетворяющих равенству $|z| = 4$, является окружностью с центром в точке 0 радиуса 4. Уравнение $|z| = R$ является уравнением окружности с центром в точке 0 радиуса R, где R — заданное положительное число.

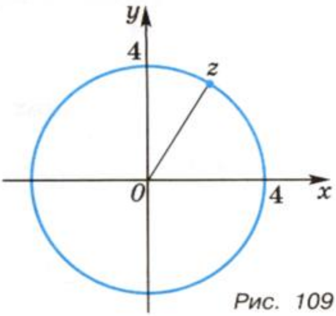


Рис. 109

3. Геометрический смысл модуля разности комплексных чисел

Выясним геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел, т. е. $|z_1 - z_2|$. Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$.

Тогда $|z_1 - z_2| = |(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$.

Из курса геометрии известно, что это число равно расстоянию между точками с координатами $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$.

Итак, $|z_1 - z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2.

Например, расстояние между точками 1 и $-3 + 3i$ равно

$$|1 - (-3 + 3i)| = |4 - 3i| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5.$$

Покажем, что $|z - z_0| = R$ — уравнение окружности с центром в точке z_0 радиуса R, где z_0 — заданное комплексное число, R — заданное положительное число.

○ Так как $|z - z_0|$ — расстояние между точками z и z_0, то множество всех точек z, удовлетворяющих уравнению $|z - z_0| = R$, — это множество всех точек, расстояние от которых до точки z_0 равно R. ●

Например, $|z + i| = 2$ — уравнение окружности с центром в точке $-i$ радиуса 2, так как данное уравнение можно записать в виде $|z - (-i)| = 2$.

Задача 1. Пусть z_1, z_2 — разные точки комплексной плоскости. Доказать, что $|z - z_1| = |z - z_2|$ — уравнение прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки z_1, z_2, и проходящей через его середину.

▷ Так как $|z - z_1|$ — расстояние от точки z до точки z_1, а $|z - z_2|$ — расстояние от точки z до точки z_2, то множество всех точек, удовлетворяющих уравнению $|z - z_1| = |z - z_2|$,— это множество всех точек, равноудалённых от двух точек z_1 и z_2. ◀

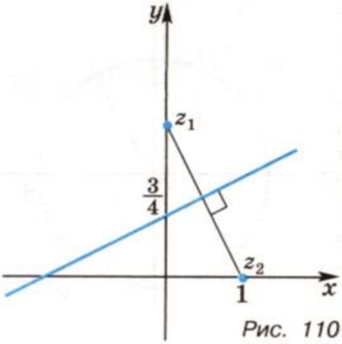


Рис. 110

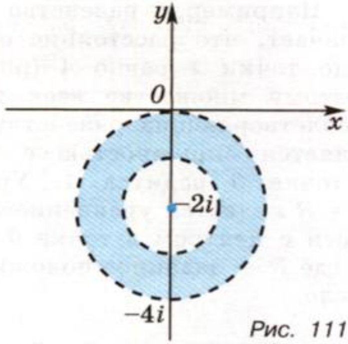


Рис. 111

Например, $|z-2i|=|z-1|$ — уравнение прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки $z_1=2i$ и $z_2=1$, и проходящей через его середину (рис. 110).

Задача 2. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $1<|z+2i|<2$.

▷ Условию $|z+2i|<2$ удовлетворяют все точки, лежащие внутри круга радиуса 2 с центром в точке $z_0=-2i$, а условию $|z+2i|>1$ — все точки, лежащие вне круга радиуса 1 с центром в точке z_0 (рис. 111). Искомое множество точек — кольцо между окружностями радиусов 1 и 2 с общим центром в точке $z_0=-2i$. ◀

Упражнения

615. На комплексной плоскости построить точки:
1) 3; 2) 4; 3) -2; 4) $6i$; 5) $4i$; 6) $-2i$; 7) $1+3i$; 8) $2+5i$; 9) $-3+i$; 10) $-1+i$; 11) $-1-3i$; 12) $-4-i$; 13) $1-4i$; 14) $3-3i$.

616. Построить окружность:
1) $|z|=3$; 2) $|z|=5$; 3) $|z-2i|=1$; 4) $|z+3i|=2$.

617. Решить уравнение:
1) $z+3\bar{z}=8+12i$; 2) $4z-\bar{z}=-9+10i$.

618. Найти расстояние между точками:
1) 6 и $8i$; 2) $7i$ и $-2i$; 3) $1+i$ и $2+3i$; 4) $3-2i$ и $1-4i$.

619. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:
1) $|z|=5$; 2) $|z-1|=3$;
3) $|z+3i|=1$; 4) $|z+2i-1|=2$;
5) $|z-2|=|z+i|$; 6) $|z-1-i|=|z+1+i|$.

620. Найти множество точек комплексной плоскости, которое задаётся условием:
1) $|z-i|<3$; 2) $|z+3i|>4$; 3) $1<|z+2|<2$; 4) $2\leqslant|z-5i|\leqslant 3$.

621. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} |z+1| = |z+2|, \\ |3z+9| = |5z+10i|; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (1-i)\bar{z} = (1+i)z, \\ |z^2+51i| = 1. \end{cases}$

622. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} |z+1-i| = \sqrt{2}, \\ |z| = 3 \end{cases}$$

не имеет решений.

623. Решить систему уравнений $\begin{cases} \left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| - 1 = 0, \\ \left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right| = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$

§ 4. Тригонометрическая форма комплексного числа

1. Аргумент комплексного числа

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ — это угол φ между положительным направлением действительной оси и вектором Oz (рис. 112). Этот угол считается положительным, если отсчёт ведётся против часовой стрелки, и отрицательным при отсчёте по часовой стрелке.

Связь между действительной и мнимой частями комплексного числа $z = a + bi$, его модулем $r = |z|$ и аргументом φ выражается следующими формулами:

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases} \qquad (2)$$

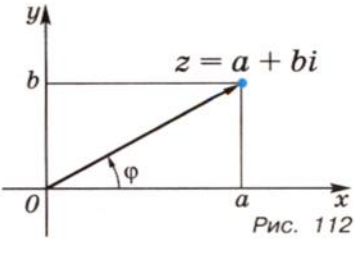


Рис. 112

Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ ($z \neq 0$) можно найти, решив систему (2). Эта система имеет бесконечно много решений вида $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, где $k \in \mathbf{Z}$, φ_0 — одно из решений системы (1), т. е. аргумент комплексного числа определяется неоднозначно.

Для нахождения аргумента комплексного числа $z = a + bi$ ($a \neq 0$) можно воспользоваться формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}. \qquad (3)$$

При решении уравнения (3) нужно учитывать, в какой четверти находится точка $z = a + bi$.

Задача 1. Найти все аргументы комплексного числа z:

1) $z=-2i$; 2) $z=-1+i\sqrt{3}$.

▷ 1) Число z лежит на отрицательной части мнимой оси, т. е. один из аргументов этого числа равен $-\frac{\pi}{2}$, а множество всех аргументов имеет вид $\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in \mathbf{Z}$.

2) По формуле (3) находим $\operatorname{tg}\varphi=-\sqrt{3}$. Учитывая, что число z лежит во второй четверти, получаем $\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in \mathbf{Z}$. ◀

2. Запись комплексного числа в тригонометрической форме

Из равенства (1) следует, что любое комплексное число $z=a+bi$, где $z\neq 0$, представляется в виде

$$z=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{4}$$

где $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ — модуль комплексного числа z, φ — его аргумент. Запись комплексного числа в виде (4), где $r>0$, называют *тригонометрической формой комплексного числа z*.

Задача 2. Записать в тригонометрической форме комплексное число:

1) $z_1=-1-i$; 2) $z_2=-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

▷ 1) Применяя формулу (3), получаем $\operatorname{tg}\varphi=1$, откуда $\varphi=\frac{5\pi}{4}$, так как точка $-1-i$ лежит в третьей четверти. Учитывая, что $|z_1|=\sqrt{2}$, имеем $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

2) Так как точка z_2 лежит во второй четверти, то, используя формулы приведения, получаем $-\cos\frac{\pi}{7}=\cos\frac{6\pi}{7}$, $\sin\frac{\pi}{7}=\sin\frac{6\pi}{7}$, и поэтому $z_2=\cos\frac{6\pi}{7}+i\sin\frac{6\pi}{7}$. ◀

Пусть комплексные числа z_1 и z_2 записаны в тригонометрической форме:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\ z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Тогда равенство $z_1=z_2$ имеет место в том и только в том случае, когда $r_1=r_2$, $\varphi_1=\varphi_2+2k\pi,\ k\in \mathbf{Z}$.

Обратим внимание на то, что выражения

$$-5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),\ 3\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$
$$\sqrt{2}\left(\sin\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),\ \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$$

не являются тригонометрическими формами записи каких-либо комплексных чисел.

Упражнения

624. Найти все аргументы комплексного числа:

1) $z = 7$; 2) $z = -4$; 3) $z = i$;

4) $z = -3i$; 5) $z = -1 + i$; 6) $z = \sqrt{3} + i$;

7) $z = 2 - 2i$; 8) $z = -1 - \sqrt{3}\,i$.

625. Записать в тригонометрической форме комплексное число:

1) $z = 3$; 2) $z = -1$; 3) $z = 3 + 3i$;

4) $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$; 5) $z = -1 - \sqrt{3}\,i$; 6) $z = 5 - 5i$;

7) $z = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 8) $z = -\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$.

626. Записать в алгебраической форме комплексное число:

1) $\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$; 2) $3(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$;

3) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 4) $4\left(\cos\frac{9\pi}{2} + i\sin\frac{9\pi}{2}\right)$;

5) $\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$; 6) $\cos\frac{13\pi}{3} + i\sin\frac{13\pi}{3}$.

627. Записать в тригонометрической форме комплексное число:

1) $\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}$; 2) $12\left(-\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

3) $\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right)$; 4) $3\left(\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right)$.

628. Число $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ можно выразить через тригонометрические функции следующим образом:

1) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$;

2) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\frac{5\pi}{3}$;

3) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

4) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

5) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$.

Какая из этих записей является тригонометрической формой комплексного числа?

629. Представить в тригонометрической форме комплексное число:

1) $\frac{5 - i}{2 - 3i}$; 2) $\frac{i}{(1+i)^2}$; 3) $\frac{1 + \sqrt{3}\,i}{i^3}$; 4) $\frac{(1+i)(2+i^5)}{3 - i^{13}}$.

630. Доказать, что если $|z| = 1$, то $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

631. Записать в тригонометрической форме комплексное число:

1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; 2) $-5\ (\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)$;

3) $1 + \cos\alpha + i\sin\alpha,\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$; 4) $1 + \cos\frac{12\pi}{7} + i\sin\frac{12\pi}{7}$.

§ 5. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Формула Муавра

С помощью тригонометрической формы удобно находить произведение и частное комплексных чисел z_1 и z_2.

Вычислим произведение:

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 +$$
$$+ \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Итак,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \qquad (1)$$

Из формулы (1) следует, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Вычислим частное ($z_2 \neq 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)),$$ т. е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.

Задача 1. Найти произведение

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right).$$

▷ По формуле (1) имеем

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{24}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right). \ ◀$$

4) $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$;

5) $\sqrt{2}(\cos 55^\circ + i\sin 55^\circ)\cdot\sqrt{2}(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ)$;

6) $(\cos 7 + i\sin 7)(\cos 3 + i\sin 3)$.

633. Найти частное:

1) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$;

2) $\dfrac{8\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$;

3) $\dfrac{\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$;

4) $\dfrac{\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ}{2(\cos(-15^\circ)+i\sin(-15^\circ))}$;

5) $\dfrac{\sqrt{12}(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)}{\sqrt{3}(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)}$;

6) $\dfrac{\cos 7 + i\sin 7}{\cos 2 + i\sin 2}$.

634. Возвести в степень комплексное число:

1) $\left(2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right)^3$;

2) $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6$;

3) $\left(\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^4$;

4) $\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^9$.

635. Выполнить действия и записать результат в алгебраической форме:

1) $\dfrac{i\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$;

2) $\dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}}$;

3) $\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)(1+\sqrt{3}i)^7}{i}$;

4) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{1-i}$;

5) $\left(\dfrac{i^8+\sqrt{3}i^5}{4}\right)^5$;

6) $\dfrac{(2i)^7}{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^6}$.

636. Записать в тригонометрической форме результат действий:

1) $z=\dfrac{-1+i}{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$;

2) $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)^4$;

3) $z=\left(\dfrac{\sqrt{3}i+1}{i-1}\right)^6$;

4) $z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}$.

637. С помощью тригонометрической формы комплексного числа решить уравнение:

1) $z^2 = 16i$; 2) $z^2 = -4i$;

3) $z^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$; 4) $z^2 = -1 - \sqrt{3}i$.

638. Представить в тригонометрической форме число:

1) $\sin\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$; 2) $\sin\alpha + i(1 - \cos\alpha)$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

3) $(\operatorname{tg} 1 - i)^4$; 4) $\frac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

639. Применяя формулу Муавра, доказать равенство:

1) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; 2) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

3) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; 4) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

640. Доказать равенство (n — натуральное число):

$$\left(\frac{1 + i\operatorname{tg}\alpha}{1 - i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1 + i\operatorname{tg} n\alpha}{1 - i\operatorname{tg} n\alpha}.$$

641. Найти сумму:

1) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \ldots + \sin(2n-1)x$, $x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos(2n-1)x$, $x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

642. Доказать равенство ($x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$):

1) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$;

2) $1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\cos\frac{nx}{2} \cdot \sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

§ 6. Квадратное уравнение с комплексным неизвестным

Рассмотрим уравнение $z^2 = a$, где a — заданное действительное число, z — неизвестное.

Это уравнение:

1) имеет один корень $z = 0$, если $a = 0$;

2) имеет два действительных корня $z_{1,2} = \pm\sqrt{a}$, если $a > 0$;

3) не имеет действительных корней, если $a < 0$.

Например, уравнение

$$z^2 = -1 \qquad (1)$$

не имеет действительных корней.

Покажем, что уравнение (1) имеет два комплексных корня, и найдём их. Подставляя в уравнение вместо -1 число i^2, получаем $z^2 = i^2$, откуда $z^2 - i^2 = 0$.

Применяя формулу разности квадратов, разложим левую часть последнего уравнения на множители:

$$(z - i)(z + i) = 0.$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Следовательно, $z_1 = i$, $z_2 = -i$, т. е. уравнение (1) имеет два корня $z_{1,\,2} = \pm i$.

Аналогично можно показать, что уравнение

$$z^2 = a \tag{2}$$

при $a < 0$ также имеет два комплексных корня $z_{1,\,2} = \pm i\sqrt{|a|}$.

Например, уравнение

$$z^2 = -25 \tag{3}$$

имеет два корня $z_{1,\,2} = \pm i\sqrt{|-25|} = \pm 5i$.

По аналогии со случаем $a > 0$ корни уравнения (3) записывают в виде $z_{1,\,2} = \pm\sqrt{-25}$. При этом считается, что

$$\sqrt{-25} = i\sqrt{|-25|} = 5i.$$

Вообще если $a < 0$, то $\sqrt{a}$ определяется формулой $\sqrt{a} = i\sqrt{|a|}$.

Например:

$$\sqrt{-1} = i\sqrt{|-1|} = i,\ \sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i.$$

Такое соглашение удобно тем, что для любого действительного a корни уравнения

$$z^2 = a \tag{4}$$

можно находить по формуле

$$z_{1,\,2} = \pm\sqrt{a}. \tag{5}$$

Если $a \neq 0$ ($a > 0$ или $a < 0$), то уравнение (4) имеет два различных корня.

При $a = 0$ уравнение (4) имеет один корень $z = 0$; в этом случае говорят также, что уравнение имеет два равных корня $z_{1,\,2} = 0$ или один корень кратности два. Это часто удобно, например, для того, чтобы во всех случаях была справедлива теорема Виета.

Отметим, что теперь для любого действительного a справедливо равенство

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a. \tag{6}$$

Введённое понятие корня из отрицательного числа позволяет записать корни любого квадратного уравнения с действительными коэффициентами

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{7}$$

по известной общей формуле

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{8}$$

Задача 1. Решить уравнение

$$z^2 - 16z + 65 = 0.$$

▷ По формуле (8) находим

$$z = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 260}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{16 \pm i\sqrt{4}}{2} = \frac{16 \pm 2i}{2},$$

т. е. $z_1 = 8 + i$, $z_2 = 8 - i$. ◀

Итак, при любых действительных a, b, c, $a \neq 0$, корни уравнения (7) можно находить по формуле (8). Если дискриминант $D = b^2 - 4ac$, т. е. подкоренное выражение в формуле (8), положителен, то уравнение (7) имеет два действительных различных корня.

Если $D = 0$, то уравнение (7) имеет один корень (два равных).

Если $D < 0$, то уравнение (7) имеет два различных комплексных корня.

Отметим, что в задаче 1 корни квадратного уравнения являются сопряжёнными.

Замечание. Корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом являются сопряжёнными.

Комплексные корни квадратного уравнения обладают свойствами, аналогичными известным вам свойствам действительных корней.

Задача 2. Составить приведённое квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень $z_1 = -1 - 8i$.

▷ Второй корень $z_2 = -1 + 8i$.

По формулам Виета находим

$$p = -(z_1 + z_2) = 2,$$

$$q = z_1 z_2 = 65,$$

откуда искомое уравнение $z^2 + 2z + 65 = 0$. ◀

Задача 3. Разложить на множители квадратный трёхчлен

$$z^2 - 18z + 82.$$

▷ Корнями квадратного уравнения $z^2 - 18z + 82 = 0$ являются числа $z_1 = 9 + i$, $z_2 = 9 - i$. Следовательно,

$$z^2 - 18z + 82 = (z - 9 - i)(z - 9 + i).$$ ◀

Задача 4. Решить уравнение $z^2 = 3 + 4i$.

▷ Пусть $z = x + iy$, где x и y — неизвестные действительные числа. Тогда $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ и данное уравнение можно записать так:

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 3 + 4i.$$

Отсюда по определению равенства комплексных чисел получаем систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = 4. \end{cases}$$

Найдём действительные решения этой системы. Из второго уравнения находим $y = \frac{2}{x}$ и, подставляя это выражение для y в первое уравнение системы, получаем $x^2 - \frac{4}{x^2} = 3$, откуда $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Решая это биквадратное уравнение, получаем $x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$, т. е. $x^2 = 4$ или $x^2 = -1$. Уравнение $x^2 = -1$ не имеет действительных корней, а из уравнения $x^2 = 4$ находим $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. По формуле $y = \frac{2}{x}$ находим $y_1 = 1$, $y_2 = -1$. Следовательно, $z_1 = x_1 + iy_1 = 2 + i$, $z_2 = x_2 + iy_2 = -2 - i$.

Ответ. $z_{1,\,2} = \pm(2 + i)$. ◀

Задача 5. Решить уравнение $z^3 = 1$.

▷ Перенесём единицу в левую часть со знаком «−»: $z^3 - 1 = 0$ — и разложим левую часть на множители по формуле разности кубов:

$$z^3 - 1^3 = 0, \ (z-1)(z^2 + z + 1) = 0.$$

Отсюда $z_1 = 1$, а из уравнения $z^2 + z + 1 = 0$ находим

$$z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ. $z_1 = 1$, $z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. ◀

Упражнения

643. Решить уравнение:

1) $z^2 = -16$; 2) $z^2 = -7$; 3) $z^2 + 0{,}36 = 0$;
4) $25z^2 + 9 = 0$; 5) $z^4 - 16 = 0$; 6) $z^4 - 81 = 0$.

644. Вычислить:

1) $\sqrt{-100}$; 2) $\sqrt{-0{,}25}$; 3) $\sqrt{-12}$; 4) $\sqrt{-27}$.

Решить уравнение **(645—646)**.

645. 1) $z^2 - 2z + 10 = 0$; 2) $z^2 + 2z + 2 = 0$;
3) $z^2 - 6z + 13 = 0$; 4) $z^2 + 8z + 17 = 0$.

646. 1) $4z^2 - 4z + 5 = 0$; 2) $9z^2 + 18z + 10 = 0$;
3) $z^2 - 4z + 7 = 0$; 4) $z^2 + 2z + 6 = 0$;
5) $z^3 + 27 = 0$; 6) $z^3 = 8$.

647. Составить приведённое квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее данный корень, и проверить ответ, решив полученное уравнение:

1) $z_1 = 2 + \frac{1}{2}i$; 2) $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$;
3) $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{5}i$; 4) $z_1 = -\sqrt{6} + \sqrt{3}i$.

648. Решить уравнение:
1) $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$; 2) $z^4 + 15z^2 - 16 = 0$.

Разложить квадратный трёхчлен на множители **(649—650)**.

649. 1) $z^2 - 4z + 5$; 2) $z^2 + 4z + 13$; 3) $z^2 + 2z + 4$; 4) $z^2 - 6z + 11$.

650. 1) $4z^2 + 4z + 5$; 2) $16z^2 - 32z + 17$; 3) $25z^2 + 50z + 26$; 4) $-z^2 + 10z - 26$.

651. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее данный корень:
1) $z_1 = \frac{-3-2i}{2-i}$; 2) $z_1 = \frac{4-i}{-1+i}$.

652. Решить уравнение:
1) $z^2 = -5 + 12i$; 2) $z^2 = -3 - 4i$; 3) $z^6 = 1$; 4) $z^6 = -1$; 5) $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$.

§ 7. Извлечение корня из комплексного числа. Алгебраические уравнения

Перейдём к операции извлечения корня данной степени из комплексного числа.

Число z называется *корнем степени n из числа w* (обозначается $\sqrt[n]{w}$), если $z^n = w$.

Из данного определения следует, что каждое решение уравнения $z^n = w$ является корнем степени n из числа w. Другими словами, для того чтобы извлечь корень степени n из числа w, достаточно решить уравнение $z^n = w$.

Если $w = 0$, то при любом n уравнение $z^n = w$ имеет одно и только одно решение $z = 0$. Если $w \neq 0$, то и $z \neq 0$, а следовательно, и z и w можно представить в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ \ w = p(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Уравнение $z^n = w$ примет вид

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = p(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются слагаемым, кратным 2π. Следовательно,

$$r^n = p \text{ и } n\varphi = \theta + 2\pi k,$$

или

$$r = \sqrt[n]{p} \text{ и } \varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n},\ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Итак, все решения уравнения $z^n = w$ могут быть записаны следующим образом:

$$z_k = \sqrt[n]{p}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right), \quad (1)$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

В самом деле, придавая в полученной формуле числу k целые значения, отличные от выписанных ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$), мы не получим других комплексных чисел. Например, при $k = n$ получаем

$$z_n = \sqrt[n]{p}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right)\right) = \sqrt[n]{p}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right) = z_0.$$

Таким образом, если $w \neq 0$, то существует ровно n корней степени n из числа w; все они содержатся в формуле (1). Все корни степени n из числа w имеют один и тот же модуль $\sqrt[n]{p}$, но разные аргументы, отличающиеся слагаемым, кратным числу $\frac{2\pi}{n}$. Отсюда следует, что комплексные числа, являющиеся корнями степени n из комплексного числа w, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{p}$, с центром в точке $z = 0$.

Сделаем ещё одно замечание относительно обозначения $\sqrt[n]{w}$. Символ $\sqrt[n]{w}$ не имеет однозначного смысла. Поэтому, употребляя его, следует чётко представлять себе, что под этим символом подразумевается. Например, используя запись $\sqrt{-1}$, следует позаботиться о том, чтобы было ясно, понимается ли под этим символом пара комплексных чисел i и $-i$ или одно число, и если одно, то какое именно.

Задача 1. Найти все значения $\sqrt[4]{-16}$.

▷ Запишем число $w = -16$ в тригонометрической форме:

$$w = -16 = 16\ (\cos\pi + i\sin\pi).$$

Формула (1) в нашем случае даёт

$$z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)\right),$$

где $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Следовательно,

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2},$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

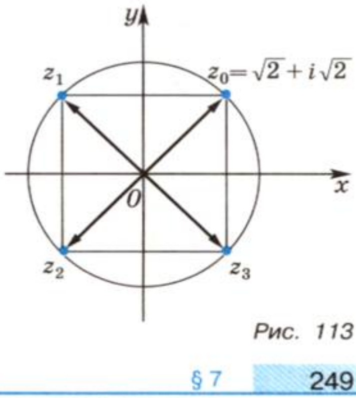


Рис. 113

На рисунке 113 изображены все четыре значения $\sqrt[4]{-16}$. Точки, соответствующие числам z_0, z_1, z_2,

z_3, находятся в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса 2, с центром в точке $z = 0$. ◀

Задача 2. Решить уравнение $z^6 = -1$.

▷ Применяя формулу (1), где $p = 1$, $n = 6$, $\theta = \pi$, получаем $z_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{6}$, где $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ (рис. 114).

Следовательно,

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$z_2 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$z_3 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$z_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i,$$

$$z_5 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i. \blacktriangleleft$$

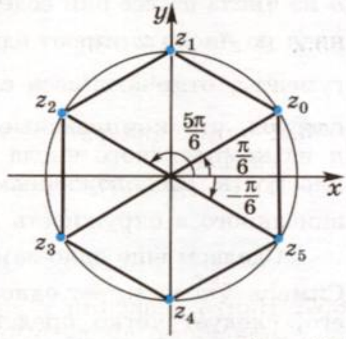


Рис. 114

Если приведённое квадратное уравнение $z^2 + pz + q = 0$ имеет комплексные коэффициенты, то заменой $z = y - \frac{p}{2}$ его можно привести к виду $y^2 = \frac{p^2}{4} - q$, где в правой части равенства некоторое комплексное число.

Извлекая квадратный корень из этого числа (который всегда имеет два значения, кроме случая, когда дискриминант равен нулю), получаем затем два комплексных корня этого уравнения (или один двукратный корень).

Справедлива так называемая «основная теорема алгебры» (её доказательство в курсе школьной математики не рассматривается), которая гласит:

Алгебраическое уравнение n-й степени вида $z^n + c_1z^{n-1} + c_2z^{n-2} + \ldots + c_{n-1}z + c_n = 0$, где $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n$ — комплексные числа, имеет хотя бы один комплексный корень.

Эта теорема имеет важное следствие:

Любое алгебраическое уравнение n-й степени ($n \geqslant 1$) с комплексными коэффициентами имеет n комплексных корней; при этом каждый корень считается столько раз, какова его кратность.

Например, уравнение $z^3 - 5z^2 + 8z - 6 = 0$ имеет три комплексных корня: $z_1 = 3$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 1 - i$.

Упражнения

653. Найти все значения корня:

1) $\sqrt[4]{1}$; 2) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; 3) $\sqrt[5]{1}$; 4) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$.

Решить уравнение **(654—655).**

654. 1) $z^4+81=0$; 2) $8z^3-27=0$; 3) $z^4=i$;
4) $z^3=-2i$; 5) $z^3=-2+2i$; 6) $z^4-i=1$.

655. 1) $z^2=-16+8i$; 2) $36z^8-13z^4+1=0$;
3) $z^4-2z^3+2z^2-2z+1=0$; 4) $z^3+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z+1=0$.

656. Решить квадратное уравнение с комплексными коэффициентами:
1) $z^2+(2-6i)z-12-6i=0$; 2) $z^2-2(1+i)z+9+2i=0$.

Упражнения к главе VII

657. Найти значения x, при которых действительная часть комплексного числа равна 1:
1) $(x+3)+2i$; 2) $(x+1)-4i$;
3) $(4x-1)-7i$; 4) $(-3x-8)+i$.

658. Найти значения x, при которых действительная часть комплексного числа равна его мнимой части:
1) $(x+3)+i$; 2) $3x-8i$;
3) $0{,}4-(x-2)i$; 4) $-1+2xi$.

Выполнить действия **(659—660).**

659. 1) $(2+3i)(3-2i)+(2-3i)(3+2i)$;
2) $9+5i-(2-4i)(1+3i)$;
3) $(8-\sqrt{3}i)(8+\sqrt{3}i)$; 4) $(-1+\sqrt{7}i)(-1-\sqrt{7}i)$.

660. 1) $\frac{10+i^3}{-5+2i}$; 2) $\frac{4+3i}{3-4i}-\frac{5-4i}{4+5i}$;
3) $i+\frac{1+6i}{1-7i}$; 4) $\frac{5+i}{(1+i)(2-3i)}$.

661. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:
1) $3(\cos 130^\circ+i\sin 130^\circ)(\cos 140^\circ+i\sin 140^\circ)$;
2) $\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$;
3) $\frac{\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ}{2(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)}$; 4) $\frac{2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)}$.

662. Найти модуль комплексного числа:

1) $15i$; 2) $-21i$; 3) $-5+2i$; 4) $\sqrt{3}-i$; 5) $-1-4i$; 6) $\sqrt{11}+\sqrt{5}i$.

663. Записать в алгебраической форме комплексное число:

1) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

2) $4\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

664. Отметить на плоскости точки, изображающие комплексные числа:

1) $1+i$; 2) $2i$; 3) -5; 4) $-2i-3$.

665. Решить уравнение:

1) $(5+3i)+z=-4-i$;
2) $(-2+i)+z=3-2i$;
3) $5+i=z-\left(3-\sqrt{2}\right)i$;
4) $(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i$.

666. Записать в тригонометрической форме число:

1) $-4+4i$; 2) $-\sqrt{3}-i$.

667. Решить уравнение:

1) $z^2-2z+5=0$; 2) $z^2+10z+26=0$;
3) $5z^2+6z+5=0$; 4) $2z^2+3z+3=0$.

668. Найти действительные числа x и y из равенства:

1) $(3y-x)+(2y-3x)i=6-10i$;
2) $xy+xyi-2i-yi-3=0$.

669. Выполнить действия:

1) $\frac{(1+i)^6}{(1-i)^4}+i^{24}+i^{25}+i^{26}$; 2) $\frac{2-i^5}{2-i^7}+(i-1)^2$.

670. Сравнить модули чисел $\frac{3+i^{19}}{2+i^{13}}$ и $\frac{1+2i^7}{1+3i}$.

671. Найти мнимую часть числа z, если:

1) $z=\frac{(2i+3)^2}{i-1}-\frac{i}{i+1}$; 2) $z=\frac{18}{\sqrt{5}-2i}+\frac{3-4i^{11}}{i^9}$.

672. Определить, при каких действительных значениях x и y сумма $\frac{x-1}{3+i}+\frac{y-1}{3-i}$ равна i.

673. Составить приведённое квадратное уравнение с действительными коэффициентами, если один из его корней равен:

1) $\sqrt{3}-\sqrt{5}i$; 2) $\frac{3-2i}{2+3i}$.

674. Вычислить:

1) $\left(3\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)\right)^4$;

2) $(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)^{12}$;

3) $(2(\cos(-20^\circ) + i\sin(-20^\circ)))^3$;

4) $\frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{20}+i\sin\frac{\pi}{20}\right)^5}$.

675. Записать в тригонометрической и алгебраической формах комплексное число:

1) $z=\left(\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right)^{-3}$;

2) $z=\left(\sqrt{3}-i\right)^6$;

3) $z=\frac{1}{(\cos 12^\circ + i\sin 12^\circ)^5}$;

4) $z=\frac{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)^7}{i}$.

676. Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} z_1+2z_2=1+i, \\ 3z_1+iz_2=2-3i; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} z^2+|z|=0, \\ \bar{z}=-4z. \end{cases}$

677. Найти все значения:

1) $\sqrt[4]{4}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[6]{1}$; 4) $\sqrt[4]{-2+2i\sqrt{3}}$.

678. Решить уравнение:

1) $z^2=-16i$; 2) $z^2=8+6i$;
3) $z^3=-125$; 4) $z^4=16i$;
5) $z^3-1=i$; 6) $z^5-1-i\sqrt{3}=0$.

679. Записать в тригонометрической форме комплексное число:

1) $z=(\operatorname{tg}2-i)^4$; 2) $z=\left(\sin\frac{6\pi}{5}+i\left(1+\cos\frac{6\pi}{5}\right)\right)^5$.

680. Найти корни уравнения

$$z^{10}-z^5-992=0,$$

действительные части которых отрицательны.

681. На комплексной плоскости даны точки z_1, z_2, z_3, являющиеся вершинами треугольника. Найти точку пересечения его медиан.

682. Найти множество точек z комплексной плоскости, заданное условием:

1) один из аргументов числа z равен нулю;

2) один из аргументов числа z равен $\frac{5\pi}{2}$;

3) один из аргументов числа z удовлетворяет неравенствам $2\pi < \varphi < 3\pi$;

4) один из аргументов числа z удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

683. Доказать, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство:

1) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$; 2) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$.

684. Пользуясь записью комплексных чисел в тригонометрической форме, найти $\cos 15°$ и $\sin 15°$.

Вопросы к главе VII

1. Как определяется равенство комплексных чисел, записанных в алгебраической форме?
2. Как производится сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел, записанных в алгебраической форме?
3. Какими свойствами обладают сложение и умножение комплексных чисел?
4. Всегда ли выполнима операция умножения комплексных чисел? Всегда ли одно комплексное число можно разделить на другое?
5. Какие числа называют чисто мнимыми?
6. Какое число называют сопряжённым комплексному числу $a + bi$?
7. Какое число называют противоположным комплексному числу $a + bi$?
8. Как геометрически интерпретируются комплексные числа?
9. Каково взаимное расположение на комплексной плоскости чисел: а) z и $\overline{z}$; б) z и $(-z)$?
10. Что называется модулем комплексного числа?
11. В чём состоит геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел?
12. Что называется аргументом комплексного числа?
13. Как записываются комплексные числа в тригонометрической форме?
14. Как перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме?

15. Что называется корнем степени $n(n > 1,\ n \in N)$ из комплексного числа?

16. Как производится умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня для комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме?

17. Сформулировать основную теорему алгебры и следствие из неё об алгебраическом уравнении n-й степени $(n \geqslant 1)$.

Проверь себя!

1. Выполнить действия:

1) $(3+i)+(5-2i)$; 2) $(6-i)-(2+3i)$;

3) $(7+i)(10-i)$; 4) $\frac{5-2i}{7+3i}$.

2. Вычислить:

1) $\frac{2+5i}{2-5i}+\frac{2-5i}{2+5i}$; 2) $\left(\frac{1+i^{11}}{2-i^7}\right)^2$.

3. Записать в тригонометрической форме комплексное число:

1) $-1+i\sqrt{3}$; 2) $\sin\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5}$.

4. Решить уравнение:

1) $z^2+5=0$; 2) $z^2-10z+34=0$.

5. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z|=3$.

---

6. Записать в алгебраической форме комплексное число:

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

7. Выполнить действия:

1) $(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ)(\cos 42^\circ + i\sin 42^\circ)$;

2) $\dfrac{9\left(\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}\right)}{18\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$; 3) $\left(\sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^4$.

8. На множестве комплексных чисел решить уравнение:

1) $z^4=16$; 2) $z^3=64$.

Историческая справка

История развития числа уходит корнями в древние времена. Древнегреческие математики только натуральные числа считали «настоящими». В Древнем Египте и Древнем Вавилоне во втором тысячелетии до н. э. при решении практических задач использовались дроби. В III в. до н. э. китайские математики ввели понятие отрицательного числа, а в III в. н. э. Диофант уже пользовался правилами действий с отрицательными числами. В VII в. н. э. индийские математики придавали наглядный образ отрицательным числам, сравнивая их с долгами. В VIII в. учёные знали, что у положительного числа существует два квадратных корня: один — положительное число, другой — отрицательное, но считали, что из отрицательных чисел нельзя извлекать квадратный корень.

Потребность в извлечении квадратного корня из отрицательного числа возникла в XVI в. в связи с решениями уравнений. Итальянский математик Дж. Кардано (1501—1576) в 1545 г. ввёл числа новой природы. Он предложил считать решением системы уравнений

$$\begin{cases} x+y=10, \\ xy=40, \end{cases}$$

не имеющей решений на множестве действительных чисел, пару чисел $x=5+\sqrt{-15}$ и $y=5-\sqrt{-15}$. При этом Кардано предлагал выполнять действия с числами новой природы аналогично тому, как выполнялись действия с действительными числами, в частности считать, что $\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-15}=-15$.

Числа новой природы Кардано называл «чисто отрицательными» и «софистически отрицательными».

В 1572 г. итальянский математик Р. Бомбелли установил правила арифметических действий с новыми числами. Термин «мнимые числа» ввёл в 1637 г. Р. Декарт, а в 1777 г. великий отечественный математик Л. Эйлер (1707—1783) предложил обозначать число $\sqrt{-1}$ первой буквой французского слова imaginaire (мнимый). Символ $i=\sqrt{-1}$ стал широко использоваться математиками после употребления его в своих работах К. Гауссом (1777—1855).

Гаусс заменил название «мнимые числа» на «комплексные числа» и окончательно закрепил для науки геометрическую интерпретацию комплексного числа $a+bi$ как точки координатной плоскости с координатами $(a;\ b)$. Позднее комплексные числа также стали изображать с помощью векторов на координатной плоскости с началом в начале координат и концом в точке $M\ (a;\ b)$.

Понятия «модуль» и «аргумент» комплексного числа ввёл французский математик Д'Аламбер (1717—1783), а сами термины были введены в обиход после широкого их использования в своих работах швейцарским математиком Ж. Арганом (1768—1822) и французским математиком О. Коши (1789—1857).

В начале XVIII в. была построена теория корней n-й степени из отрицательных и комплексных чисел, основанная на выведенной в 1707 г. английским математиком А. Муавром (1667—1754) формуле

$$(\cos \mathrm{j} + i\sin \mathrm{j})^n = \cos n\mathrm{j} + i\sin n\mathrm{j}.$$

Глава VIII

Повторение курса алгебры и начал математического анализа

Умение решать задачи — практическое искусство, подобное плаванию, или катанию на лыжах, или игре на фортепьяно: научиться этому можно, лишь подражая избранным образцам и постоянно тренируясь.

Д. Пойа

§ 1. Методы решения уравнений с одним неизвестным

1. Общие сведения об уравнениях

В главе V (§ 4) и в главе I (§ 12) учебника 10 класса были рассмотрены основные понятия, относящиеся к уравнениям: область определения, равносильность, следствие, совокупность. Напомним основные из них.

Равносильными называют уравнения, имеющие одно и то же множество корней. *Равносильным преобразованием* уравнения называют замену одного уравнения равносильным ему уравнением.

Примеры равносильных преобразований:

1) перенос члена уравнения (с противоположным знаком) из одной части уравнения в другую;

2) умножение (деление) обеих частей уравнения на одно и то же число, отличное от нуля;

3) использование тождеств, т. е. равенств, справедливых для всех значений $x \in \boldsymbol{R}$ (или из множества, на котором рассматривается уравнение);

4) возведение обеих частей уравнения в нечётную степень и извлечение корня нечётной степени из обеих частей уравнения.

Обратимся к понятию следствия. Пусть даны два уравнения:

$$f(x) = g(x), \qquad (1)$$

$$f_1(x) = g_1(x). \qquad (2)$$

Если каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2), то говорят, что уравнение (2) — *следствие* уравнения (1). Например, уравнение

$$f^2(x) = g^2(x),$$

полученное возведением в квадрат обеих частей уравнения (1), является следствием уравнения (1).

Если обе части уравнения (1) неотрицательны, то уравнение $f^2(x) = g^2(x)$ равносильно уравнению (1).

Часто при решении уравнений (и неравенств) их заменяют равносильными системами или совокупностями предложений с переменными. Понятия системы и совокупности разъясняются в § 12 главы I учебника 10 класса.

Будем говорить, что уравнение (1) *равносильно совокупности уравнений*

$$f_1(x) = g_1(x),\ f_2(x) = g_2(x),\ \ldots,\ f_n(x) = g_n(x), \qquad (3)$$

если выполнены следующие условия:

1) каждый корень уравнения (1) является корнем по крайней мере одного из уравнений (3);

2) любой корень каждого из уравнений (3) является корнем уравнения (1).

При выполнении указанных условий множество корней уравнения (1) является объединением множеств корней всех уравнений (3).

Например, уравнение

$$(x^2 - 1)(x^2 + x - 2) = 0$$

равносильно совокупности уравнений

$$x^2 - 1 = 0,\ x^2 + x - 2 = 0.$$

Корни первого из уравнений совокупности — числа 1 и −1, а корни второго — числа 1 и −2.

Множество корней исходного уравнения состоит из чисел 1, −1, −2.

Будем говорить, что уравнение (1) *равносильно системе*

$$\begin{cases} p_1(x), \\ p_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots \\ p_n(x), \end{cases} \qquad (4)$$

если множество корней уравнения (1) совпадает с множеством истинности предложений с переменной x системы (4).

Например, уравнение $\sqrt[x]{4x^2 - 9x + 3} = 1$ равносильно системе

$$\begin{cases} 4x^2 - 9x + 3 = 1, \\ x \in \boldsymbol{N}, \\ x \geqslant 2. \end{cases}$$

Способ замены уравнения равносильной ему совокупностью предложений или равносильной системой — один из основных способов решения уравнений, не являющихся элементарными.

Для приведения решаемого уравнения (алгебраического, показательного, логарифмического, тригонометрического) к элементарному виду вы использовали в основном методы, называемые *общими методами*: 1) разложения на множители; 2) введения нового неизвестного; 3) функционально-графический; 4) замены уравнения $f(\varphi(x)) = f(f(x))$ уравнением $\varphi(x) = f(x)$.

В этом параграфе будут разобраны решения уравнений с помощью каждого из перечисленных методов (следует иметь в виду, что часто для решения уравнения применяется несколько различных методов). В заключительной части параграфа будут рассмотрены уравнения с модулем, решаемые *методом промежутков*.

Напомним, что множество, на котором определены обе части уравнения (неравенства), называют *областью определения уравнения (неравенства)*. Будем её иногда обозначать буквой E.

2. Метод разложения на множители

Суть метода состоит в следующем.

Уравнение вида $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = 0$ заменяется совокупностью уравнений

$$f_1(x) = 0, \; f_2(x) = 0, \; \ldots, \; f_n(x) = 0.$$

Из найденных корней совокупности выбираются корни, принадлежащие области определения исходного уравнения (остальные — посторонние корни отбрасываются).

В учебнике 10 класса этим методом решались, например, уравнения: в задаче 2 из § 3 главы IV, в задаче 3 из § 4 главы V, в задаче 5 из § 5 главы VII, в задаче 1 из § 5 главы IX. Рассмотрим решения ещё нескольких уравнений, решаемых методом разложения на множители.

Задача 1. Решить на множестве действительных чисел уравнение

$$x^5 - x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 6 = 0.$$

▷ Область определения уравнения — множество $\boldsymbol{R}$. Попробуем разложить многочлен, стоящий в левой части уравнения, на множители способом группировки:

$$x^3(x^2 - x - 3) - 2(x^2 - x - 3) = 0, \text{ откуда}$$
$$(x^2 - x - 3)(x^3 - 2) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений $x^2 - x - 3 = 0$ и $x^3 - 2 = 0$. Корни первого уравнения $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

и корень второго уравнения $x = \sqrt[3]{2}$ принадлежат области определения исходного уравнения.

Ответ. $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$, $x_3 = \sqrt[3]{2}$. ◀

Задача 2. Решить уравнение

$$x^2 \cdot 4^{\sqrt{6-x}} + 4^{3-x} = 4^{3+\sqrt{6-x}} + x^2 \cdot 2^{-2x}.$$

▷ Область определения уравнения: $x \leqslant 6$. Запишем заданное уравнение в виде $x^2 \cdot 4^{\sqrt{6-x}} - 4^3 \cdot 4^{\sqrt{6-x}} = x^2 \cdot 4^{-x} - 4^3 \cdot 4^{-x}$, откуда $4^{\sqrt{6-x}}(x^2 - 64) = 4^{-x}(x^2 - 64)$ или $(x^2 - 64)(4^{\sqrt{6-x}} - 4^{-x}) = 0$. На области определения это уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$x^2 - 64 = 0 \text{ и } 4^{\sqrt{6-x}} - 4^{-x} = 0.$$

Среди корней первого уравнения ($x = \pm 8$) $x = 8$ не входит в область определения, т. е. корнем является $x = -8$.

Второе уравнение равносильно уравнению $\sqrt{6-x} = -x$, которое, в свою очередь, равносильно системе $\begin{cases} 6 - x = x^2, \\ -x \geqslant 0. \end{cases}$

Решая уравнение системы, находим $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Лишь $x = -3$ удовлетворяет неравенству системы.

Ответ. $x_1 = -3$, $x_2 = -8$. ◀

3. Метод введения нового неизвестного

Если некоторое уравнение преобразовано к виду $f(g(x)) = 0$, то можно ввести новое неизвестное $t = g(x)$ и решить уравнение $f(t) = 0$, после чего решить совокупность уравнений $g(x) = t_1$, $g(x) = t_2$, ..., $g(x) = t_n$, где t_1, t_2, ..., t_n — корни уравнения $f(t) = 0$. Среди найденных значений x (если они существуют) выявить подстановкой в исходное уравнение его корни.

В учебнике 10 класса этим методом решались, в частности, задача 6 из § 5 главы III, задача 4 из § 5 главы V, задача 6 из § 2 главы VI, задача 8 из § 5 главы VII, задача 1 из § 4 главы IX. Рассмотрим решения ещё нескольких задач с применением метода введения нового неизвестного.

Задача 3. Решить уравнение

$$(x^2 + 2x + 3)^2 + x^2 + 2x = 39.$$

▷ Пусть $x^2 + 2x + 3 = t$, тогда $x^2 + 2x = t - 3$.

Относительно t исходное уравнение примет вид $t^2 + t - 3 = 39$ или $t^2 + t - 42 = 0$, корни которого $t_1 = -7$, $t_2 = 6$.

Вернёмся к искомому неизвестному:

1) $x^2 + 2x + 3 = -7$, $x^2 + 2x + 10 = 0$, $\frac{D}{4} = -9 < 0$, следовательно, уравнение действительных корней не имеет.

2) $x^2+2x+3=6,\ x^2+2x-3=0,\ x_1=-3,\ x_2=1.$

Ответ. $x_1=-3,\ x_2=1.$ ◀

Задача 4. Найти корни уравнения

$$\sqrt{2x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2x-2}=2.$$

▷ Это уравнение равносильно следующему:

$$\sqrt{2x^2-4x+3}=2+\sqrt{x^2-2x-2}.$$

Имеет смысл выполнить замену неизвестного, полагая $t=x^2-2x$. Получим уравнение

$$\sqrt{2t+3}=2+\sqrt{t-2}. \qquad (1)$$

При $t\geqslant 2$ (в области определения последнего уравнения) уравнение (1) равносильно каждому из уравнений

$$2t+3=4+4\sqrt{t-2}+t-2,\ 4\sqrt{t-2}=t+1,$$
$$16(t-2)=(t+1)^2,\ t^2-14t+33=0.$$

Корни последнего уравнения — числа $t_1=3$ и $t_2=11$ удовлетворяют условию $t\geqslant 2$ и поэтому являются корнями уравнения (1).

Если $t=3$, то $x^2-2x=3$, откуда $x_1=-1,\ x_2=3$; если $t=11$, то $x^2-2x-11=0$, откуда $x_3=1+2\sqrt{3},\ x_4=1-2\sqrt{3}$.

Ответ. $x_1=-1,\ x_2=3,\ x_3=1+2\sqrt{3},\ x_4=1-2\sqrt{3}.$ ◀

Задача 5. Решить уравнение

$$\log_{\left(x+\frac{1}{3}\right)}\sqrt[3]{x^3+\frac{1}{3}}+\log_{\left(x^3+\frac{1}{3}\right)}\left(x+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}.$$

▷ Область определения уравнения определяется условиями

$$x+\frac{1}{3}>0, x^3+\frac{1}{3}>0, x+\frac{1}{3}\neq 1, x^3+\frac{1}{3}\neq 1. \qquad (1)$$

Полагая $\log_{\left(x+\frac{1}{3}\right)}\left(x^3+\frac{1}{3}\right)=t$, получаем уравнение $\frac{1}{3}t+\frac{1}{t}=\frac{4}{3}$, или $t^2-4t+3=0$, откуда $t_1=1,\ t_2=3$.

1) Если $t=1$, т. е. $\log_{\left(x+\frac{1}{3}\right)}\left(x^3+\frac{1}{3}\right)=1$, то $x^3+\frac{1}{3}=x+\frac{1}{3}$, $x^3=x$. Корни этого уравнения $x_1=0$ и $x_2=1$ удовлетворяют условиям (1) и являются корнями исходного уравнения, а $x_3=-1$ не удовлетворяет условиям (1).

2) Если $t=3$, то $\left(x+\frac{1}{3}\right)^3=x^3+\frac{1}{3}$ или $27x^2+9x-8=0$, откуда $x=\frac{-9\pm\sqrt{81+32\cdot 27}}{54}=-\frac{1}{6}\pm\frac{\sqrt{105}}{18}$. Условиям (1) удовлетворяет только $x=-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{105}}{18}=\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{105}}{3}-1\right)$.

Ответ. $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{105}}{3}-1\right).$ ◀

Задача 6. Найти все корни уравнения

$$\sin 3x + 3|\sin x| = \cos 4x - \cos 2x.$$

▷ Используя формулы

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,\ \cos 4x - \cos 2x = -2\sin 3x \sin x$$

и полагая $\sin x = t$, запишем исходное уравнение в виде

$$8t^4 + 4t^3 - 6t^2 - 3(t + |t|) = 0. \qquad (2)$$

1) Если $t \geqslant 0$ ($\sin x \geqslant 0$), то уравнение (2) примет вид

$$t(4t^3 + 2t^2 - 3t - 3) = 0. \qquad (3)$$

Разложим на множители многочлен $P(t) = 4t^3 + 2t^2 - 3t - 3$, учитывая, что $t = 1$ — его корень (найденный перебором делителей свободного члена: ± 1 и ± 3). Имеем

$$P(t) = (t - 1)(4t^2 + 6t + 3).$$

Так как уравнение $4t^2 + 6t + 3 = 0$ не имеет действительных корней, то корнями уравнения (3) являются числа 0 и 1. Если $t = 0$, т. е. $\sin x = 0$, то $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а если $t = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

2) Если $t < 0$ ($\sin x < 0$), то уравнение (2) можно записать в виде $t^2(4t^2 + 2t - 3) = 0$. Уравнение $4t^2 + 2t - 3 = 0$ имеет корни $t_1 = -\frac{1 + \sqrt{13}}{4} < -1$, $t_2 = \frac{\sqrt{13} - 1}{4} > 0$. В этом случае исходное уравнение не имеет корней.

Ответ. πn, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◀

4. Функционально-графический метод

Для решения уравнения вида $f(x) = g(x)$ иногда используют свойства функций $f(x)$ и $g(x)$:

1) если одна из функций возрастает, а другая убывает на одном и том же промежутке, то графики этих функций имеют не более одной общей точки на этом промежутке (а уравнение $f(x) = g(x)$ — не более одного корня на этом промежутке);

2) если на некотором промежутке наибольшее значение функции $f(x) = y_0$, а наименьшее значение функции $g(x)$ также равно y_0, то уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно на этом промежутке системе $\begin{cases} f(x) = y_0, \\ g(x) = y_0. \end{cases}$

Иногда после нахождения одного корня уравнения приходится доказывать, что других корней оно не имеет. Для доказательства единственности корня уравнения нередко пользуются, например, такими свойствами монотонных функций:

1) если функция возрастает (убывает) на некотором промежутке, то она принимает на этом промежутке каждое своё значение ровно один раз;

2) если функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно возрастают (убывают) на некотором промежутке, то функция $y = f(x) + g(x)$ также возрастает (убывает) на этом промежутке.

Если построение графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ не вызывает затруднений, то для решения уравнения $f(x) = g(x)$ строят в одной системе координат графики обеих функций и ищут точки их пересечения. Если такие точки существуют, то их абсциссы — корни уравнения $f(x) = g(x)$.

Функционально-графическим методом в учебнике 10 класса решались, например, задача 10 из § 5 главы V, задача 5 из § 3 главы VI. В данном учебнике (для 11 класса) этим методом решались первые задачи в § 3, 4 и 5 главы I.

Рассмотрим ещё несколько задач, использующих при своём решении приёмы функционально-графического метода.

Задача 7. Решить уравнение $\log_2(x+3) = 3 - x$.

▷ Построим в одной системе координат графики возрастающей функции $y = \log_2(x+3)$ и убывающей $y = 3 - x$ (рис. 115). Единственная точка пересечения графиков этих функций на промежутке $x > -3$ имеет абсциссу $x = 1$ (в точности равенства убеждаемся проверкой).

Ответ. $x = 1$. ◀

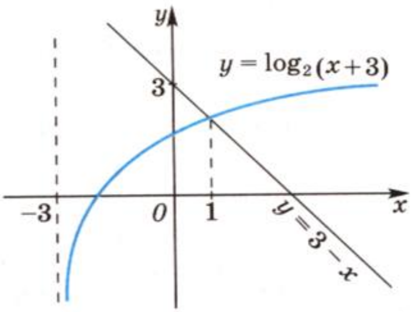


Рис. 115

Задача 8. Решить уравнение $\sin x - \cos 4x + 2 = 0$.

▷ Запишем уравнение в виде $\sin x + 2 = \cos 4x$. Функция $f(x) = \sin x + 2$ принимает на множестве $\boldsymbol{R}$ наименьшее значение, равное 1 (так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$), а функция $g(x) = \cos 4x$ на этом же множестве принимает наибольшее значение, равное 1. Это возможно только при тех значениях x, для которых

$$\begin{cases} \sin x + 2 = 1, \\ \cos 4x = 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{\pi n}{2}, \ n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Ответ. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◀

Задача 9. Решить уравнение

$$(3\sin x + 4\cos x)(20 + 12\sin x + 5\cos 2x) = 143.$$

▷ Пусть $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$, $g(x) = 20 + 12\sin x + 5\cos 2x$. Тогда $f(x) = 5\left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x\right) = 5(\sin x \sin\varphi + \cos x \cos\varphi) = 5\cos(x - \varphi)$ и

$f(x)$ принимает наибольшее значение, равное 5, тогда и только тогда, когда $x - \varphi = 2\pi n$, т. е. $x = \varphi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, где $\varphi = \arcsin \frac{3}{5}$, так как $\sin\varphi = \frac{3}{5}$, $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. Преобразуем $g(x)$, выделив полный квадрат:

$$g(x) = 5(1 - 2\sin^2 x) + 12\sin x + 20 =$$

$$= -10\left(\sin^2 x - \frac{6}{5}\sin x + \frac{9}{25}\right) + 25 + \frac{18}{5} = \frac{143}{5} - 10\left(\sin x - \frac{3}{5}\right)^2.$$

Отсюда следует, что функция $g(x)$ принимает наибольшее значение, равное $\frac{143}{5}$, тогда и только тогда, когда $\sin x = \frac{3}{5}$. Поэтому левая и правая части уравнения совпадают в том и только в том случае, когда $x = \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $x = \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◀

<u>Задача 10.</u> Решить уравнение $\sqrt[4]{x+8} + \sqrt[3]{x} = 4$.

▷ Замечаем, что $x = 8$ — корень уравнения. Докажем, что других корней нет.

Функции $f(x) = \sqrt[4]{x+8}$ и $g(x) = \sqrt[3]{x}$ — возрастающие на их общей области определения ($x \geqslant -8$), совпадающей с областью определения заданного уравнения. Следовательно, функция $y = f(x) + g(x)$ также является возрастающей при $x \geqslant -8$ и своё значение $y = 4$ принимает один раз (при $x = 8$).

Ответ. $x = 8$. ◀

<u>Задача 11.</u> Решить уравнение $5^x + 12^x = 13^x$.

▷ Нетрудно заметить, что $x = 2$ является корнем уравнения. Докажем, что других корней нет.

I способ. Разделив обе части уравнения на $13^x > 0$, получим $\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x = 1$. В левой части уравнения имеем сумму двух убывающих (для всех $x \in \boldsymbol{R}$) функций. Их сумма также убывающая функция, принимает значение 1 единственный раз на области определения (при $x = 2$).

II способ. Разделив обе части заданного уравнения на 12^x, перейдём к равносильному уравнению $\left(\frac{5}{12}\right)^x + 1 = \left(\frac{13}{12}\right)^x$ (*). В левой части этого уравнения — убывающая функция, а в правой — возрастающая, значит, уравнение (*) имеет не более одного корня. То есть $x = 2$ — единственный корень. ◀

5. Метод перехода от уравнения $\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$ к уравнению $f(x) = g(x)$

Этот метод применяется **только в том случае, если функция $y = \varphi(x)$ непрерывна и монотонна**. То есть этот метод применим, например:

1) при решении иррациональных уравнений вида $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)}$, где $n \in \boldsymbol{N}$, $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$;

2) при решении показательных уравнений вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$;

3) при решении логарифмических уравнений вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Во всех трёх случаях равносильным данным будет уравнение $f(x) = g(x)$.

Этот метод обосновывался и применялся, например, в учебнике 10 класса при изучении § 4 главы IV, при решении многих задач из § 2 главы VI и из § 5 главы VII.

Задача 12. Найти ошибку в приведённом решении уравнения $(2x-1)^2 = (x-5)^2$.

Решение. Пусть $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x - 5$. Так как $f^2(x) = g^2(x)$, то $f(x) = g(x)$, т. е. $2x - 1 = x - 5$, откуда $x = -4$.

▷ Функция $\varphi(x) = x^2$ не является монотонной (каждое своё значение, кроме нуля, она принимает дважды), поэтому переход от $\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$ к $f(x) = g(x)$ привёл к потере корня (заданное уравнение имеет корни $x_1 = -4$, $x_2 = 2$). ◀

Задача 13. Решить уравнение $2^{\cos^2 x} - 8^{\sin^2 x} = 0$.

▷ Запишем уравнение в виде $2^{\cos^2 x} = 2^{3\sin^2 x}$, откуда $\cos^2 x = 3\sin^2 x$. Решим полученное тригонометрическое уравнение: $\cos^2 x = 3(1 - \cos^2 x)$, $4\cos^2 x = 3$, $2\cos^2 x = \frac{3}{2}$, $\cos 2x + 1 = \frac{3}{2}$, $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◀

Задача 14. Решить уравнение

$$\log_{x+1}\left(\sqrt{2x-1} - 1\right) = 0{,}5.$$

▷ Запишем уравнение в виде

$$\log_{x+1}\left(\sqrt{2x-1} - 1\right) = \log_{x+1}\left(\sqrt{x+1}\right).$$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1, \\ \sqrt{2x-1} - 1 = \sqrt{x+1}. \end{cases}$$

Решим уравнение системы:

$$\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+1}+1,$$

$$2x-1=\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2,$$

$$2x-1=x+1+2\sqrt{x+1}+1,$$

$$x-3=2\sqrt{x+1}.$$

Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ x^2-6x+9=4x+4, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x\geqslant 3, \\ x^2-10x+5=0. \end{cases}$$

Корни уравнения последней системы: $x_{1,2}=5\pm 2\sqrt{5}$, однако $x=5-2\sqrt{5}$ не удовлетворяет неравенству системы.

Ответ. $x=5+2\sqrt{5}$. ◄

6. Решение уравнений с применением нескольких методов

В этой части параграфа рассмотрим несколько задач, при решении которых применяются различные общие методы решения уравнений.

Задача 15. Решить уравнение

$$2\log_3(x^2-4)+3\sqrt{\log_3(x+2)^2}-\log_3(x-2)^2=4.$$

▷ Область определения уравнения определяется условиями $|x+2|\geqslant 1$ и $|x|>2$, при выполнении которых исходное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\log_3\frac{(x^2-4)^2}{(x-2)^2}+3\sqrt{\log_3(x+2)^2}=4,$$

$$\log_3(x^2+2)^2+3\sqrt{\log_3(x+2)^2}=4.$$

Пусть $t=\sqrt{\log_3(x+2)^2}$, тогда $t^2+3t-4=0$, откуда $t_1=-4$, $t_2=1$. Так как $t>0$, то $t=\sqrt{\log_3(x+2)^2}=1$, откуда $\log_3(x+2)^2=1$, $(x+2)^2=3$, $x_1=-2+\sqrt{3}$, $x_2=-2-\sqrt{3}$. Корень x_1 не удовлетворяет условиям области определения исходного уравнения, а корень x_2 им удовлетворяет.

Ответ. $x=-2-\sqrt{3}$. ◄

Задача 16. Решить уравнение

$$\log_{11-x^2}(2^x-6+3\cdot 2^{2-x})=\log_{x-1}(2^x-6+3\cdot 2^{2-x}).$$

▷ Область определения данного уравнения находится из условий:

$$|x|<\sqrt{11},\ |x|\neq\sqrt{10},\ x>1,\ x\neq 2, \qquad (1)$$

$$h(x)=2^x-6+3\cdot 2^{2-x}>0. \qquad (2)$$

1) Если $h(x) = 1$, то

$$(2^x)^2 - 7 \cdot 2^x + 12 = 0 \text{ или } (2^x - 3)(2^x - 4) = 0,$$

откуда $x_1 = \log_2 3$, $x_2 = 2$.

Число $x = \log_2 3$ удовлетворяет условиям (1) и является корнем исходного уравнения, а число $x = 2$ не удовлетворяет условиям (1).

2) Если $h(x) \neq 1$ и выполняются условия (1)—(2), то исходное уравнение равносильно уравнению

$$11 - x^2 = x - 1 \quad \text{или} \quad x^2 + x - 12 = 0,$$

откуда $x_1 = -4$, $x_2 = 3$.

Число $x = -4$ не удовлетворяет условиям (1), а число $x = 3$ удовлетворяет условиям (1)—(2), $h(3) \neq 1$, и поэтому $x = 3$ — корень исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = \log_2 3$, $x_2 = 3$. ◀

Задача 17. Решить уравнение

$$3 + \cos 6x = 2\frac{\sin 3x}{\cos 4x} - 4\operatorname{tg}^2 4x.$$

▷ Если $\cos 4x \neq 0$, то исходное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$4(1 + \operatorname{tg}^2 4x) + \cos 6x - 1 = 2\frac{\sin 3x}{\cos 4x},$$

$$\frac{4}{\cos^2 4x} - 2\sin^2 3x = 2\frac{\sin 3x}{\cos 4x}.$$

Полагая $\sin 3x \cos 4x = t$, получаем уравнение $t^2 + t - 2 = 0$, имеющее корни $t_1 = -2$, $t_2 = 1$.

Так как $|t| \leqslant 1$, то $t = 1$, т. е.

$$\sin 3x \cos 4x = 1. \tag{1}$$

Уравнение (1) равносильно исходному, а уравнение

$$\sin 4x \cdot \cos 3x = 0 \tag{2}$$

является следствием уравнения (1). Из уравнений (1) и (2) получаем

$$\sin 4x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \cos 4x = -1, \text{ т. е.}$$

$$\sin x = -1. \tag{3}$$

Уравнение (3) является следствием уравнения (1) и имеет корни

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \tag{4}$$

Проверка показывает, что значения x, определяемые формулой (4), являются корнями уравнения (1) и исходного уравнения.

Замечание. Стандартный способ решения уравнения (1) основан на том, что уравнение (1) равносильно совокупности двух систем уравнений

$$\begin{cases}\sin 3x = 1,\\ \cos 4x = 1;\end{cases} \begin{cases}\sin 3x = -1,\\ \cos 4x = -1.\end{cases}$$

Ответ. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. ◀

<u>**Задача 18.**</u> Решить уравнение

$$\sqrt{8\operatorname{tg} x + 22\operatorname{ctg} x} = -\sqrt{15}(\sin x + \cos x).$$

▷ Возводя в квадрат обе части уравнения, получаем уравнение-следствие $8\operatorname{tg} x + \frac{22}{\operatorname{tg} x} = 15(1 + \sin 2x)$.

Полагая $\operatorname{tg} x = t$ и пользуясь формулой $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$, получаем

$$8t + \frac{22}{t} = 15\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right),$$

$$\text{или } 8t^4 - 15t^3 - 15t + 22 = 0.$$

Преобразуем это уравнение, учитывая, что $t = 1$ и $t = 2$ — его корни (найденные среди делителей числа 22). Имеем

$$(t-1)(t-2)(8t^2 + 9t + 11) = 0. \qquad (1)$$

Так как уравнение $8t^2 + 9t + 11 = 0$ не имеет корней, то корнями уравнения (1) являются $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$.

1) Если $t = \operatorname{tg} x = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, откуда $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Исходному уравнению удовлетворяют только такие значения x, при которых $\sin x = \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Если $t = \operatorname{tg} x = 2$, то $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. Учитывая, что $\sin x + \cos x < 0$ (это следует из исходного уравнения), заключаем, что x принадлежит III четверти.

Таким образом, исходному уравнению удовлетворяют лишь значения x, такие, что $\sin x < 0$, $\cos x < 0$, т. е. значения

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ. $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k,\ x = \operatorname{arctg} 2 + \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$. ◀

7. Метод раскрытия модулей на промежутках

Если уравнение вида

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

таково, что в левой его части содержатся выражения $|f_1(x)|$, $|f_2(x)|, \ldots, |f_n(x)|$, то для решения такого уравнения обычно применяется так называемый *метод промежутков*. Его суть состоит в следующем:

1) решается каждое из уравнений $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$, ..., ..., $f_n(x)=0$;

2) найденные корни отмечаются на числовой прямой, после чего прямая разбивается на определённое число непересекающихся промежутков;

3) используя определение модуля числа, на каждом из полученных промежутков уравнение (1) заменяется другим уравнением (не содержащим знаков модуля), равносильным ему на этом промежутке; находятся корни полученных уравнений, принадлежащие соответствующему промежутку;

4) все корни уравнения (1) получаются объединением полученных на промежутках корней.

Задача 19. Решить уравнение $|x+3|-|x-5|=1$.

▷ 1) Решая уравнения $x+3=0$ и $x-5=0$, получаем $x_1=-3$, $x_2=5$.

2) Числовая прямая найденными корнями разбивается (рис. 116) на три промежутка: $(-\infty; -3)$, $[-3; 5)$, $[5; +\infty)$.

Рис. 116

3) На каждом из полученных промежутков решим исходное уравнение, раскрыв модули:

а) на промежутке $x<-3$ получаем уравнение $-x-3+x-5=1$, которое не имеет корней;

б) на промежутке $-3 \leqslant x < 5$ получаем уравнение $x+3+$ $+x-5=1$, откуда $x=\frac{3}{2}$. Корень на промежутке $x=\frac{3}{2}$;

в) на промежутке $x \geqslant 5$ получаем уравнение $x+3-x+5=1$, которое не имеет корней.

Ответ. $x=\frac{3}{2}$. ◀

Задача 20. Решить уравнение

$$|1+\log_5 x|-3=\left|2+\log_{\frac{1}{5}} x\right|.$$

▷ Пусть $\log_5 x = t$, тогда $\log_{\frac{1}{5}} x = -t$. Относительно t уравнение примет вид $|1+t|-3=|2-t|$. Оно равносильно уравнению

$$|t+1|-3=|t-2|, \qquad (1)$$

которое решим методом промежутков.

Решая уравнения $t+1=0$ и $t-2=0$, находим $t_1=-1$, $t_2=2$. Числовая ось разобьётся найденными корнями на промежутки $t<-1$, $-1 \leqslant t < 2$, $t \geqslant 2$.

Решим уравнение (1) на каждом из полученных промежутков.

На промежутке $t < -1$ уравнение примет вид $-t - 1 - 3 = -t + 2$ или $0 \cdot t = 6$. Это уравнение не имеет корней.

На промежутке $-1 \leqslant t < 2$ уравнение примет вид $t + 1 - 3 = -t + 2$, откуда $t = 2$. Это значение не принадлежит рассматриваемому промежутку.

На промежутке $t \geqslant 2$ уравнение принимает вид $t + 1 - 3 = t - 2$ или $0 \cdot t = 0$. Решением этого уравнения является любое t (из рассматриваемого промежутка). Таким образом, $t \geqslant 2$.

Возвращаясь к неизвестному x, имеем неравенство $\log_5 x \geqslant 2$, решением которого являются все $x \geqslant 25$.

Ответ. $x \geqslant 25$. ◀

§ 2. Приёмы решения уравнений с двумя неизвестными

1. Аналитические приёмы решения

С *линейными уравнениями* вида

$$ax + by = c, \qquad (1)$$

где a, b, c — некоторые действительные числа (причём $a^2 + b^2 \neq 0$), вы встречались ещё в 7 классе и знаете, что они имеют бесчисленное множество решений. Повторить сведения о них можно с помощью § 2 (п. 2) главы I учебника 10 класса.

Теория решения в целых числах уравнений вида (1), где a, b, c — *целые числа* ($a^2 + b^2 \neq 0$ и числа a, b, c не имеют общих делителей), изложена в § 5 главы II учебника 10 класса. Напомним основные сведения о решении таких уравнений:

1) если коэффициенты a и b — взаимно простые числа, то это уравнение имеет бесчисленное множество решений вида

$$x = x_1 + bt, \; y = y_1 - at, \qquad (2)$$

где $(x_1;\ y_1)$ — некоторое (обязательно существующее) целочисленное решение уравнения (1), а t — произвольное целое число;

2) если числа a и b не являются взаимно простыми, то уравнение (1) не имеет целочисленных решений;

3) если уравнение $ax + by = 1$ имеет целочисленное решение $(x_1;\ y_1)$, то и пара чисел $(cx_1;\ cy_1)$ является решением уравнения (1).

<u>**Задача 1.**</u> Найти все целочисленные решения уравнения $3x - 4y = 7$.

▷ Очевидно, что $(1; -1)$ — решение исходного уравнения, а числа 3 и -4 взаимнопростые. Тогда все решения уравнения можно записать в виде

$$x = 1 + (-4)t, \; y = -1 - 3t,$$

где $t \in \boldsymbol{Z}$ (например, при $t = 1$ имеем $x = -3$, $y = -4$).

Ответ. $(1 - 4t;\ -1 - 3t)$, $t \in \boldsymbol{Z}$. ◀

Задача 2. Доказать, что уравнение $6x + 8y = 51$ не имеет целочисленных решений.

▷ Так как числа 6 и 8 не являются взаимно простыми, заданное уравнение неразрешимо в целых числах. ◀

Далее рассмотрим совокупность приёмов решения в целых числах нелинейных уравнений с двумя неизвестными. Заметим, что не существует общих подходов и методов решения в общем виде таких уравнений. Рассмотрим лишь несколько уравнений, решения которых основаны на свойствах делимости целых чисел и (или) на сравнении чисел и частей уравнения.

Задача 3. Доказать, что уравнение $x^2 + 3x - 2y + 1 = 0$ не имеет целочисленных решений.

▷ Запишем уравнение в виде $x^2 + 3x + 2 - 2y - 1 = 0$ или в виде $(x + 1)(x + 2) = 2y + 1$. Допустим, что существует целочисленное решение $(x; y)$ последнего уравнения. Тогда в левой его части записано произведение двух последовательных целых чисел, а оно чётно (так как одно из двух последовательных чисел чётно). В правой же части записано нечётное число. Равенство невозможно, что опровергает предположение о существовании целочисленного решения исходного уравнения. ◀

Задача 4. Решить в целых числах уравнение $4x^2 - y^2 = 7$.

▷ Запишем уравнение в виде $(2x - y)(2x + y) = 7$. Так как делителями числа 7 являются только числа ±1 и ±7, то множество целочисленных решений исходного уравнения совпадает с совокупностью решений следующих четырёх систем:

$$1)\ \begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x + y = 7; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 2x - y = -1, \\ 2x + y = -7; \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} 2x - y = 7, \\ 2x + y = 1; \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} 2x - y = -7, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$$

Каждая из этих систем имеет решение.

Ответ. $(2; 3)$, $(-2; -3)$, $(2; -3)$, $(-2; 3)$. ◀

Задача 5. Решить в целых числах уравнение $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$.

▷ Запишем данное уравнение в виде $y^2 + 6y + 9 = -x^2 + 4x - 4$, откуда $(y + 3)^2 = -(x - 2)^2$. Так как левая часть полученного уравнения неотрицательна при любом y, а правая — неположительна при любом x, то равенство возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} y + 3 = 0, \\ x - 2 = 0, \end{cases}$$ т. е. при $x = 2$, $y = -3$.

Ответ. $(2; -3)$. ◀

Иногда, применяя оценки различных выражений, удаётся найти и нецелочисленные решения отдельных уравнений с двумя неизвестными. Такое уравнение будет рассмотрено в следующей задаче.

Задача 6. Найти все пары действительных чисел $(x;\ y)$, для которых справедливо равенство

$$\log_{2^{\sqrt{y-x}}}\left(2^{\sqrt{y-x}} - \sqrt{x\sqrt{y}-1}\right) = 3^{\sqrt{x+y-2\sqrt{y}}}. \qquad (1)$$

▷ Равенство (1) имеет смысл, если выполнены условия:

$$y > 0,\ y - x > 0,\ x\sqrt{y} - 1 \geqslant 0,\ 2^{\sqrt{y-x}} > \sqrt{x\sqrt{y}-1},\ x + y - 2\sqrt{y} \geqslant 0. \qquad (2)$$

Пусть

$$2^{\sqrt{y-x}} = a,\ \sqrt{x\sqrt{y}-1} = b,\ 3^{\sqrt{x+y-2\sqrt{y}}} = c. \qquad (3)$$

Тогда равенство (1) можно записать в виде

$$a - b = a^c, \qquad (4)$$

где

$$a > 1,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 1, \qquad (5)$$

при выполнении условий (2).

Из равенства (4) и условий (5) следует, что

$$a \geqslant a - b = a^c \geqslant a, \text{ и поэтому}$$

$$a = a - b = a^c. \qquad (6)$$

Так как $b \geqslant 0$, $c \geqslant 1$ (условия (5)), то равенство (6) является верным тогда и только тогда, когда $b = 0$, $c = 1$. Из равенства (3) получаем систему уравнений $\begin{cases} x\sqrt{y} - 1 = 0, \\ x + y - 2\sqrt{y} = 0, \end{cases}$ откуда $\sqrt{y} = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x^2}$ (из первого уравнения). Тогда

$$x + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = 0,\ x^3 - 2x + 1 = 0,\ (x-1)(x^2 + x - 1) = 0.$$

Если $x = 1$, то $y = 1$ и условие $y - x > 0$ не выполняется. Если $x^2 + x - 1 = 0$, то $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, так как $x > 0$ $\left(x\sqrt{y} = 1\right)$.

Тогда $y = \frac{1}{x^2} = \frac{4}{\left(\sqrt{5}-1\right)^2} = \frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Найденная пара чисел x, y удовлетворяет условиям (2) и является решением данного уравнения.

Ответ. $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. ◀

2. Графические приёмы решения

Множества решений (если они существуют) многих уравнений с двумя неизвестными удаётся проиллюстрировать точками (точкой) координатной плоскости.

Задача 7. Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению:

1) $x^2 - y^2 = 0$;
2) $2x^2 + 5xy - 3y^2 - 2x + y = 0$;
3) $2x^2 - 8x + y^2 + 6y + 17 = 0$.

▷ 1) Уравнение можно записать в виде $(x - y)(x + y) = 0$, откуда следует, что либо $x - y = 0$, либо $x + y = 0$. Заметим, что данное уравнение равносильно уравнению $|x| = |y|$. Поэтому множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 - y^2 = 0$, — пара пересекающихся прямых $y = x$ и $y = -x$.

2) Разложим левую часть уравнения на множители:

$$2x^2 + 5xy - 3y^2 - 2x + y = 2x^2 - xy + 3y(2x - y) - (2x - y) =$$
$$= (2x - y)(x + 3y - 1).$$

Искомое множество — пара пересекающихся прямых

$$2x - y = 0 \quad \text{и} \quad x + 3y - 1 = 0.$$

3) Преобразуем левую часть уравнения, используя метод выделения полного квадрата:

$$2x^2 - 8x + y^2 + 6y + 17 = 2(x^2 - 4x + 4) + y^2 + 6y + 9 =$$
$$= 2(x - 2)^2 + (y + 3)^2,$$
$$2(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0.$$

Это уравнение имеет единственное решение $x = 2$, $y = -3$, т. е. множество решений уравнения — точка $(2; -3)$. ◀

Пусть на координатной плоскости Oxy выбрана точка $F(a; b)$, а $M(x; y)$ — произвольная точка этой же плоскости, R — расстояние от точки M до точки A. Тогда

$$\boldsymbol{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}.$$

Если задано число $R > 0$, то данное уравнение — это *уравнение окружности* C радиуса R с центром в точке $A(a; b)$.

Задача 8. Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению:

1) $x^2 + y^2 + 4x - 6x - 3 = 0$;
2) $8x^3y = y^4$.

▷ 1) Применяя метод выделения полного квадрата, получаем $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = (x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 16 = 0$, откуда

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16.$$

Следовательно, множество решений данного уравнения — окружность радиуса 4 с центром $(-2; 3)$.

З а м е ч а н и е. Целочисленные решения уравнения $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ — пары чисел $(2; 3)$, $(-2; 7)$, $(-6; 3)$, $(-2; -1)$ получаются из решения четырёх систем уравнений:

а) $\begin{cases} x + 2 = 4, \\ y - 3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2 = 0, \\ y - 3 = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + 2 = -4, \\ y - 3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2 = 0, \\ y - 3 = -4. \end{cases}$

2) Преобразуем уравнение:

$$8x^3y - y^4 = 0,\ y(8x^3 - y^3) = 0,\ y(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = 0,$$

$$y(2x - y)((x + y)^2 + 3x^2) = 0.$$

Так как равенство $(x + y)^2 + 3x^2 = 0$ выполняется только при $x = 0$ и $y = 0$, то множество решений исходного уравнения — совокупность прямых $y = 0$ и $2x - y = 0$. ◀

Рассмотрим примеры уравнений с двумя неизвестными, которые содержатся под знаком модуля.

Задача 9. Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих уравнению:

1) $x + |y| = 0$; 2) $|x| + |y| = 2$; 3) $|x^2 + x - 6| + |y| = 6$.

▷ 1) Уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ y \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0, \\ y < 0. \end{cases}$$

Первой системе удовлетворяют точки, принадлежащие биссектрисе II координатного угла, второй системе — точки, принадлежащие биссектрисе III координатного угла (рис. 117).

2) Если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, то уравнение можно записать в виде $x + y = 2$. Множество решений этого уравнения — отрезок AB, где $A(2;\ 0)$, $B(0;\ 2)$. Так как $|-x| = |x|$, $|-y| = |y|$, то множество решений исходного уравнения — граница квадрата $ABCD$ (рис. 118), где $C(-2;\ 0)$, $D(0;\ -2)$.

З а м е ч а н и е. Для нахождения координат вершин квадрата нужно в уравнении $|x| + |y| = 2$ взять $x = 0$ (и тогда $|y| = 2$, т. е. $y = \pm 2$), а затем $y = 0$ (тогда $x = \pm 2$).

3) Найдём особые точки, возникающие при раскрытии модулей:

а) если $y = 0$, то $|x^2 + x - 6| = 6$; решая уравнения $x^2 + x - 6 = \pm 6$, находим $x_1 = -4$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$; координаты точек $A(-4;\ 0)$, $B(3;\ 0)$, $C(-1;\ 0)$ и $O(0;\ 0)$ являются решениями исходного уравнения;

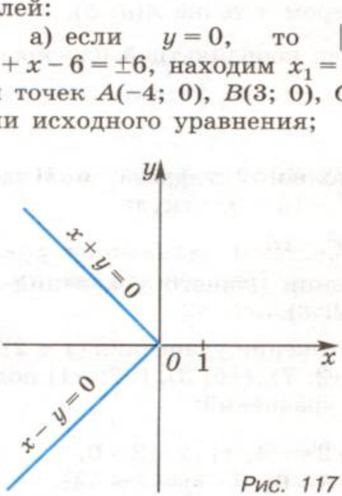


Рис. 117

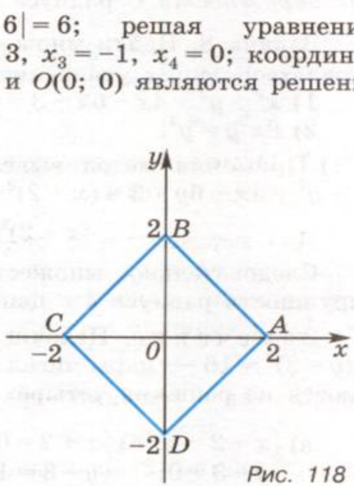


Рис. 118

б) при $x^2+x-6=0$, т. е. при $x=-3$ и $x=2$, получаем $|y|=6$, откуда $y_1=-6$, $y_2=6$; координаты точек $D(-3;\ -6)$, $E(-3;\ 6)$, $F(2;\ -6)$ и $G(2;\ 6)$ являются решениями исходного уравнения.

Переписав уравнение в виде $|y|=6-|x^2+x-6|$ при $y \geqslant 0$, получаем $y=6-|x^2+x-6|$, а при $y \leqslant 0$ имеем $y=-(6-|x^2+x-6|)$. График исходного уравнения симметричен относительно оси абсцисс. Определим его вид в верхней полуплоскости:

а) если $x \leqslant -3$ и $x \geqslant 2$, то $y = 6-x^2-x+6$, т. е. $y=-x^2-x+12$ и решения исходного уравнения при $y \geqslant 0$ — это координаты точек параболы $y=-x^2-x+12$;

б) если $-3 \leqslant x \leqslant 2$, то $y = 6 + x^2+x-6$, т. е. $y=x^2+x$ и решениями уравнения будут координаты точек параболы $y=x^2+x$.

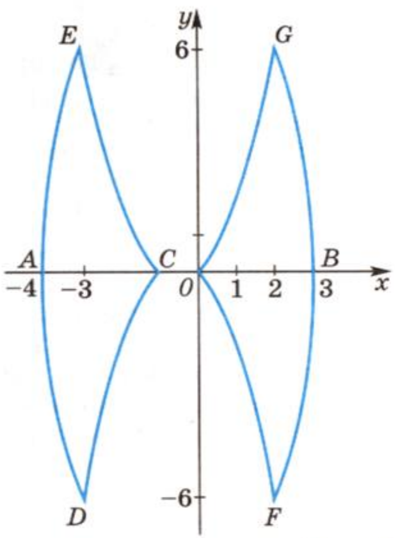


Рис. 119

Таким образом, в верхней полуплоскости график исходного уравнения состоит из четырёх частей двух парабол (рис. 119): AE, EC, OG и GB. Учитывая симметрию графика относительно оси абсцисс, в нижней полуплоскости имеем 4 части двух других парабол: AD, DC, OF и FB.

Координаты всех точек полученного графика (и только они) изображают решения исходного уравнения.

§ 3. Неравенства, системы и совокупности неравенств с одним неизвестным. Методы их решения

1. Основные понятия, связанные с решением неравенств

Два неравенства с одним неизвестным называются *равносильными*, если их решения совпадают. Неравенства, не имеющие решений, также считаются равносильными.

Если решение неравенства

$$f(x) > g(x) \qquad (1)$$

содержится в решении неравенства

$$u(x) > v(x), \qquad (2)$$

то неравенство (2) называют *следствием* неравенства (1).

При решении уравнения переход к уравнению-следствию мог расширить множество корней. Найденные корни уравнения-следствия можно было проверить подстановкой в исходное уравнение и выявить посторонние корни.

При решении неравенства проверку найденных решений неравенства-следствия обычно выполнить затруднительно. Поэтому при решении неравенства его чаще всего заменяют равносильным неравенством, равносильной ему системой или совокупностью предложений с неизвестным.

Примеры равносильных преобразований неравенств:

1) перенос члена неравенства (с противоположным знаком) из одной части неравенства в другую;

2) умножение обеих частей неравенства на положительное число (или на выражение, принимающее только положительные значения при всех значениях неизвестного из области определения) с сохранением знака неравенства;

3) умножение обеих частей неравенства на отрицательное число (или на выражение, принимающее только отрицательные значения при всех значениях неизвестного из области определения неравенства) с изменением знака неравенства на противоположный;

4) использование тождеств, справедливых для всех действительных значений неизвестного (или для всех значений из области определения неравенства);

5) возведение обеих частей неравенства в нечётную степень и извлечение корня нечётной степени из обеих частей неравенства.

Напомним, что нестрогое неравенство $f(x) \geqslant g(x)$ равносильно совокупности уравнения $f(x) = g(x)$ и неравенства $f(x) > g(x)$.

При решении неравенств применяются *общие методы*:

— введение нового неизвестного;

— разложение на множители с последующим применением *метода интервалов* (о котором подробно рассказано в § 8 главы I учебника 10 класса);

— аналитико-графический метод;

— переход от неравенства вида $\varphi(f(x)) > \varphi(g(x))$ к неравенству, связывающему функции $f(x)$ и $g(x)$, либо к системе неравенств, включающих в себя ограничения на $f(x)$ и (или) на $g(x)$.

Основные сведения о равносильных неравенствах были введены в учебнике 10 класса: в § 4 (п. 2), § 6 главы V, в § 3 главы VI, в § 6 главы VII. Там же были рассмотрены решения основных видов иррациональных, показательных и логарифмических неравенств.

Напомним основные идеи решения иррациональных, показательных и логарифмических неравенств:

1. 1) *Иррациональное неравенство* $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$

2) Неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases}$$

2. *Показательное неравенство* $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$, если $a > 1$, и равносильно неравенству $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$.

3. *Логарифмическое неравенство* $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$ если $a > 1$, и равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ если $0 < a < 1$.

Неравенство $\log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} h(x)$ равносильно совокупности двух систем $\begin{cases} f(x) > 1, \\ g(x) > h(x) > 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ 0 < g(x) < h(x). \end{cases}$

Неравенство $\log_{f(x)} g(x) < \log_{f(x)} h(x)$ равносильно совокупности двух систем $\begin{cases} f(x) > 1, \\ 0 < g(x) < h(x) \end{cases}$ и $\begin{cases} 0 < f(x) < 1, \\ g(x) > h(x) > 0. \end{cases}$

Рассмотрим решения основных видов неравенств с применением различных методов решения.

2. Решение алгебраических неравенств

Задача 1. Решить неравенство $|3x^2 - x - 10| + 4 \geqslant 4x - x^2$.

▷ После переноса числа 4 в правую часть неравенства с противоположным знаком данное неравенство можно записать в виде

$$|3x^2 - x - 10| \geqslant -(x-2)^2.$$

Так как левая часть этого неравенства принимает только неотрицательные значения, а правая — только неположительные, то неравенство имеет решение в случае, когда имеет решение система $\begin{cases} 3x^2 - x - 10 = 0, \\ -(x-2)^2 = 0, \end{cases}$ т. е. когда $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -\frac{5}{3}, \\ x = 2, \end{array}\right. \\ x = 2. \end{cases}$

Ответ. $x = 2$. ◀

Задача 2. Решить неравенство $\frac{x(x^2+2x-8)}{2x^3-11x^2+12x+9} \leqslant 0.$

▷ Представим исходное неравенство в виде

$$\frac{x(x-2)(x+4)}{(2x+1)(x-3)^2} \leqslant 0$$

и решим его методом интервалов. Предварительно решим уравнения $x(x-2)(x+4)=0$, $(2x+1)(x-3)^2=0$ и отметим на числовой оси (рис. 120) значения их корней — точки 0; 2; 3; $-\frac{1}{2}$; -4, учитывая, что $-\frac{1}{2}$ и $x=3$ не принадлежат области определения неравенства. Эти точки разбили числовую ось на интервалы $(-\infty; -4)$, $\left(-4; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $(0; 2)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$. На каждом из полученных интервалов значение дроби, стоящей в левой части исходного неравенства имеет определённый знак (см. рис. 119). Исходному нестрогому неравенству удовлетворяют все значения x из промежутков $-4 \leqslant x < -\frac{1}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ и только они.

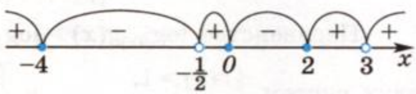


Рис. 120

Ответ. $-4 \leqslant x < -\frac{1}{2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$. ◀

Задача 3. Решить неравенство $\sqrt{\frac{18-x}{2+x}} > -x.$

▷ I способ оформления решения.

Данное неравенство равносильно совокупности систем:

$$1)\ \begin{cases} -x < 0, \\ \frac{18-x}{2+x} \geqslant 0 \end{cases} \text{ и } \quad 2)\ \begin{cases} -x \geqslant 0, \\ \frac{18-x}{2+x} > (-x)^2. \end{cases}$$

Решим первую систему: $\begin{cases} x > 0, \\ -2 < x \leqslant 18, \end{cases}$ откуда $0 < x \leqslant 18$.

Решим вторую систему: $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ \frac{18-x-2x^2-x^3}{2+x} > 0 \end{cases}$, или

$$\begin{cases} x \leqslant 0, \\ \frac{x^3+2x^2+x-18}{2+x} < 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Так как $x = 2$ — корень многочлена $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 18$, то $P(x)$ можно представить в виде $(x-2)(x^2 + 4x + 9) = (x-2)((x+2)^2 + 5)$. Очевидно, что $(x+2)^2 + 5 > 0$ при любом x, поэтому знак $P(x)$ совпадает со знаком двучлена $x - 2$.

Таким образом, система (*) равносильна системе $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ \dfrac{x-2}{x+2} < 0, \end{cases}$ откуда $-2 < x < 2$.

Объединяя решения первой и второй систем, получим (рис. 121) решения исходного неравенства.

Рис. 121

Ответ. $-2 < x \leqslant 18$.

II способ оформления решения. Область определения неравенства — промежуток $(-2;\ 18]$. Если $x \in (0;\ 18]$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна. Поэтому все значения x из промежутка $(0;\ 18]$ — решения исходного неравенства.

Пусть $x \in (-2;\ 0]$, тогда $x + 2 > 0$ и исходное неравенство равносильно каждому из неравенств $\dfrac{18-x}{2+x} > x^2$, $x^3 + 2x^2 + x - 18 < 0$. Так как $x = 2$ — корень многочлена $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 18$, то $P(x)$ можно представить в виде $(x-2)(x^2 + 4x + 9) = (x-2)((x+2)^2 + 5)$, откуда заключаем, что $P(x) < 0$ при $x < 2$.

Следовательно, все значения $x \in (-2;\ 0]$ — решения исходного неравенства, а искомое множество решений — объединение промежутков $(-2;\ 0]$ и $(0;\ 18]$, т. е. промежуток $(-2;\ 18]$.

Ответ. $-2 < x \leqslant 18$. ◀

<u>**Задача 4.**</u> Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{8 - \frac{x}{9}}{2 - \frac{x}{4}}} \leqslant x - 2.$$

▷ Область определения неравенства E определяется условием $\dfrac{8 - \frac{x}{9}}{2 - \frac{x}{4}} \geqslant 0$, откуда следует, что

$$E = (-\infty;\ 8) \cup [72;\ +\infty).$$

а) Пусть $x \in E$ и $x \leqslant 2$, тогда левая часть неравенства положительна, а правая меньше или равна нулю. Поэтому указанные значения x не являются решениями неравенства.

б) Пусть $x \in E$ и $2 < x < 8$. Тогда исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$8-\frac{x}{9}\leqslant(x-2)^2\left(2-\frac{x}{4}\right),\ x\left(\frac{x^2}{4}-3x+\frac{80}{9}\right)\leqslant 0,$$

$$x\left(x-\frac{16}{3}\right)\left(x-\frac{20}{3}\right)\leqslant 0.$$

Решая это неравенство методом интервалов на множестве E при $2<x<8$, находим $\frac{16}{3}\leqslant x\leqslant\frac{20}{3}$.

в) Пусть $x\in E$ и $x\geqslant 72$. Тогда исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$\frac{x}{9}-8\leqslant(x-2)^2\left(\frac{x}{4}-2\right),\ x\left(\frac{x^2}{4}-3x+\frac{80}{9}\right)\geqslant 0,$$

$$x\left(x-\frac{16}{3}\right)\left(x-\frac{20}{3}\right)\geqslant 0.$$

Решая это неравенство методом интервалов на множестве E при $x\geqslant 72$, находим, что $x\geqslant 72$. Множество решений исходного неравенства — объединение промежутков $\left[\frac{16}{3};\frac{20}{3}\right]$ и $[72;\ +\infty)$.

Ответ. $\frac{16}{3}\leqslant x\leqslant\frac{20}{3}$, $x\geqslant 72$. ◀

Задача 5. Решить неравенство

$$\frac{x\sqrt{2}+1}{1-\sqrt{x^2-4x+5}}\leqslant 1.$$

▷ Так как $x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geqslant 1$, то $\varphi(x)=1-\sqrt{x^2-4x+5}\leqslant 0$, т. е. знаменатель дроби в левой части неравенства отрицателен при всех $x\neq 2$ и обращается в нуль при $x=2$.

Если $x\neq 2$, то исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$x\sqrt{2}+1\geqslant 1-\sqrt{x^2-4x+5},\ x\sqrt{2}\geqslant-\sqrt{x^2-4x+5},\ -x\sqrt{2}\leqslant\sqrt{x^2-4x+5}.$$

При $x\geqslant 0$ и $x\neq 2$ последнее неравенство является верным (его левая часть неположительна, а правая положительна), т. е. все значения $x\in[0;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$ являются решениями данного неравенства.

При $x<0$ обе части неравенства $-x\sqrt{2}\leqslant\sqrt{x^2-4x+5}$ положительны и оно равносильно каждому из неравенств $2x^2\leqslant x^2-4x+5$, $x^2+4x-5\leqslant 0$, $(x+5)(x-1)\leqslant 0$, откуда $-5\leqslant x\leqslant 1$. С учётом условия $x<0$ получаем $-5\leqslant x<0$. Таким образом, множество решений неравенства — объединение промежутков $[-5;\ 0)$, $[0;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$.

Ответ. $-5\leqslant x<2$, $x>2$. ◀

Задача 6. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3-2x}{1+2x}}+\frac{\sqrt{1+2x}}{2\sqrt{3-2x}-\sqrt{2}}\geqslant 0.$$

▷ Область определения E данного неравенства находится из условий $3-2x\geqslant 0$, $1+2x>0$, $2\sqrt{3-2x}\neq\sqrt{2}$ и представляет из себя объединение интервалов $\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$ и $\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)$.

На множестве E исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$\frac{\sqrt{3-2x}\left(2\sqrt{3-2x}-\sqrt{2}\right)+1+2x}{2\sqrt{3-2x}-\sqrt{2}}\geqslant 0,$$

$$\frac{7-2x-\sqrt{6-4x}}{2\sqrt{3-2x}-\sqrt{2}}\geqslant 0. \qquad (1)$$

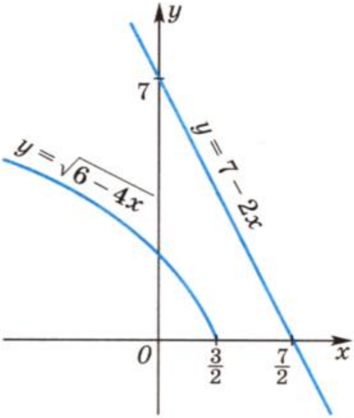


Рис. 122

Так как $7-2x>\sqrt{6-4x}$ при всех $x\leqslant\frac{3}{2}$ (рис. 122), то неравенство (1) равносильно на множестве E каждому из неравенств

$$2\sqrt{3-2x}>\sqrt{2},\ \sqrt{2(3-2x)}>1,$$
$$6-4x>1,$$

откуда $x<\frac{5}{4}$.

Таким образом, множество решений исходного неравенства — пересечение множества E с множеством $\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$, т. е. интервал $\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$.

Ответ. $-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{4}$. ◀

Задача 7. Решить неравенство

$$\frac{10-2|x|}{|x^2+9x+11|-3}\leqslant 1.$$

▷ Пусть $f(x)=10-2|x|$, $g(x)=|x^2+9x+11|-3$. Уравнение $f(x)=0$ имеет корни -5 и 5, а уравнение $g(x)=0$, равносильное совокупности двух уравнений $x^2+9x+8=0$ и $-x^2-9x-14=0$, имеет

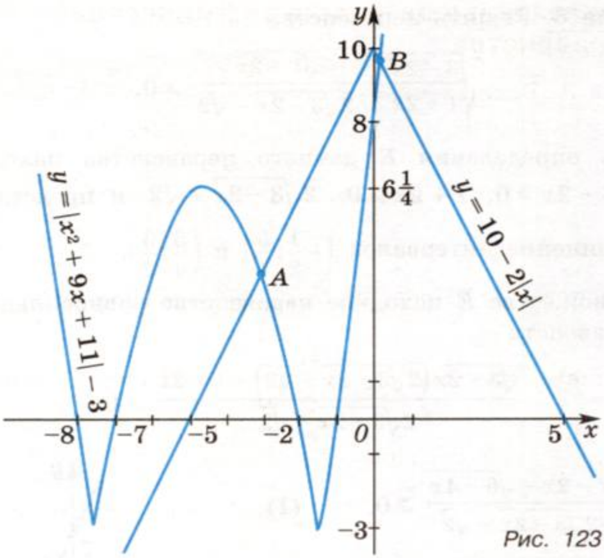


Рис. 123

две пары корней −8, −1 и −7, −2. Графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ изображены на рисунке 123.

Функция $y=g(x)$, график которой симметричен относительно прямой $x=-\frac{9}{2}$, принимает наименьшее значение, равное −3, в точках x_1 и x_2, таких, что $-8<x_1<-7$, $-2<x_2<-1$. На промежутках $x<-8$, $-7<x<-5$ и $-2<x<-1$ функции $f(x)$ и $g(x)$ принимают значения разных знаков, и поэтому указанные промежутки содержатся в множестве решений неравенства.

Если $-8<x<-7$, то $f(x)<0$, $g(x)<0$, причём $f(x)<f(-7)=-4$ и $-3\leqslant g(x)<0$, и поэтому $\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{4}{3}>1$. Значения $x\in(-8;\ 7)$ не содержатся в множестве решений. Если $x\in[-5;\ -2]$, то $f(x)\geqslant 0$, $g(x)>0$. Из рисунка 123 видно, что $f(x)\leqslant g(x)$ на промежутке $[-5;\ \alpha]$, где α — абсцисса точки A — точки пересечения графиков функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, т. е. корень уравнения $-x^2-9x-14=10+2x$ из промежутка $[-5;\ -2]$.

Это уравнение имеет корни −8 и −3, и поэтому $\alpha=-3$. Из рисунка 123 следует, что при $x>-1$ графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ пересекаются в точке B, абсцисса β которой — положительный корень уравнения $x^2+9x+8=0$, откуда $\beta=\frac{-11+\sqrt{129}}{2}$. При $-1<x<\beta$ справедливо неравенство $0<g(x)<f(x)$, откуда $\frac{f(x)}{g(x)}>1$, а при $x>\beta$ — неравенство $\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant 1$. Следовательно, значение $x\geqslant\frac{\sqrt{129}-11}{2}$ — решения неравенства.

Ответ. $x<-8$, $-7<x<-5$, $-2<x<-1$, $x\geqslant\frac{\sqrt{129}-11}{2}$.

3. Показательные и логарифмические неравенства

Задача 8. Решить неравенство $3^{x+1} > 8 \cdot 5^{|x-1|}$.

▷ Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 3^{x+1} > 8 \cdot 5^{x-1} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x < 1, \\ 3^{x+1} > 8 \cdot 5^{1-x}. \end{cases}$$

Неравенство $3^{x+1} > 8 \cdot 5^{x-1}$ равносильно каждому из следующих неравенств: $3 \cdot 3^x > \frac{8}{5} \cdot 5^x$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x > \frac{8}{15}$, $x < \log_{0,6}\frac{8}{15}$.

Решением системы $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x < \log_{0,6}\frac{8}{15} \end{cases}$ является промежуток $1 \leqslant x < \log_{0,6}\frac{8}{15}$ (так как $\log_{0,6}\frac{8}{15} = \log_{\frac{18}{30}}\frac{16}{30} > 1$).

Неравенство $3^{x+1} > 8 \cdot 5^{1-x}$ равносильно каждому из следующих неравенств: $3 \cdot 3^x > 40 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $3 \cdot 15^x > 40$, $15^x > \frac{40}{3}$, $x > \log_{15}\frac{40}{3}$. Решением системы $\begin{cases} x < 1, \\ x > \log_{15}\frac{40}{3} \end{cases}$ является промежуток $\log_{15}\frac{40}{3} < x < 1$ (так как $\log_{15}\frac{40}{3} = \log_{15}13\frac{1}{3} < 1$).

Ответ. $\log_{15}\frac{40}{3} < x < \log_{0,6}\frac{8}{15}$. ◀

Задача 9. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-5}{x+3}\right) - \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2} + 4x + 9\right) \leqslant 2\log_4(x^2 + 5x + 6).$$

▷ Область определения неравенства E находится из решения системы $\begin{cases} \frac{x-5}{x+3} > 0, \\ \frac{x^2}{2} + 4x + 9 > 0, \\ x^2 + 5x + 6 > 0. \end{cases}$ Множество $E = (-\infty;\ -3) \cup (5;\ +\infty)$.

На множестве E неравенство равносильно каждому из неравенств

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-5}{x+3}\right) + \log_{\frac{1}{2}}((x+2)(x+3)) \leqslant \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2} + 4x + 9\right)$;

$\log_{\frac{1}{2}}((x+2)(x-5)) \leqslant \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2} + 4x + 9\right)$; $x^2 - 3x - 10 \geqslant \frac{x^2}{2} + 4x + 9$;

$\frac{x^2}{2} - 7x - 19 \geqslant 0$.

Множество решений последнего неравенства $E_1 = \left(-\infty; 7-\sqrt{87}\right] \cup [7+\sqrt{87};\ +\infty)$. Искомое множество решений неравенства — пересечение множеств E и E_1.

Ответ. $x < -3$, $x \geqslant 7+\sqrt{87}$. ◀

<u>**Задача 10.**</u> Решить неравенство $\log_{\log_2\left(\frac{x}{2}\right)}(x^2-10x+22) > 0$.

▷ Данное неравенство равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} \log_2\left(\dfrac{x}{2}\right) > 1, \\ x^2-10x+22 > 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 0 < \log_2\left(\dfrac{x}{2}\right) < 1, \\ 0 < x^2-10x+22 < 1. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} > 2, \\ x^2-10x+21 > 0; \end{cases} \begin{cases} x > 4, \\ \left[\begin{array}{l} x < 3, \\ x > 7, \end{array}\right. \end{cases} \text{ откуда } x > 7.$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{x}{2} < 2, \\ x^2-10x+21 < 0, \\ x^2-10x+22 > 0; \end{cases} \begin{cases} 0 < x < 4, \\ 3 < x < 7, \\ \left[\begin{array}{l} x < 5-\sqrt{3}, \\ x > 5+\sqrt{3}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Так как $3 < 5-\sqrt{3} < 4$, то решением системы является промежуток $\left(3; 5-\sqrt{3}\right)$.

Ответ. $3 < x < 5-\sqrt{3}$, $x > 7$. ◀

<u>**Задача 11.**</u> Решить неравенство

$$\log_{(x+2)}\left(\sqrt{x+3}+1\right) \leqslant 1.$$

▷ Область определения неравенства находится из условий $x > -2$, $x \neq -1$, $x \geqslant -3$, откуда получаем $x > -2$ и $x \neq -1$.

На области определения неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x > -1, \\ \sqrt{x+3}+1 \leqslant x+2 \end{cases}$$

$$\text{и } \begin{cases} -2 < x < -1, \\ \sqrt{x+3}+1 \geqslant x+2. \end{cases}$$

Решим первую систему, заменив её равносильной системой:

$$\begin{cases} x > -1, \\ \sqrt{x+3} \leqslant x+1. \end{cases}$$

Так как обе части второго неравенства при $x > -1$ положительны, то оно равносильно неравенству $x + 3 \leqslant (x+1)^2$ или $x^2 + x - 2 \geqslant 0$, откуда $x \geqslant 1$.

Вторая система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} -2 < x < -1, \\ \sqrt{x+3} \geqslant x + 1. \end{cases}$$

Во втором неравенстве правая часть — отрицательное число при $-2 < x < -1$, а левая — положительное число, т. е. это неравенство выполняется при любом x из промежутка $(-2;\ -1)$.

Объединяя решения первой системы ($x \geqslant 1$) и второй системы ($-2 < x < -1$), получим решения исходного неравенства.

Ответ. $-2 < x < -1$, $x \geqslant 1$. ◀

Задача 12. Решить неравенство

$$\left|2^{\sqrt{x-1}-1} - 1\right| + \frac{5}{3} \leqslant \frac{2^{\sqrt{x-1}+3}}{3} - 4^{\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}}. \qquad (1)$$

▷ Если $2^{\sqrt{x-1}} = t$, то $t \geqslant 1$ ($x \geqslant 1$) и исходное неравенство примет вид

$$|t-2| \leqslant \frac{16}{3}t - \frac{10}{3} - t^2. \qquad (2)$$

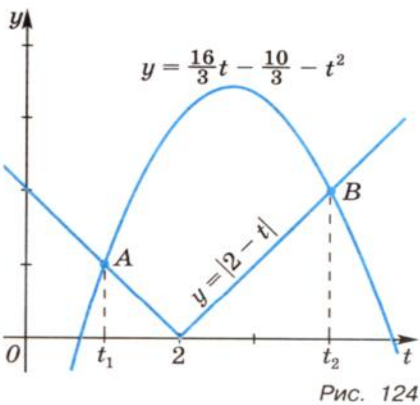


Рис. 124

Пусть $f(t) = |t-2|$, $g(t) = \frac{16}{3}t - \frac{10}{3} - t^2$, где $t \geqslant 1$. Построим графики функций $y = f(t)$ и $y = g(t)$ (рис. 124). Из рисунка видно, что неравенству $f(t) \leqslant g(t)$ удовлетворяют значения $t \in [t_1;\ t_2]$, где t_1 и t_2 — абсциссы точек A и B, t_1 — корень уравнения $2 - t = g(t)$, такой, что $t_1 < 2$, а t_2 — корень уравнения $t - 2 = g(t)$, такой, что $t_2 > 2$.

Первое из этих уравнений равносильно уравнению $3t^2 - 19t + 16 = 0$ и имеет корни 1 и $\frac{16}{3}$, а второе равносильно уравнению $3t^2 - 13t + 4 = 0$ и имеет корни 4 и $\frac{1}{3}$.

Следовательно, $t_1 = 1$, $t_2 = 4$, а множество решений неравенства (2) есть отрезок $1 \leqslant t \leqslant 4$, т. е. $1 \leqslant 2^{\sqrt{x-1}} \leqslant 4$, откуда $0 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 2$, $1 \leqslant x \leqslant 5$.

Ответ. $1 \leqslant x \leqslant 5$. ◀

§ 4. Способы и методы решения систем уравнений с двумя неизвестными

Понятие *равносильности* систем уравнений и обоснования основных способов решения систем, основанных на равносильных переходах (способов *подстановки* и *сложения*), приведены в § 2 главы I и в § 4 главы V учебника 10 класса.

Способом подстановки в учебнике 10 класса решались, например, задачи 1, 2 из § 10 главы III, задача 1 из § 4 главы VI, задача 10 из § 5 главы VII. Решим ещё несколько систем уравнений способом подстановки.

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0, \\ x - y + 1 = 0. \end{cases}$$

▷ Из второго уравнения системы $x = y - 1$. Это выражение подставим вместо x в первое уравнение системы:

$$2(y-1)^2 - (y-1)y + 3y^2 - 7(y-1) - 12y + 1 = 0.$$

Решим полученное уравнение: $2y^2 - 4y + 2 - y^2 + y + 3y^2 - 7y + 7 - 12y + 1 = 0$, $4y^2 - 22y + 10 = 0$, $2y^2 - 11y + 5 = 0$, откуда $y_1 = 5$, $y_2 = \frac{1}{2}$. Подставив найденные значения y в выражение $x = y - 1$, получим $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Ответ. (4; 5), $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. ◀

Задача 2. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1{,}5, \\ x - y = -\dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

▷ Выражение $x = y - \frac{2\pi}{3}$, полученное из второго уравнения, подставим в первое: $\sin\left(y - \frac{2\pi}{3}\right) - \sin y = 1{,}5$. Это уравнение равносильно каждому из следующих уравнений:

$$2\sin\frac{y - \frac{2\pi}{3} - y}{2} \cdot \cos\frac{y - \frac{2\pi}{3} + y}{2} = 1{,}5,$$

$$2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(y - \frac{\pi}{3}\right) = 1{,}5, \quad -\sqrt{3}\cos\left(y - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2},$$

$$\cos\left(y - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда $y-\frac{\pi}{3}=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k$ или $y=\frac{\pi}{3}\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in\mathbf{Z}.$

Получаем $y=\pi+2\pi k$ и $y=-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, где $k\in\mathbf{Z}$. Соответствующие значения x находим из выражения $y-\frac{2\pi}{3}$: $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ и $x=-\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\pi+2\pi k\right)$, $\left(-\pi+2\pi k;-\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbf{Z}$. ◀

Способом сложения (который называют ещё способом алгебраического сложения, способом линейных преобразований) решались в учебнике 10 класса, например, задачи 7 и 8 из § 5 главы V, задача 1 из § 6 главы IX. Рассмотрим решения ещё нескольких систем уравнений этим способом.

Задача 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x^2-4y^2-xy+5y=1,\\ x^2+3y^2-xy-4y=-1.\end{cases}$$

▷ Чтобы из данных двух уравнений получить линейными преобразованиями уравнение с одним неизвестным, умножим, например, второе уравнение на -1 и сложим полученное уравнение с первым:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}x^2-4y^2-xy+5y=1\\ -x^2-3y^2+xy+4y=1\end{array}\\ \hline -7y^2+9y=2\end{array}$$

Система уравнений

$$\begin{cases}x^2-4y^2-xy+5y=1,\\ -7y^2+9y=2\end{cases}$$

равносильна данной. Решая второе уравнение последней системы, получаем $y_1=1$, $y_2=\frac{2}{7}$. Подставив найденные значения y в первое уравнение системы, получим соответствующие уравнения: $x^2-x=0$ и $49x^2-14x+5=0$. Корни первого уравнения $x=0$ и $x=1$, второе уравнение не имеет корней.

Ответ. (0; 1), (1; 1). ◀

Задача 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin x+\sqrt{2}\cos y=\frac{3}{2},\\ \sqrt{3}\cos x+\sqrt{2}\sin y=\frac{5}{2}.\end{cases}$$

▷ Разделив обе части каждого из уравнений системы на 2, запишем эту систему в виде

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{6} + \cos y \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}, \\ \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sin y \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

Складывая полученные уравнения почленно, находим

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

Это уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ и $\cos\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ (так как $|\cos\alpha| \leqslant 1$), откуда

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},\ y = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ. $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◀

Нередко при решении систем уравнений переходят к системам-следствиям, после чего найденные решения проверяют постановкой в исходную систему.

Если каждое решение первой системы уравнений является и решением второй системы, то вторая система называется *следствием* первой.

Приведём ещё два утверждения, часто используемые при решении систем уравнений:

1) если к данной системе присоединить уравнение, являющееся следствием этой системы, то полученная система будет равносильна исходной;

2) если какое-либо уравнение данной системы заменить его следствием, а остальные уравнения оставить без изменения, то полученная система будет следствием исходной.

Напомним, что к уравнению-следствию приводят, например, следующие преобразования: замена суммы (разности) логарифмов логарифмом произведения (частного); умножение обеих частей уравнения на выражение с неизвестным; возведение обеих частей уравнения в чётную степень. При всех этих преобразованиях происходит расширение области определения как преобразуемого уравнения, так и всей системы, в которую входит уравнение.

Решение систем уравнений, в которых в неявном виде осуществлялся переход к системе-следствию, рассматривался в учебнике 10 класса: задачи 7 и 10 из § 5 главы VII, задача 9 из § 5 главы V. Решим ещё несколько систем уравнений, применив переход к системе-следствию.

<u>**Задача 5.**</u> Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 2y = 100, \\ \lg x - \lg y = \lg 8 - \lg 5. \end{cases}$$

▷ Заменим систему её следствием (применив свойство разности логарифмов с одинаковыми основаниями):

$$\begin{cases} 5x + 2y = 100, \\ \dfrac{x}{y} = 1{,}6. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $x = 1{,}6y$. Подставив это выражение вместо x в первое уравнение системы, получим $8y + 2y = 100$, откуда $y = 10$, тогда $x = 16$. Найденные значения x и y, как показывает проверка, являются решением исходной системы.

Ответ. (16; 10). ◀

Задача 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2y} = 3y - x, \\ \dfrac{81}{4}y^2 + x^3 = 2x + 1. \end{cases}$$

▷ Возводя в квадрат обе части первого уравнения, получаем уравнение-следствие

$$x^2 - 2y = 9y^2 - 6xy + x^2,$$

откуда $y(9y - 6x + 2) = 0$.

а) Если $y = 0$, то из второго уравнения системы следует, что

$$x^3 - 2x - 1 = 0,$$

$$x^3 + x^2 - (x^2 + x) - (x + 1) = 0,$$

$$x^2(x + 1) - x(x + 1) - (x + 1) = 0,$$

$$(x + 1)(x^2 - x - 1) = 0, \text{ откуда}$$

$$x_1 = -1, \ x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \ x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Пары чисел $(-1;\ 0)$ и $\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}; 0\right)$ — решения системы, а $\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}; 0\right)$ — постороннее решение, так как при $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ правая часть первого уравнения отрицательна.

б) Если $9y - 6x + 2 = 0$, то $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{9}$ и из второго уравнения следует, что $\dfrac{81}{4}\left(\dfrac{4}{9}x^2 - \dfrac{8}{27}x + \dfrac{4}{81}\right) + x^3 = 2x + 1$ или $x^3 + 9x^2 - 8x = 0$, $x(x^2 + 9x - 8) = 0$, откуда $x_0 = 0$, $x_1 = -\dfrac{9 + \sqrt{113}}{2}$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{113} - 9}{2}$.

Пара чисел $\left(0; -\dfrac{2}{9}\right)$ не удовлетворяет первому уравнению системы.

Если $x = x_1$, то $3y_1 - x_1 = x_1 - \dfrac{2}{3} < 0$ и $(x_1;\ y_1)$ — постороннее решение, а если $x = x_2$, то $3y_2 - x_2 = x_2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{\sqrt{113} - 9}{2} - \dfrac{2}{3} > 0$, так как $1017 > 961$. Следовательно, $(x_2;\ y_2)$ — решение системы.

Ответ. $(-1;\ 0)$, $\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}; 0\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{113} - 9}{2}; \dfrac{3\sqrt{113} - 29}{9}\right)$. ◀

Задача 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2}=1,\\ \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2}=y^2-2x^2+2x+3.\end{cases}$$

▷ Перемножая почленно уравнения исходной системы, получаем

$$y^2-x^2=y^2-2x^2+2x+3 \text{ или } x^2-2x-3=0.$$

Это уравнение, имеющее корни $x_1=3$ и $x_2=-1$, является следствием системы.

Если $x=x_1=3$, то из первого уравнения системы получаем $\sqrt{25-y^2}=3$ или $25-y^2=9$, $y=\pm4$. Найденные пары чисел (3; 4) и (3; −4) удовлетворяют второму уравнению системы.

Если $x=-1$, то из первого уравнения системы находим $\sqrt{25-y^2}=\sqrt{24}-1$, $\sqrt{25-y^2}=2\sqrt{6}-1$, $25-y^2=25-4\sqrt{6}$, $y^2=4\sqrt{6}$,

$$y=\pm2\sqrt[4]{6}.$$

Обе пары чисел $\left(-1;2\sqrt[4]{6}\right)$ и $\left(-1;-2\sqrt[4]{6}\right)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

Ответ. (3; 4), (3; −4), $\left(-1;2\sqrt[4]{6}\right)$, $\left(-1;-2\sqrt[4]{6}\right)$. ◀

Вместо перехода к системе, являющейся следствием исходной системы уравнений (и выполнения последующей проверки полученных решений), можно совершать равносильные преобразования на области определения системы (и найденные решения проверять на принадлежность области определения).

Задача 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_{2x+1}(4x^2-y^2+8x-6y-4)=2,\\ \log_{y+2}(y^2+6y-x+14)=2.\end{cases}$$

▷ Область определения системы находим из условий

$$x>-\frac{1}{2},\ x\neq0,\ y>-2,\ y\neq-1. \qquad (1)$$

На области определения исходная система равносильна каждой из следующих систем:

$$\begin{cases}4x^2-y^2+8x-6y-4=4x^2+4x+1,\\ y^2+6y-x+14=y^2+4y+4,\end{cases}$$

$$\begin{cases}y^2+6y=4x-5,\\ x=2y+10,\end{cases}$$

откуда $y^2-2y-35=0$, $y_1=-5$, $y_2=7$.

Если $y=-5$, то не выполняются условия (1), а если $y=7$, то $x=24$. Пара чисел $x=24$, $y=7$ удовлетворяет условиям (1), и поэтому (24; 7) — решение исходной системы.

Ответ. (24; 7). ◀

При решении систем уравнений нередко используется метод введения новых неизвестных. В учебнике 10 класса с его помощью решены, например, задача 2 из § 4 главы VI, задача 2 из § 6 главы IX.

Среди систем уравнений, решаемых с помощью введения новых неизвестных, особое место занимают так называемые однородные системы и симметрические системы.

Система вида

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$$

называется *однородной* системой уравнений второй степени. Решение такой системы обычно сводится к решению квадратного уравнения относительно $\frac{x}{y}$ или $\frac{y}{x}$.

Задача 9. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 5y^2 = -5. \end{cases}$$

▷ I способ. Сведём эту систему к системе того же вида, у которой одно из чисел d_1, d_2 равно нулю. Умножим первое уравнение на 5, а второе на 3 и сложим полученные уравнения.

В результате придём к уравнению

$$13x^2 + 21xy - 10y^2 = 0,$$

которое вместе с первым уравнением образует систему, равносильную данной. Заметим, что пара чисел (0; 0) не является решением исходной системы. Разделим обе части последнего уравнения на $y^2 \neq 0$. Поэтому последнее уравнение равносильно уравнению

$$13\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 21\frac{x}{y} - 10 = 0,$$

откуда $x = -2y$, $x = \frac{5}{13}y$.

Если $x = -2y$, то из первого уравнения исходной системы получаем $y^2 = 1$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = -1$ и, следовательно, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Аналогично если $x = \frac{5}{13}y$, то $y^2 = \frac{169}{138}$, $y = \pm\frac{13}{\sqrt{138}}$.

Ответ. $(-2;\ 1)$, $(2;\ -1)$, $\left(\frac{5\sqrt{138}}{138}; \frac{13\sqrt{138}}{138}\right)$, $\left(-\frac{5\sqrt{138}}{138}; -\frac{13\sqrt{138}}{138}\right)$.

II способ. Разделим первое уравнение данной системы на второе, а затем разделим числитель и знаменатель в левой части полученного уравнения на y^2. В результате придём к уравнению

$$\frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2+3\left(\frac{x}{y}\right)+1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\left(\frac{x}{y}\right)-5}=-\frac{3}{5},$$

которое можно записать в виде $13t^2+21t-10=0$, где $t=\frac{x}{y}$. Корнями этого уравнения являются $t_1=-2$, $t_2=\frac{5}{13}$. Возвращаясь к исходным неизвестным, получаем те же решения, что и в первом способе. ◀

Система уравнений вида

$$\begin{cases} f(x, y)=0, \\ g(x, y)=0, \end{cases}$$

где $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — многочлены, которые не меняются при замене x на y, а y на x, называется *симметрической*. Простейшей системой этого вида является система

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases}$$

При решении симметрических систем вводятся новые неизвестные u и v по формулам

$$u=x+y,\ v=xy.$$

При этом полезными могут оказаться следующие формулы для сумм степеней x и y:

$$x^2+y^2=u^2-2v,$$
$$x^3+y^3=u^3-3uv,$$
$$x^4+y^4=u^4-4u^2v+2v^2.$$

Задача 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=91, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$$

▷ Это симметрическая система. Полагая $x+y=u$, $xy=v$ и используя формулы для x^2+y^2 и x^4+y^4, запишем систему в виде

$$\begin{cases} u^4-4u^2v+3v^2=91, \\ u^2=7+3v. \end{cases}$$

Исключая из этой системы u^2, получаем

$$(7+3v)^2-4(7+3v)v+3v^2=91$$

или $14v=42$, откуда $v=3$, $u^2=16$. Следовательно, исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-4, \\ xy=3. \end{cases}$$

Ответ. (1; 3), (3; 1), (−1; −3), (−3; −1). ◀

Решим ещё несколько систем уравнений методом введения новых неизвестных.

Задача 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2 \dfrac{x^2\sqrt{y+1}}{2} = 2,\\ \log_2 x \cdot \log_2(y+1) = 2.\end{cases}$$

▷ Область определения системы уравнений описывается условиями $x > 0$, $y > -1$. На области определения исходная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases}2\log_2 x + \dfrac{1}{2}\log_2(y+1) = 3,\\ \log_2 x \cdot \log_2(y+1) = 2.\end{cases} \tag{1}$$

Пусть $\log_2 x = u$, $\log_2(y+1) = v$, тогда систему (1) можно записать в виде

$$\begin{cases}2u + \dfrac{1}{2}v = 3,\\ uv = 2.\end{cases} \tag{2}$$

Выражение $v = 6 - 4u$, полученное из первого уравнения системы (2), подставим во второе уравнение. Решим полученное уравнение $u(6-4u) = 2$: $2u^2 - 3u + 1 = 0$, откуда $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{1}{2}$. Найдём соответствующие значения v: $v_1 = 2$, $v_2 = 4$. Возвращаемся к исходным неизвестным:

1) $\begin{cases}\log_2 x = 1,\\ \log_2(y+1) = 2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\log_2 x = \dfrac{1}{2},\\ \log_2(y+1) = 4.\end{cases}$

Найденные после решения систем пары чисел (2; 3) и $(\sqrt{2}; 15)$ являются решениями исходной системы.

Ответ. (2; 3), $(\sqrt{2}; 15)$. ◀

Задача 12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2xy + 6x - y - 7 = 0,\\ \sqrt{2x-1} + \sqrt{y+3} - 3 = 0.\end{cases}$$

▷ Запишем первое уравнение системы в виде $2xy + 6x - y - 3 - 4 = 0$, откуда $2x(y+3) - (y+3) - 4 = 0$ или $(y+3)(2x-1) - 4 = 0$. Введём обозначения $v = \sqrt{2x-1}$ и $u = \sqrt{y+3}$. Очевидно, что $v \geqslant 0$ и $u \geqslant 0$.

При этих условиях заданную систему можно относительно новых неизвестных записать в виде

$$\begin{cases}u^2v^2 - 4 = 0,\\ v + u - 3 = 0.\end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} uv = 2, \\ v = 3 - u \end{cases} \text{ и } \begin{cases} uv = -2, \\ v = 3 - u. \end{cases}$$

Решая первую систему способом подстановки, получаем $u_1 = 2$, $v_1 = 1$ и $u_2 = 1$, $v_2 = 2$. Возвращаясь к исходным неизвестным, получаем $x_1 = 1$, $y_1 = 1$; $x_2 = \frac{5}{2}$, $y_2 = -2$.

Вторая система не имеет решений, удовлетворяющих условиям $v \geqslant 0$ и $u \geqslant 0$.

Ответ. (1; 1), $\left(\frac{5}{2}; -2\right)$. ◀

Задача 13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^2 x + 3\sin x \sin y = 0, \\ 21\cos 2x - \cos 2y = 10. \end{cases}$$

▷ Преобразуем тригонометрические выражения, входящие в уравнения системы таким образом, чтобы в них фигурировали только синусы углов:

$$\begin{cases} 1 - \sin^2 x + 3\sin x \sin y = 0, \\ 21(1 - 2\sin^2 x) - (1 - 2\sin^2 y) = 10. \end{cases}$$

Введём новые неизвестные $u = \sin x$ и $v = \sin y$. Система примет вид

$$\begin{cases} 1 - u^2 + 3uv = 0, \\ 21(1 - 2u^2) - (1 - 2v^2) = 10. \end{cases}$$

Эта система равносильна следующей:

$$\begin{cases} 3uv = u^2 - 1, \\ 21u^2 - v^2 = 5. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы очевидно, что $u \neq 0$.

Выражение $v = \frac{u^2 - 1}{3u}$, полученное из первого уравнения, подставим во второе уравнение системы и получим биквадратное уравнение $188u^4 - 43u^2 - 1 = 0$, корнями которого являются $u = \pm\frac{1}{2}$. Если $u = \frac{1}{2}$, то $v = \frac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}$; если $u = -\frac{1}{2}$, то $v = \frac{1}{2}$.

Вернёмся к исходным неизвестным:

$$1)\ \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin y = -\frac{1}{2}, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \end{cases}$$

2) $\begin{cases} \sin x = -\dfrac{1}{2}, \\ \sin y = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}, \\ y = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$

Ответ. $\left((-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n; (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi k\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$\left((-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n; (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◀

Задача 14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x (y+1) = 4\log_{x+2}\sqrt{y-1}, \\ \log_{y-1}(x+2) = \log_x\left(\dfrac{x^3}{y+1}\right). \end{cases}$$

▷ Область определения системы:

$$x > 0,\ y > 1,\ x \neq 1,\ y \neq 2.$$

Полагая $u = \log_x(y+1)$, $v = \log_{y-1}(x+2)$ и используя свойства логарифмов, преобразуем уравнения системы:

$$u = 2\log_{x+2}(y-1),\ u = \frac{2}{\log_{y-1}(x+2)},\ u = \frac{2}{v},$$

$$v = 3 - \log_x(y+1),\ v = 3 - u.$$

Получим систему

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ uv = 2, \end{cases}$$

которая имеет два решения: (1; 2) и (2; 1).

а) Если $u = 1$, $v = 2$, то $\log_x(y+1) = 1$, $\log_{y-1}(x+2) = 2$, откуда

$$\begin{cases} y + 1 = x, \\ x + 2 = (y-1)^2. \end{cases}$$

Исключая из этой системы x, получаем $(y-1)^2 = y + 3$ или $y^2 - 3y - 2 = 0$, откуда $y = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$.

С учётом области определения системы находим решение $\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

б) Если $u = 2$, $v = 1$, то $\log_x(y+1) = 2$, $\log_{y-1}(x+2) = 1$, откуда

$$\begin{cases} y + 1 = x^2, \\ x + 2 = y - 1. \end{cases}$$

В этом случае $x^2 = x + 4$ или $x^2 - x - 4 = 0$, откуда

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2},\ y = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

С учётом области определения находим решение $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Ответ. $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$. ◀

При решении систем уравнений, так же как и при решении уравнений, применяется функционально-графический метод. С использованием свойств функций и (или) графиков функций (или графиков уравнений) будут решены следующие задачи. В задаче 15 исследование свойств функции будет проведено с помощью производной.

Задача 15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y^4 - 2y^2 = \ln x, \\ 2\operatorname{arctg} x + \arcsin y = 0. \end{cases}$$

▷ Первое уравнение системы запишем в виде $x - \ln x = 2y^2 - y^4$. Правую часть этого уравнения преобразуем к виду $1 - (y^2 - 1)^2$, после чего исследуем функцию $f(x) = x - \ln x$. Её производная $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, откуда следует, что функция $f(x)$ убывает на промежутке $(0; 1]$, возрастает на промежутке $[1; +\infty)$, и поэтому $f(x) \geqslant f(1)$ при $x > 0$, причём равенство $f(x) = x - \ln x = 1$ достигается только при $x = 1$.

Из первого уравнения системы следует, что

$$f(x) = x - \ln x = 1 - (y^2 - 1)^2 \leqslant 1,$$

причём равенство $1 - (y^2 - 1)^2 = 1$ имеет место только в случае, когда $y^2 = 1$, т. е. при $y = 1$ и $y = -1$. Таким образом, первому уравнению системы удовлетворяют две пары чисел $(1; 1)$ и $(1; -1)$, из которых только вторая пара чисел удовлетворяет второму уравнению системы.

Итак, система имеет единственное решение $(1; -1)$.

Ответ. $(1; -1)$. ◀

Решение системы уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} F(x; y) = 0, & (1) \\ G(x; y) = 0 & (2) \end{cases}$$

можно истолковать как отыскание координат точек пересечения линий Γ_1 и Γ_2, заданных уравнениями (1) и (2) соответственно.

Построив эти линии в одной системе координат и найдя координаты точек пересечения линий Γ_1 и Γ_2, можно найти приближённые решения системы.

Задача 16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 6y = 13, \\ xy + 3x - 2y = 11. \end{cases}$$

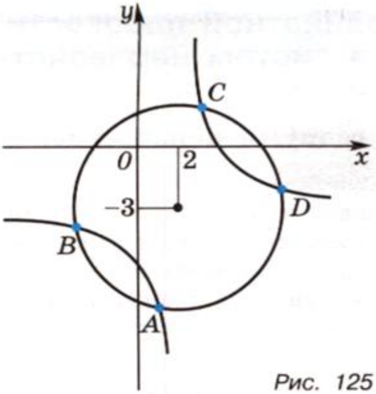


Рис. 125

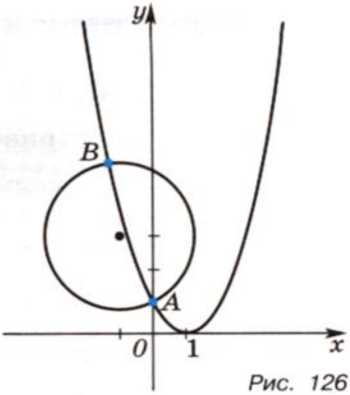


Рис. 126

▷ 1) Первое уравнение системы, записанное в виде

$$(x-2)^2+(y+3)^2=26,$$

задаёт окружность радиуса $\sqrt{26}$ с центром (2; −3) (рис. 125). Второе уравнение системы, записанное в виде

$$y=\frac{11-3x}{x-2}, \text{ откуда } y=-\frac{3(x-2)-5}{x-2} \text{ или } y=-3+\frac{5}{x-2},$$

задаёт гиперболу. Окружность и гипербола, изображённые на рисунке 125, имеют четыре общие точки $A(1;\ -8)$, $B(-3;\ -4)$, $C(3;\ 2)$, $D(7;\ -2)$. В целочисленности значений координат этих точек убеждаемся подстановкой их значений в исходную систему.

Следовательно, данная система уравнений имеет четыре решения (1; −8), (−3; −4), (3; 2), (7; −2).

З а м е ч а н и е. Для аналитического решения системы прибавим к первому уравнению удвоенное второе, получим уравнение $(x+y)^2+2(x+y)-35=0$, откуда следует, что либо $x+y=5$, либо $x+y=-7$. Исключив из системы одно из неизвестных, получим квадратное уравнение относительно другого неизвестного. ◀

Задача 17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-2x-y+1=0, \\ x^2+y^2+2x-6y+5=0. \end{cases}$$

▷ Первое уравнение системы, записанное в виде $y=(x-1)^2$, задаёт параболу. Второе уравнение системы, записанное в виде $(x+1)^2+(y-3)^2=5$, задаёт окружность радиуса $\sqrt{5}$ с центром (−1; 3).

Окружность и парабола, изображённые на рисунке 126, имеют две общие точки $A(0;\ 1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, где $x_2\approx-1{,}3$, $y_2\approx5{,}3$. Проверка показывает, что $x_1=0$, $y_1=1$ — точные значения решения исходной системы. Значения x_2 и y_2 указаны с точностью до 0,1.

Ответ. $x_1=0,\ y_1=1;\ x_2\approx-1{,}3,\ y_2\approx5{,}3.$ ◀

§ 5. Изображение на координатной плоскости решений неравенств и систем неравенств с двумя неизвестными

1. Линейные неравенства с двумя неизвестными и их системы

В § 4 главы I учебника 10 класса рассматривались решения линейных неравенств и систем линейных неравенств с двумя неизвестными: после построения в одной системе координат графиков соответствующих линейных функций множество точек плоскости $(x;\ y)$, являющихся решениями неравенства (или системы неравенств), выделялось штриховкой.

<u>**Задача 1.**</u> Изобразить на координатной плоскости множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 2x + y < 3, \\ 3x - 2y \leqslant 6. \end{cases}$$

▷ Преобразуем систему к виду $\begin{cases} y < 3 - 2x, \\ y \geqslant \dfrac{3}{2}x - 3. \end{cases}$

В одной системе координат (рис. 127) строим графики функций $y = 3 - 2x$ (пунктирной линией) и $y = \dfrac{3}{2}x - 3$ (сплошной линией). Решения неравенства $y < 3 - 2x$ изображаются точками плоскости, расположенными ниже прямой $y = 3 - 2x$. Решения неравенства $y \geqslant \dfrac{3}{2}x - 3$ изображаются точками плоскости, лежащими на соответствующей прямой и выше её. Решения этих неравенств выделяем штриховкой соответствующей части плоскости. Часть плоскости, на которой штриховки пересекаются, иллюстрирует множество пар чисел $(x;\ y)$, являющихся решениями исходной системы. ◀

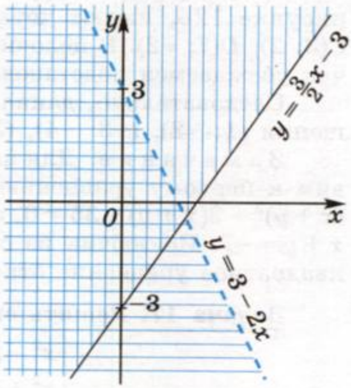


Рис. 127

2. Нелинейные неравенства

Если $A(a;\ b)$ — точка координатной плоскости, $R > 0$, то неравенству

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$$

удовлетворяют все те точки, которые находятся от точки A на расстоянии, меньшем R, т. е. все точки (и только они), расположенные внутри окружности C радиуса R с центром в точке $A(a;\ b)$.

Аналогично множество решений неравенства

$$(x-a)^2+(y-b)^2>R^2$$

есть множество точек, лежащих вне окружности C.

<u>Задача 2.</u> Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству:

1) $2x^2+2y^2-2x+6y-13<0$;
2) $9x^2+9y^2+6x-12y-76\geqslant 0$.

▷ 1) Преобразуем неравенство, выделяя полные квадраты:

$$2\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+2\left(y^2+3y+\frac{9}{4}\right)-13-5<0,$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2<9.$$

Множество решений этого неравенства — множество точек, лежащих внутри окружности радиуса 3 с центром $\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

2) $9x^2+9y^2+6x-12y-76=9\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)+9\left(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}\right)-$ $-5-76\geqslant 0$, $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2\geqslant 9$.

Искомое множество решений неравенства — множество точек, лежащих на окружности радиуса 3 с центром $\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ и вне этой окружности. ◀

<u>Задача 3.</u> Найти множество точек координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству:

1) $|x|+|y|\geqslant 3$;

2) $x^2+y^2\leqslant 4|x|$;

3) $\dfrac{x-25}{x^2+y^2-625}>\dfrac{1}{26}$.

▷ 1) Пусть $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, тогда неравенство примет вид $x+y\geqslant 3$, откуда $y\geqslant 3-x$.

Этому неравенству удовлетворяют точки первого квадранта, лежащие выше прямой $x+y=3$ (рис. 128) и на этой прямой (вне треугольника AOB, где $A(3;\ 0)$, $B(0;\ 3)$).

Аналогично получаем во втором, третьем и четвёртом квадрантах точки (удовлетворяющие

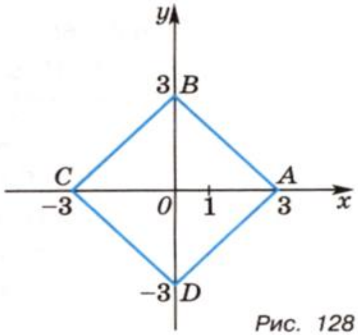


Рис. 128

исходному неравенству): выше прямой BC, ниже прямой CD и ниже прямой AD соответственно, а также точки отрезков BC, CD и AD. Таким образом, множество решений исходного неравенства — множество точек, лежащих на сторонах квадрата $ABCD$ и вне этого квадрата.

2) Если $x \geqslant 0$, то неравенство можно записать в виде

$$(x-2)^2 + y^2 \leqslant 4.$$

Полученному неравенству удовлетворяют точки множества E_1, лежащие на окружности радиуса 2 с центром (2; 0) и точки круга, ограниченного этой окружностью.

Аналогично если $x \leqslant 0$, то исходное неравенство можно записать в виде

$$(x+2)^2 + y^2 \leqslant 4,$$

а множество E_2 решений этого неравенства — множество точек, лежащих на окружности радиуса 2 с центром (−2; 0) и точки круга, ограниченного этой окружностью. Следовательно, множество E решений исходного неравенства — объединение множеств E_1 и E_2, т. е. $E = E_1 \cup E_2$.

3) Данное неравенство, равносильное неравенству

$$\frac{(x-13)^2 + y^2 - 144}{x^2 + y^2 - 625} < 0,$$

является верным в тех и только в тех точках плоскости Oxy, которые лежат вне круга радиуса 12 с центром (13; 0), но принадлежащие кругу радиуса 25 с центром в точке O (точки окружностей, ограничивающих круги, не принадлежат множеству решений неравенства). ◀

3. Системы нелинейных неравенств

Задача 4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 - 18y \leqslant 0, \\ 2x + 3 - 2xy \leqslant 0. \end{cases}$$

▷ Складывая первое неравенство со вторым, умноженным на 3, находим

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 6(x-3y) + 9 \leqslant 0, \text{ или } ((x-3y)+3)^2 \leqslant 0,$$

откуда $x - 3y + 3 = 0$. Подставляя $x = 3y - 3$ в исходную систему, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 9y^2 - 18y + 9 + 9y^2 - 18y \leqslant 0, \\ 6y - 6 + 3 - 2(3y-3)y \leqslant 0, \end{cases}$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} 2y^2 - 4y + 1 \leqslant 0, \\ 2y^2 - 4y + 1 \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $2y^2 - 4y + 1 = 0$. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x = 3y - 3, \\ 2y^2 - 4y + 1 = 0, \end{cases}$$

найдём два её решения, которые являются решениями исходной системы неравенств.

Ответ. $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}; 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ◀

Задача 5. Найти все такие пары целых чисел x, y, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y - |x^2 - 2x| + \frac{1}{2} > 0, \\ y + |x - 1| < 2. \end{cases}$$

▷ Запишем данную систему так:

$$\begin{cases} y > |x^2 - 2x| - \frac{1}{2}, & (1) \\ y < 2 - |x - 1|. & (2) \end{cases}$$

Так как $|x^2 - 2x| \geqslant 0$, $|x - 1| \geqslant 0$, то из неравенств полученной системы следует, что

$$-\frac{1}{2} < y < 2. \qquad (3)$$

Целыми числами, удовлетворяющими неравенству (3), являются лишь 0 и 1, поэтому система неравенств (1) и (2) может иметь целые решения только при $y = 0$ и $y = 1$.

1) Если $y = 0$, то система неравенств (1), (2) примет вид

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| < \frac{1}{2}, \\ |x - 1| < 2. \end{cases}$$

Второму из этих неравенств удовлетворяют целые числа 0, 1 и 2. Проверка показывает, что первому неравенству удовлетворяют лишь 0 и 2. Следовательно, пары чисел $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ и $x_2 = 2$, $y_2 = 0$ образуют решения исходной системы неравенств.

2) Если $y = 1$, то система неравенств (1), (2) приводится к виду

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| < \frac{3}{2}, \\ |x - 1| < 1. \end{cases}$$

Второму неравенству этой системы удовлетворяет единственное целое число $x = 1$, которое является также и решением первого неравенства.

Ответ. $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = 2$, $y_2 = 0$; $x_3 = 1$, $y_3 = 1$. ◀

Задача 6. Изобразить на координатной плоскости Oxy фигуру Φ, заданную системой неравенств, и найти площадь S этой фигуры:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 4, \\ x + y > 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 4, \\ (x - 1)^2 + y^2 > 1. \end{cases}$

▷ 1) Неравенство $x^2 + y^2 < 4$ задаёт множество точек, лежащих внутри окружности с центром в начале координат и радиусом 2, а неравенство $x + y > 2$ — множество точек, расположенных выше прямой $x + y = 2$. Эта прямая пересекает окружность в точках $A(-2;\ 0)$ и $B(0;\ 2)$, а фигура Φ представляет собой сегмент (рис. 129). Искомая площадь S равна разности площадей четверти круга (S_1) и треугольника AOB (S_2).

Так как $S_1 = \pi$, $S_2 = 2$, то $S = \pi - 2$.

2) Фигура Φ — это множество точек, принадлежащих кругу с центром в точке $O(0;\ 0)$ и радиусом 2, но вне круга с центром в точке $(1;\ 0)$ и радиусом 1 (рис. 130). Значит, площадь фигуры Φ равна $S = 4\pi - \pi = 3\pi$.

Ответ. 1) $S = \pi - 2$; 2) $S = 3\pi$. ◀

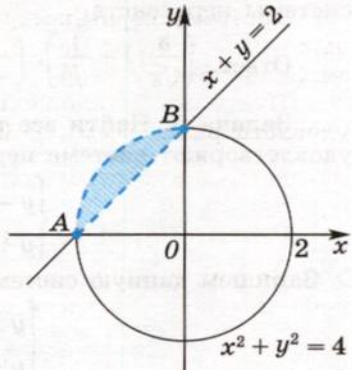


Рис. 129

Задача 7. Дана система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y| \leqslant 2, \\ x^2 + y^2 \geqslant 4(x + y - 1), \\ (y - 3x - 2)(3y - x + 2) \leqslant 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

а) первому неравенству системы;

б) первым двум неравенствам системы;

в) всем трём неравенствам системы.

▷ а) Первому неравенству (см. решение аналогичной задачи 3(1)) удовлетворяют точки, лежащие в квадрате (рис. 131) с вершинами $A(-2;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, $C(2;\ 0)$, $D(0;\ -2)$. Площадь этого квадрата $S_1 = 8$.

б) Второму неравенству, которое можно записать в виде

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \geqslant 4,$$

удовлетворяют точки, лежащие вне круга радиуса 2 с центром в точке $E(2;\ 2)$ и точки окружности, его ограничивающей.

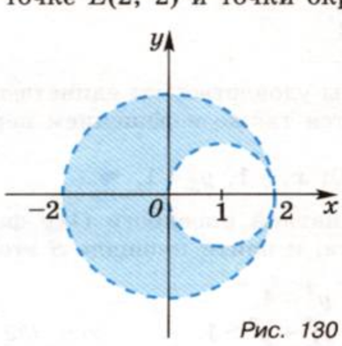


Рис. 130

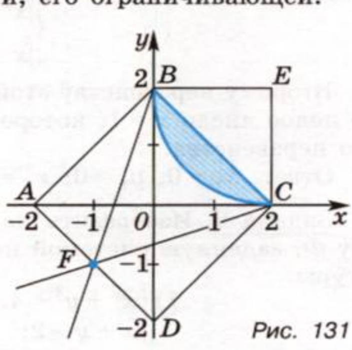


Рис. 131

Площадь закрашенного на рисунке 131 сегмента равна $\pi - 2$, а площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют первым двум неравенствам, равна $S_2 = 8 - (\pi - 2) = 10 - \pi$.

в) Прямые $y - 3x - 2 = 0$ и $3y - x + 2 = 0$ пересекаются в точке $F(-1; -1)$ и проходят соответственно через точки B и C.

Третьему неравенству удовлетворяют точки двух вертикальных углов с вершиной F, один из этих углов — угол, образуемый лучами FB и FC и содержащий точку O (см. рис. 131).

Пусть S_3 — площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют всем трём неравенствам системы, S_4 — сумма площадей треугольников ABF и CDF. Тогда $S_4 = \frac{1}{2}S_1 = 4$, $S_3 = S_2 - S_4 = 6 - \pi$.

Ответет. а) 8; б) $10 - \pi$; в) $6 - \pi$.

Задача 8. Найти площадь фигуры Φ, которая задаётся на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 10, \\ 3x^2 - 4x - 32 \leqslant 0, \\ (3x - 2y)(3y - x + 10) \geqslant 0. \end{cases}$$

▷ Первое неравенство системы определяет множество точек, лежащих вне и на границе круга с центром в точке $O(0; 0)$ и радиусом $\sqrt{10}$ (рис. 132).

Решив второе неравенство, получим $-\frac{8}{3} \leqslant x \leqslant 4$. Поэтому второе неравенство системы задаёт вертикальную полосу,

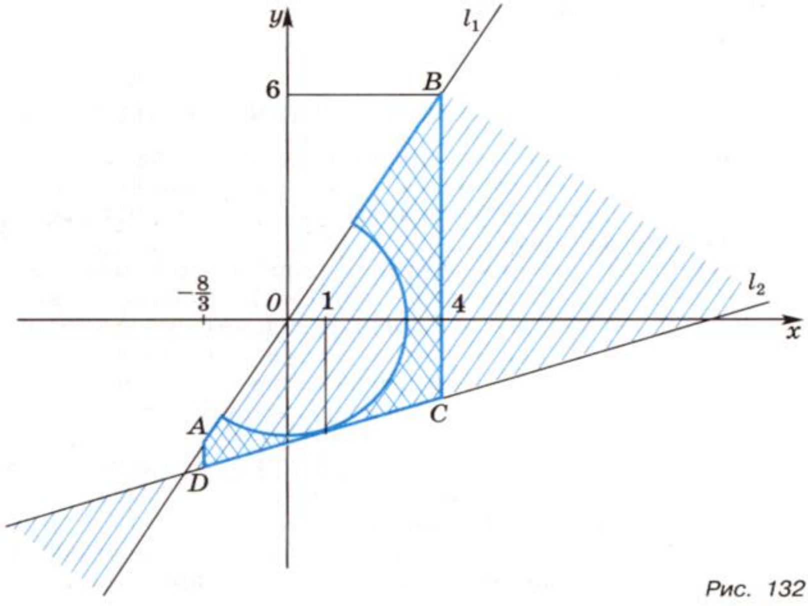


Рис. 132

лежащую между прямыми $x = -\frac{8}{3}$ и $x = 4$ (включая и точки этих прямых).

Наконец, третьему неравенству системы удовлетворяют точки множества M, которое состоит из двух острых вертикальных углов, образованных прямыми $3x - 2y = 0$ и $3y - x + 10 = 0$ (включая и точки этих прямых), так как в точке (4; 0), принадлежащей множеству M, левая часть этого неравенства положительна. Множество M можно увидеть на рисунке 132, где указанные прямые обозначены l_1 и l_2.

Прямая l_1 пересекается с прямыми $x = -\frac{8}{3}$ и $x = 4$ в точках $A\left(-\frac{8}{3}; -4\right)$ и $B(4;\ 6)$, а прямая l_2 пересекается с теми же прямыми в точках $D\left(-\frac{8}{3}; -\frac{38}{9}\right)$ и $C(4;\ -2)$. Далее, прямая l_2 касается окружности $x^2 + y^2 = 10$, так как система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ 3y - x + 10 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение (1; −3); наконец, прямая l_1 проходит через центр этой окружности.

Итак, фигура Φ — это трапеция $ABCD$, из которой удалён полукруг радиуса $\sqrt{10}$ с центром в точке O. Искомая площадь $S = \frac{(AD + BC)h}{2} - 5\pi$, где $AD = \frac{2}{9}$, $BC = 8$, $h = \frac{20}{3}$.

Ответ. $\frac{740}{27} - 5\pi$.

§ 6. Подходы к решению задач с параметрами

Уравнение вида $f(x,\ a) = 0$, которое нужно решить относительно x и в котором буквой a обозначено произвольное («временно неизвестное») действительное число, называют *уравнением с одним параметром*.

В курсах математики, физики, в технике рассматриваются задачи (уравнения, неравенства, системы) с любым числом неизвестных и параметров. Уравнение с двумя параметрами вы рассматривали в 7 классе при изучении линейных уравнений ($ax = b$); в 8 классе исследовали решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, являющегося уравнением с тремя параметрами.

В учебнике 10 класса рассматривались несложные задачи с параметрами. Например, задачи 3 и 4 из § 2, задача 5 из § 6 главы I; задача 11 из § 2 главы VI.

В этом параграфе вы познакомитесь с особенностями и некоторыми методами решения задач с одним параметром.

Уравнения с требованием «Решить для всех значений параметра» решаются непросто из-за того, что при одних значениях параметра уравнения не имеют корней, при других имеют их бесконечно много, при некоторых имеют конкретные значения корней (числовые или выраженные через параметры). Например, уравнение $ax = 3$ при $a \neq 0$ имеет один корень $x = \frac{3}{a}$, при $a = 0$ это уравнение имеет вид $0 \cdot x = 3$ и, очевидно, не имеет корней. Неравенства с параметрами также относятся в школьной программе к непростым задачам.

При решении уравнения (неравенства) с параметром следует искать его корни (решения) для каждого допустимого значения параметра и подробно перечислять найденные корни (решения) в ответе. При решении уравнения (неравенства) с параметром нередко прежде всего находят (если они имеются) *граничные значения параметра* — значения, при которых и (или) при переходе через которые решения уравнения (неравенства) *разветвляются*. Например, для уравнения $(k + 1)x = 0$ граничным значением параметра является $k = -1$, так как при $k = -1$ корнем уравнения является любое число, а при $k \neq -1$ уравнение имеет единственный корень.

Для неравенства $(m - 2)x \leqslant m$ граничным значением параметра m является число 2, так как при $m = 2$ решением неравенства является любое действительное число, при $m > 2$ решениями являются все $x \leqslant \frac{m}{m-2}$, а при $m < 2$ — все $x \geqslant \frac{m}{m-2}$.

Задача 1. Решить уравнение $a(a - 4)x = a$ относительно x.

Граничные значения параметра: $a = 0$ и $a = 4$.

▷ 1) Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$ и любое число является его корнем.

2) Если $a = 4$, то полученное уравнение $0 \cdot x = 4$ не имеет корней.

3) При $a \neq 0$ и $a \neq 4$ уравнение имеет единственный корень $x = \frac{1}{a-4}$.

Ответ. Если $a = 0$, то x — любое число; если $a = 4$, то уравнение не имеет корней; если $a \neq 0$ и $a \neq 4$, то $\frac{1}{a-4}$. ◀

Задача 2. Решить относительно x уравнение

$$\frac{1 - 2mx}{x - 2} = m - 5.$$

▷ Область определения уравнения: $x \neq 2$.

Умножив обе части уравнения на $x - 2$, получим $1 - 2mx = mx - 5x - 2m + 10$, откуда

$$(5 - 3m)x = 9 - 2m.$$

Граничное значение параметра: $m = \frac{5}{3}$.

1) При $m = \frac{5}{3}$ уравнение (2) принимает вид $0 \cdot x = \frac{17}{3}$, оно не имеет корней.

2) Для каждого $m \neq \frac{5}{3}$ корень уравнения $x = \frac{9-2m}{5-3m}$. Так как $x = 2$ не входит в область определения уравнения (1), *необходимо проверить*: нет ли таких значений m, при которых найденное значение x равно 2. Для этого решим уравнение $\frac{9-2m}{5-3m} = 2$. Имеем $9 - 2m = 10 - 6m$, $4m = 1$, $m = \frac{1}{4}$. Таким образом, при $m = \frac{1}{4}$ получаем $x = 2$, значит, при $m = \frac{1}{4}$ уравнение не имеет корней.

Ответ. Если $m = \frac{5}{3}$ или $m = \frac{1}{4}$, то уравнение не имеет корней; если $m \neq \frac{5}{3}$ и $m \neq \frac{1}{4}$, то $x = \frac{9-2m}{5-3m}$. ◀

Задача 3. Решить уравнение $1 + \log_a(1-x) \cdot \log_x a = \frac{2}{\log_a x}$ относительно x.

▷ Данное уравнение после использования формулы перехода логарифмов к основанию x равносильно каждой из систем:

$$\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ 0 < x < 1, \\ 1 + \log_x(1-x) = 2\log_x a; \end{cases} \quad \begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ 0 < x < 1, \\ x(1-x) = a^2. \end{cases}$$

Решая уравнение системы относительно x, получаем $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a^2}}{2}$ при условии $1 - 4a^2 \geqslant 0$, т. е. при $|a| \leqslant \frac{1}{2}$, а с учётом условий системы — при $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$.

Ответ. Если $0 < a \leqslant \frac{1}{2}$, то $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a^2}}{2}$; при $a \leqslant 0$ или $a > \frac{1}{2}$ корней нет. ◀

Задача 4. Решить уравнение $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a + 3 = 0$.

▷ 1) При граничном значении параметра $a = 1$ уравнение принимает вид линейного уравнения $6x + 7 = 0$, имеющего единственный корень $-\frac{7}{6}$.

2) Если $a \neq 1$, то имеет место квадратное уравнение, дискриминант которого $D = 4(2a+1)^2 - 4(a-1)(4a+3) = 4(5a+4)$. Так как дискриминант зависит от a, появляется ещё одно граничное

значение параметра $a=-\frac{4}{5}$ (при котором $D=0$) и решение уравнения ещё раз разветвляется:

а) если $a<-\frac{4}{5}$ (т. е. $D<0$), то уравнение не имеет корней;

б) если $a=-\frac{4}{5}$ (т. е. при $D=0$), то уравнение имеет единственный корень $x=-\frac{1}{3}$;

в) если $a>-\frac{4}{5}$, но $a\neq 1$ (случай $a=1$ рассмотрен в п. 1 решения), то уравнение имеет два корня $x_{1,2}=\frac{-2a-1\pm\sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Ответ. Если $a=1$, то $x=-\frac{7}{6}$; если $a=-\frac{4}{5}$, то $x=-\frac{1}{3}$; если $a<-\frac{4}{5}$, то уравнение не имеет корней; если $-\frac{4}{5}<a<1$ или $a>1$, то $x_{1,2}=\frac{-2a-1\pm\sqrt{5a+4}}{a-1}$. ◀

Задача 5. Решить относительно x уравнение
$25^x+a^2(a-1)5^x-a^5=0$.

▷ Пусть $5^x=t$ $(t>0)$, тогда уравнение примет вид $t^2+a^2(a-1)t-$ $-a^5=0$, или $t^2+(a^3-a^2)t-a^3a^2=0$. Пользуясь теоремой, обратной теореме Виета, находим $t_1=a^2$, $t_2=-a^3$. Так как $t\neq 0$, очевидно, что при $a=0$ уравнение не имеет корней.

Если $a>0$, то корень уравнения находим только из равенства $t_1=a^2$, т. е. $5^x=a^2$, откуда $x=\log_5 a^2$ или $x=2\ \log_5 a$.

Если $a<0$, то либо $5^x=a^2$, либо $5^x=-a^3$. Таким образом, $x=2\log_5(-a)$ или $x=3\log_5(-a)$.

Ответ. Если $a=0$, то корней нет; если $a>0$, то $x=2\log_5 a$; если $a<0$, то $x_1=2\log_5(-a)$, $x_2=3\log_5(-a)$. ◀

Задача 6. Решить уравнение $\sqrt{x^2-1}+x=a$.

▷ Запишем уравнение в виде $\sqrt{x^2-1}=a-x$ и будем решать равносильную ему систему

$$\begin{cases}a-x\geqslant 0,\\ x^2-1=a^2-2ax+x^2,\end{cases}\quad \text{откуда}\quad \begin{cases}a\geqslant x,\\ a^2-2ax+1=0.\end{cases} \qquad (*)$$

Из уравнения системы (*) получаем $2ax=a^2+1$. Это уравнение при $a=0$ не имеет корней, а при $a\neq 0$ имеет один корень $x=\frac{a^2+1}{2a}$. Среди найденных x нужно выбрать те, которые удовлетворяют неравенству системы $a\geqslant x$, т. е. неравенству $a\geqslant\frac{a^2+1}{2a}$. Рассмотрим отдельно случаи $a>0$ и $a<0$:

1) $\begin{cases} a>0, \\ a \geqslant \dfrac{a^2+1}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ 2a^2 \geqslant a^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ a^2 \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ \left[\begin{array}{l} a \leqslant -1, \\ a \geqslant 1, \end{array}\right. \end{cases}$ откуда $a \geqslant 1$;

2) $\begin{cases} a<0, \\ a \geqslant \dfrac{a^2+1}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ 2a^2 \leqslant a^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ a^2 \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ -1 \leqslant a \leqslant 1, \end{cases}$ откуда $-1 \leqslant a < 0$.

При остальных значениях параметра a система (*) не имеет решений, а значит, и исходное уравнение не имеет корней.

Ответ. Если $-1 \leqslant a < 0$ или $a \geqslant 1$, то $x = \dfrac{a^2+1}{2a}$; если $a < -1$, $0 \leqslant a < 1$, то уравнение не имеет корней. ◀

В задачах с параметрами вопросы и задания могут быть отличными от заданий вида «Решить уравнение (неравенство; систему)». Встречаются, например, задания такого типа: «При каких значениях параметра уравнение имеет ровно два корня?», «Найти значения параметра, при которых система уравнений не имеет решений», «Найти значения параметра, при которых все решения уравнения принадлежат отрезку [−2; 2]» и т. п. Такие задачи называют *задачами с частными или с дополнительными условиями*. Нередко они оказываются проще, чем аналогичные задачи, но в которых требуется найти решения для каждого значения параметра.

Рассмотрим несколько задач с частными условиями, решаемых аналитическим методом (которым были решены и задачи 1—6).

Задача 7. При каких значениях m система уравнений
$$\begin{cases} 2x+y=4, \\ mx+3y=5 \end{cases}$$
не имеет решений?

▷ Выразим y из первого уравнения: $y = 4 - 2x$. Подставив это выражение вместо y во второе уравнение, получим $mx + 3(4-2x) = 5$, откуда $(m-6)x = -7$. Это уравнение не имеет корней (а значит, и исходная система не имеет решений) только при $m = 6$.

Ответ. При $m = 6$. ◀

Задача 8. При каких значениях a любое число является решением неравенства $\log_a(x^2+4) > 1$?

▷ Запишем неравенство в виде $\log_a(x^2+4) > \log_a a$. Оно равносильно (с учётом требования задачи) совокупности двух систем:
$$\begin{cases} 0<a<1, \\ x^2+4<a, \\ x \in \boldsymbol{R} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} a>1, \\ x^2+4>a, \\ x \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$
Так как $x^2+4 \geqslant 4$ (при любом x), то первая система не имеет решений, а вторая система имеет решения при $1 < a < 4$.

Ответ. При $1 < a < 4$. ◀

Задача 9. Найти все значения параметра a, при которых не имеет действительных корней уравнение $2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$.

▷ Воспользуемся тем, что $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Запишем уравнение в виде

$$2(2\cos^2 x - 1) - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0,$$

откуда $4\cos^2 x - 4a\cos x + a^2 = 0$ или $(2\cos x - a)^2 = 0$. Последнее равенство выполняется, когда $\cos x = \frac{a}{2}$. Это уравнение (а значит, и исходное) не имеет корней, если $\left|\frac{a}{2}\right| > 1$, т. е. при $|a| > 2$.

Ответ. $a < -2$ и $a > 2$. ◀

Задача 10. При каких значениях параметра a, принадлежащих интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, имеет корни уравнение

$$\sqrt{2\sin(x-a) + \sqrt{3}} = \cos 6x - 1?$$

▷ На области определения уравнения левая его часть принимает неотрицательные значения, а правая — неположительные. Это возможно, когда обе они равны нулю. Таким образом, исходное уравнение равносильно каждой из следующих систем:

$$\begin{cases} 2\sin(x-a) + \sqrt{3} = 0, \\ \cos 6x - 1 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi m}{3}, m \in \mathbf{Z}, \end{cases} \quad \text{откуда } a = \frac{\pi}{3}(m + (-1)n + 3n), m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}.$$

Условию $a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ удовлетворяют лишь следующие значения a: $-\frac{\pi}{3}$; 0; $\frac{\pi}{3}$.

Ответ. $a_1 = -\frac{\pi}{3}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{\pi}{3}$. ◀

Задача 11. Найти значения a, при которых уравнение $(2x - a)\log_2(x-3) = 0$ имеет единственный корень.

▷ При любом a корнем уравнения является $x = 4$, так как $(8-a)\log_2(4-3) = 0$. Кроме $x = 4$, уравнение имеет корни (корень), если

$$\begin{cases} 2x - a = 0, \\ x - 3 > 0, \\ x \neq 4, \end{cases} \quad \text{т. е. когда} \quad \begin{cases} x = \frac{a}{2}, \\ x > 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет второй корень $x = \frac{a}{2}$, если:

$$\begin{cases}\frac{a}{2}>3,\\ \frac{a}{2}\neq 4,\end{cases} \text{ т. е. если } \begin{cases}a>6,\\ a\neq 8.\end{cases}$$

Значит, при $a \leqslant 6$ и $a = 8$ уравнение имеет единственный корень $x = 4$.

Ответ. При $a \leqslant 6$ и $a = 8$. ◀

Задача 12. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2 - ax + 9}{x - 7} = 0$ имеет единственный корень?

▷ Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}x^2 - ax + 9 = 0,\\ x \neq 7.\end{cases}$$

Условия этой системы выполняются в следующих двух случаях:

1) Если квадратное уравнение системы имеет один корень, отличный от 7. Уравнение имеет один корень, если $D = a^2 - 36 = 0$. Отсюда $a = \pm 6$. Корень уравнения при $a = 6$ принимает значение -3, а при $a = -6$ — значение 3. Оба числа отличны от 7.

2) Если квадратное уравнение системы имеет два различных корня, но один из них равен 7, то исходное уравнение будет иметь один корень. Если $x = 7$, то $49 - 7a + 9 = 0$, откуда $a = \frac{58}{7}$. Убеждаемся в том, что при этом значении a второй корень уравнения $x^2 - \frac{58}{7}x + 9$ отличен от 7.

Ответ. При $a = \pm 6$ и $a = \frac{58}{7}$. ◀

Задача 13. Найти все действительные значения a, при которых уравнение $\sin^2 x - 3\sin x + a = 0$ имеет корни.

▷ Пусть $\sin x = t$, при этом $|t| \leqslant 1$. Тогда уравнение примет вид квадратного относительно t: $t^2 - 3t + a = 0$. Это уравнение имеет следующие корни (при условии, что $D = 9 - 4a \geqslant 0$, т. е. при $a \leqslant \frac{9}{4}$): $t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4a}}{2}$. Из этих корней $t_1 = \frac{3 + \sqrt{9-4a}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9-4a}}{2} \geqslant \frac{3}{2}$ не удовлетворяет условию $|t| \leqslant 1$. Выясним, при каких a выполняется условие $-1 \leqslant t_2 \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant \frac{3 - \sqrt{9-4a}}{2} \leqslant 1$: $-2 \leqslant 3 - \sqrt{9-4a} \leqslant 2$, $1 \leqslant \sqrt{9-4a} \leqslant 5$, $1 \leqslant 9 - 4a \leqslant 25$, $-16 \leqslant 4a \leqslant 8$, $-4 \leqslant a \leqslant 2$.

Ответ. $-4 \leqslant a \leqslant 2$. ◀

Задача 14. При каких значениях a неравенство $\frac{x - 2a + 1}{2x + a - 4} > 0$ выполняется при всех значениях x, принадлежащих отрезку $[-1;\ 1]$?

Неравенство верно в двух случаях:

1) $\begin{cases} x-2a+1>0, \\ 2x+a-4>0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x>2a-1, \\ x>2-\dfrac{a}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-2a+1<0, \\ 2x+a-4<0, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x<2a-1, \\ x<2-\dfrac{a}{2}. \end{cases}$

Решениями первой системы являются $x>f(a)$, где $f(a)$ — большее из чисел $2a-1$ и $2-\dfrac{a}{2}$. Решениями второй системы являются $x<g(a)$, где $g(a)$ — меньшее из чисел $2a-1$ и $a-\dfrac{a}{2}$. Поэтому все значения x из отрезка $[-1;\ 1]$ будут решениями первой системы, если левый конец отрезка $x=-1$ будет решением этой системы, т. е. если $\begin{cases} -1>2a-1, \\ -1>2-\dfrac{a}{2}, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} a<0, \\ a>6. \end{cases}$ Эта система не имеет решений, т. е. искомых a нет.

Все x из отрезка $[-1;\ 1]$ будут решениями второй системы, если правый конец отрезка $x=1$ будет решением этой системы, т. е. если $\begin{cases} 1<2a-1, \\ 1<2-\dfrac{a}{2}, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} a>1, \\ a<2. \end{cases}$ Эта система имеет решения $1<a<2$.

Ответ. При $1<a<2$.

Задача 15. Найти все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-a^2\leqslant 6x-4y-13, \\ x^2+y^2-4a^2\leqslant 8y-10x+4a-40 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y+2)^2\leqslant a^2, \\ (x+5)^2+(y-4)^2\leqslant (2a+1)^2. \end{cases}$$

Первому неравенству системы удовлетворяют точки круга (включая его границу) с центром в точке $A(3;\ -2)$ радиуса $|a|$, а второму — точки круга (вместе с его границей) с центром в точке $B(-5;\ 4)$ радиуса $|2a+1|$.

Система имеет единственное решение в случае, когда круги касаются внешним образом, т. е. когда сумма радиусов кругов равна расстоянию AB между их центрами. Так как $AB=$ $=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$, то $|a|+|2a+1|=10$. Это уравнение имеет два корня $a=-\dfrac{11}{3}$ и $a=3$.

Ответ. $a=-\dfrac{11}{3}$, $a=3$.

Задача 15 была решена аналитически, однако для облегчения восприятия условия использовались мысленно-графические образы — окружности, построенные в системе координат xOy. При решении некоторых задач с параметрами бывает полезно иллюстрировать условие с помощью графиков. Такие иллюстрации часто помогают определить число корней уравнения с параметром. Рассмотрим несколько задач, решаемых с помощью функционально-графического метода.

Задача 16. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|x+3|=|2x-a|+1$ имеет единственный корень.

▷ Запишем уравнение в виде $|x+3|-1=|2x-a|$ и построим в одной системе координат (рис. 133) график функции $y=|x+3|-1$ и *семейство* графиков функции $y=|2x-a|$ (бесчисленное множество графиков, полученных из графика функции $y=|2x|$ сдвигами на $\left|\frac{a}{2}\right|$ вдоль оси Ox).

Исходное уравнение будет иметь единственный корень, если вершина «подвижного уголка» (графика функции $y=|2x-a|$) совпадает либо с точкой $A(-4;\ 0)$, либо с точкой $B(-2;\ 0)$. Координаты этих точек должны удовлетворять уравнению $y=|2x-a|$. Таким образом, для решения задачи нужно решить уравнения $0=|2(-4)-a|$ и $0=|2(-2)-a|$, откуда $a=-8$ и $a=-4$.

Ответ. $a=-8$, $a=-4$. ◀

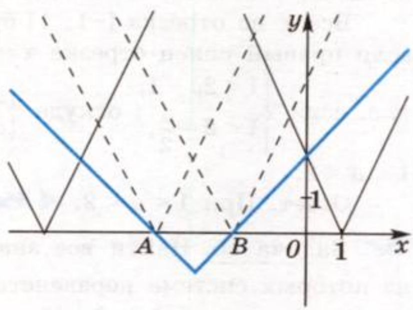


Рис. 133

Задача 17. Для каждого a найти число корней уравнения $\ln^2 x=\frac{a}{x}$.

▷ Исходное уравнение равносильно уравнению $x\ln^2 x=a$. Построим график функции $y=x\ln^2 x$. Эта функция определена и дифференцируема при $x>0$; $y'=\ln^2 x+2\ln x=\ln x(\ln x+2)$; $y'=0$ при $x=1$ и $x=e^{-2}$. Исследуя знаки производной на интервалах $x<e^{-2}$, $e^{-2}<x<1$ и $x>0$, определяем, что $x=e^{-2}$ — точка максимума и $y(e^{-2})=4e^{-2}$; $x=1$ — точка минимума и $y(1)=0$. Схематически график функции $y=x\ln^2 x$ изображён на рисунке 134.

Графики функций $y=a$ — семейство прямых, параллельных оси абсцисс. Из рисунка видно число точек пересечения каждой из прямых $y=a$ с графиком функции $y=x\ln^2 x$. Их число и определяет число корней исходного уравнения.

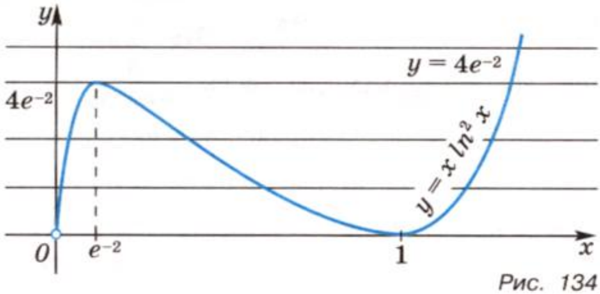


Рис. 134

Ответ. При $a < 0$ уравнение не имеет корней; при $a = 0$ и $a > 4e^{-2}$ уравнение имеет единственный корень; при $a = 4e^{-2}$ — два корня; при $0 < a < 4e^{-2}$ — три корня. ◀

Задача 18. При каком значении a уравнение $\ln(3x+2) = x + 1 + a$ не имеет корней?

▷ В одной системе координат изобразим схематически график функции $f(x) = \ln(3x+2)$ и семейство прямых $g(x) = x + 1 + a$, получаемых из графика функции $y = x + 1$ сдвигом вдоль оси Oy на $|a|$ вверх, если $a > 0$, и на $|a|$ вниз, если $a < 0$ (рис. 135).

Очевидно, что заданное уравнение имеет единственный корень, когда графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют только одну общую точку. Это происходит, когда прямая $g(x) = x + 1 + a$ становится касательной к графику функции $f(x) = \ln(3x+2)$. Найдём абсциссу точки касания этих графиков x_0. Для этого запишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = \ln(3x+2)$ в точке x_0.

$f(x_0) = \ln(3x_0 + 2)$, $\quad f'(x) = \dfrac{3}{3x+2}$, $\quad f'(x_0) = \dfrac{3}{3x_0+2}$. Уравнение касательной для рассматриваемой функции имеет вид

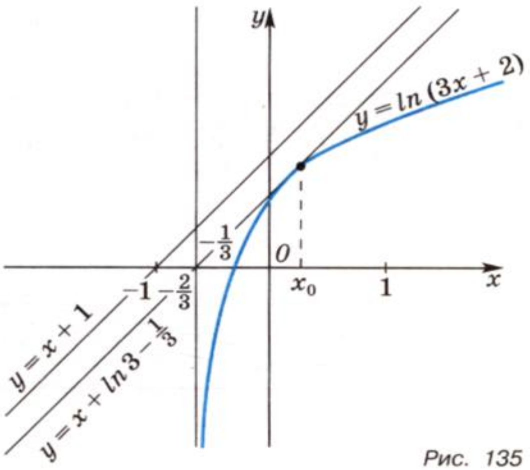


Рис. 135

$y = \frac{3}{3x_0+2}x + \ln(3x_0+2) - \frac{3x_0}{3x_0+2}$. Эта касательная совпадает с прямой $g(x) = 1 \cdot x + (1+a)$, если $\frac{3}{3x_0+2} = 1$ и $\ln(3x_0+2) - \frac{3x_0}{3x_0+2} = 1 + a$. Из первого равенства находим $x_0 = \frac{1}{3}$; подставляя это значение x_0 во второе равенство, находим $a = \ln 3 - \frac{4}{3}$.

Очевидно, что при $a > \ln 3 - \frac{4}{3}$ графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ не имеют общих точек, а значит, исходное уравнение не имеет корней.

Ответ. При $a > \ln 3 - \frac{4}{3}$. ◀

Задача 19. Найти все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x-9} = a(x+7) - 3$ имеет единственный корень.

▷ Полагая $x + 7 = t$, получаем уравнение

$$\sqrt{t-16} = at - 3. \qquad (1)$$

Требуется найти все значения a, при которых графики функций $\sqrt{t-16}$ и $y = at - 3$ имеют при $t \geqslant 16$ единственную общую точку (см. рис. 136).

Если $a \leqslant 0$, то прямая $y = at - 3$ не имеет общих точек с графиком функции $y = \sqrt{t-16}$. Заметим, что угловой коэффициент прямой $y = at - 3$ равен a. Найдём угловые коэффициенты a_1 и a_2 прямых l_1 и l_2 (обе задаются уравнением вида $y = at - 3$), первая из которых проходит через точку (16; 0), а вторая касается графика функции $y = \sqrt{t-16}$. Подставляя в уравнение $y = 3 - at$ значения $t = 16$, $y = 0$, находим $a_1 = \frac{3}{16}$.

Число a_2 является тем значением a, при котором уравнение (1) имеет единственный корень $t_1 > 16$. Возводя обе части (1) в квадрат, получаем уравнение $a^2t^2 - (6a+1)t + 25 = 0$, дискриминант которого $D = (6a+1)^2 - (10a)^2$. Уравнение $D = 0$ имеет единственный положительный корень $a = \frac{1}{4}$. Следовательно, $a_1 = \frac{1}{4}$. Если $\frac{3}{16} \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$, то прямая $y = at - 3$ и график

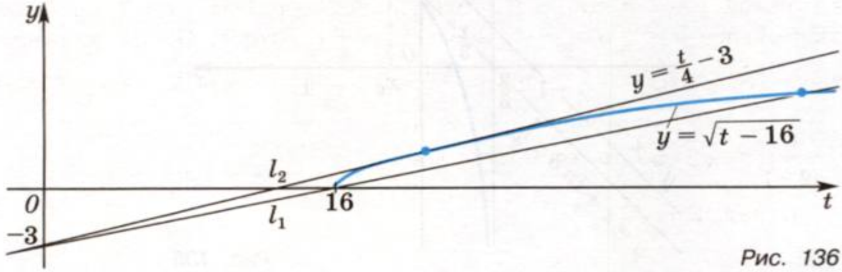


Рис. 136

функции $y = \sqrt{t - 16}$ имеют две общие точки, а при $a > \frac{1}{4}$ они не имеют общих точек.

Ответ. $0 < a < \frac{3}{16}$, $a = \frac{1}{4}$. ◀

Задача 20. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x-1| + |x+1| - 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2ay + 2a = 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

▷ Первое уравнение системы запишем в виде $y = \begin{cases} -x, \text{ если } x \leqslant -1, \\ 1, \text{ если } -1 < x < 1, \\ x, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$ График этой функции изображён на рисунке 137.

Второе уравнение системы, записанное в виде $x^2 + (y - a)^2 = (a - 1)^2$, является при $a \neq 1$ уравнением окружности с центром в точке $(0;\ a)$ радиуса $|a - 1|$. При любых $a \neq 1$ эта окружность проходит через точку $A(0;\ 1)$ и касается прямой $y = 1$ в точке A. При $a = 1$ окружность вырождается в точку A и в этом случае система имеет единственное решение: $(0;\ 1)$.

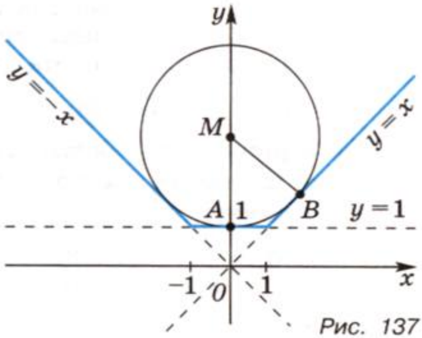


Рис. 137

Если $a < 1$, то окружность лежит ниже прямой $y = 1$; в этом случае система имеет единственное решение: $(0;\ 1)$.

Пусть $a > 1$. Тогда окружность расположена выше прямой $y = 1$, а система будет иметь, кроме решения $(0;\ 1)$, ещё два решения тогда и только тогда, когда окружность касается прямых $y = x$ и $y = -x$. Достаточно рассмотреть одну из этих прямых, например прямую $y = x$.

Если $M(0;\ a)$ — центр окружности радиуса r, касающейся прямой $y = x$ в точке B, то $MA = MB = r$, $OM = r + 1 = a$. Так как прямые $y = x$ и $y = -x$ пересекаются в точке O под прямым углом, то $\angle MOB = \frac{\pi}{4}$, $OM = \frac{BM}{\sin\frac{\pi}{4}}$, т. е. $r + 1 = r\sqrt{2}$, откуда $r = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$, $a = r + 1 = 2 + \sqrt{2}$.

Ответ. $2 + \sqrt{2}$. ◀

Задача 21. При каких значениях a уравнение

$$\sin^2 x + (a+2)\sin x + 3a + 1 = 0 \qquad (1)$$

не имеет корней?

▷ Пусть $\sin x = t$, $|t| \leqslant 1$, тогда уравнение принимает вид

$$t^2 + (a+2)t + 3a + 1 = 0. \qquad (2)$$

Таким образом, задачу можно переформулировать так: «При каких значениях a уравнение (2) не имеет корней на отрезке $[-1;\ 1]$?»

Рассмотрим функцию $f(x) = t^2 + (a+2)t + 3a + 1$. Её график — парабола с ветвями, направленными вверх. Исследуем возможные случаи расположения параболы, удовлетворяющие условию отсутствия точек пересечения её с осью абсцисс на отрезке $[-1;\ 1]$ (см. рис. 138).

1) Парабола лежит выше оси Ot (рис. 138, 1), уравнение корней не имеет, т. е. $D = a^2 + 4a + 4 - 12a - 4 = a(a-8) < 0$, откуда $0 < a < 8$.

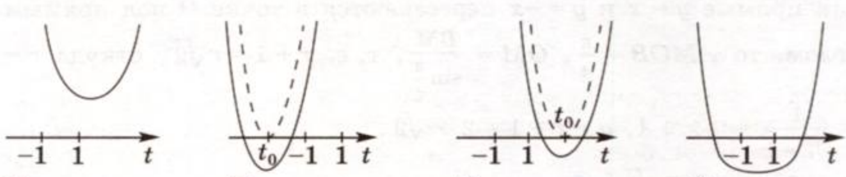
2) Парабола пересекает ось Ot в точках, расположенных левее -1, т. е. оба корня (или единственный корень) уравнения (2) меньше -1 (рис. 138, 2). Эта ситуация описывается условиями: $D = a(a-8) \geqslant 0$, $f(-1) = 2a > 0$, $t_0 = -\frac{1}{2}(a+2) < -1$, где t_0 — абсцисса вершины параболы. Таким образом, для нахождения значений параметра, соответствующего этой ситуации, следует решить систему

$$\begin{cases} a(a-8) \geqslant 0, \\ 2a > 0, \\ -\frac{1}{2}(a+2) < -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geqslant 8, \\ a \leqslant 0, \end{array}\right. \\ a > 0, \\ a > 0, \end{cases} \quad \text{откуда } a \geqslant 8.$$

3) Ситуация, изображённая на рисунке 138, 3 описывается системой

$$\begin{cases} a(a-8) \geqslant 0, \\ f(1) = 4a + 4 > 0, \\ -\frac{1}{2}(a+2) > -1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \geqslant 8, \\ a \leqslant 0, \end{array}\right. \\ a > -1, \\ a < -4. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений.



1) 2) 3) 4)

Рис. 138

4) Парабола пересекает ось абсцисс, но нули функции (рис. 138, 4) лежат вне отрезка $[-1; 1]$. Это возможно, когда $D > 0$, $f(-1) < 0$, $f(1) < 0$ одновременно, т. е. следует решить систему $\begin{cases} a(a-8) > 0, \\ 4a+4 < 0, \\ 2a < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > 8, \\ a < 0, \end{array}\right. \\ a < -1, \\ a < 0, \end{cases}$ откуда $a < -1$.

Ответ. Уравнение (1) не имеет корней, если $a < -1$ и $a > 0$.

§ 7. Упражнения

1. Вычисления и преобразования

685. Найти число, если 42% его равны 12,6.

686. Какой процент составляет 1,365 от 39?

687. Какой процент составляет 46,6 от 11,65?

688. Найти 180% от 7,5.

689. Цена товара была снижена сначала на 24%, а затем на 50% от новой цены. Найти общий процент снижения цены товара.

690. В сплаве содержится 18 кг цинка, 6 кг олова и 36 кг меди. Каково процентное содержание составных частей сплава?

691. Стоимость товара и перевозки составляет 3942 р., причём расходы по перевозке товара составляют 8% стоимости самого товара. Какова стоимость товара без учёта стоимости его перевозки?

692. Высота пирамиды равна 5 см, а площадь её основания равна 4 см^2. На сколько процентов увеличится объём этой пирамиды, если и площадь её основания, и высоту увеличить на 10%?

693. При делении некоторого числа на 72 получится остаток, равный 68. Каким будет остаток, если это же число разделить на 12?

694. Сумма двух чисел равна 1100. Найти наибольшее из них, если 6% одного числа равны 5% другого.

695. По вкладу, вносимому на срок не менее года, Сбербанк выплачивает 3% годовых. Вкладчик внёс в Сбербанк вклад в размере 6000 р. Какую сумму денег он получит в конце второго года со дня вклада? в конце третьего года со дня вклада?

696. По обычному вкладу сбербанк выплачивает 2% годовых. Вкладчик внёс 5000 р., а через месяц снял со счёта 1000 р. Какая сумма денег будет на его счету по истечении года со дня выдачи ему 1000 р.?

697. Выработка продукции за первый год работы предприятия возросла на $p\%$, а за следующий год по сравнению с первоначальной она возросла на 10% больше, чем за первый год. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка продукции за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%.

698. Доказать, что при любом простом $p > 3$ число $p^2 - 1$ делится на 24.

699. Доказать, что при любом натуральном $n > 1$ число $n^4 + 4$ является составным.

700. Доказать что при любом натуральном n:

1) $6n^5 - 11n$ делится на 5;

2) $n^7 - n$ делится на 7.

701. Доказать, что $3^{6^n} - 2^{6^n}$ делится на 35 при $n \in \boldsymbol{N}$.

702. Доказать, что $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120 при $n \in \boldsymbol{N}$.

703. Найти последнюю цифру числа:

1) 9^{9^9}; 2) 2^{3^4}.

704. Найти две последние цифры числа:

1) 2^{999}; 2) 3^{999}.

705. Делится ли на 7 число сочетаний из 1000 элементов по 500?

706. Доказать, что произведение любых n последовательных натуральных чисел делится на $n!$.

707. Найти неизвестный член пропорции:

1) $10 : \frac{1}{8} = x : 1\frac{1}{4}$; 2) $x : 0{,}75 = 9\frac{1}{2} : 14\frac{1}{4}$; 3) $\frac{x}{15} = \frac{1{,}456}{1{,}05}$.

Вычислить (708—712).

708. $\left(\frac{15 \cdot 5^{\frac{1}{2}}}{125^{-\frac{1}{3}}} - 2 \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 49^{\frac{1}{4}}\right)\left(\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} + 45^{\frac{1}{2}}\right) - 183\sqrt{5}$.

709. 1) $\log_{27} 729$; 2) $\log_9 729$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 729$.

710. 1) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[5]{64}$; 2) $\log_8 \log_4 \log_2 16$.

711. 1) $\left(2^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^{\sqrt{8}}$; 2) $\left(2^{\sqrt{27}}\right)^{\sqrt{3}} \cdot 2^{-3}$

712. 1) $\log_3 \frac{9}{\sqrt[5]{3}} + \log_6 \sqrt[5]{36}$; 2) $16^{0{,}5\log_4 10 + 1}$.

713. Найти значение выражения $\sqrt[4]{36^{\log_6 5} - 5^{\log_5 9}}$.

714. Сравнить числа:

1) $2{,}5^{\frac{1}{7}}$ и $2{,}5^{0{,}5}$; 2) $0{,}2^{\frac{2}{3}}$ и $0{,}2^{\frac{3}{4}}$;

3) $\log_{3{,}1}\sqrt{10}$ и $\log_{3{,}1}3$; 4) $\log_{0{,}3}\frac{4}{5}$ и $\log_{0{,}3}\frac{3}{4}$.

715. Какому из промежутков $0 < a < 1$ или $a > 1$ принадлежит число a, если:

1) $a^{0{,}2} > 1$; 2) $a^{-1{,}3} > 1$; 3) $a^{-3{,}1} < 1$;
4) $a^{2{,}7} < 1$; 5) $\log_a 0{,}2 > 0$; 6) $\log_a 1{,}3 > 0$?

716. Какое из чисел больше:

1) $\sqrt{18}$ или $4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{11}}$; 2) $\sqrt[3]{18}$ или $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_6 2 - \frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}} 5}$?

717. Между какими целыми заключено число:

1) $\lg 50$; 2) $\log_2 10$?

718. Сравнить без таблиц и калькулятора числа $\log_3 4$ и $\sqrt[4]{2}$.

719. Доказать тождество $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c = \log_d a$.

Упростить **(720—721)**.

720. 1) $3\sqrt{\frac{5}{9}} - \frac{1}{2}\sqrt{20} + 3\sqrt{180} - 4\sqrt{\frac{125}{4}}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

721. 1) $\sqrt{a^4(9a^2 - 6a + 1)}$; 2) $\sqrt{b^2(4b^4 + 4b^2 + 1)}$.

722. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$; 3) $\frac{12}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}$; 4) $\frac{8}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$.

723. Освободиться от иррациональности в числителе дроби:

1) $\frac{\sqrt{5}}{10}$; 2) $\frac{3\sqrt{6}}{6}$; 3) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$.

724. Записать в виде обыкновенной дроби число:

1) 0,(4); 2) 2,(7); 3) 0,(21);
4) 1,(36); 5) 0,3(5); 6) 0,21(3).

725. Записать в виде десятичной периодической дроби число:

1) $\frac{5}{6}$; 2) $2\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) $5\frac{2}{11}$.

726. Может ли быть рациональным числом:

1) сумма двух положительных иррациональных чисел;
2) произведение двух иррациональных чисел;
3) частное от деления суммы двух неравных иррациональных положительных чисел на их произведение?

727. Доказать, что если a и b — натуральные числа и $\sqrt{ab}$ — рациональное число, то $\sqrt{\frac{a}{b}}$ также рациональное число, а если $\sqrt{ab}$ — иррациональное число, то и $\sqrt{\frac{a}{b}}$ — иррациональное число.

728. Пусть a — рациональное число, b — иррациональное число, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Доказать, что $a + b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$ — иррациональные числа.

729. Имеют ли общие точки промежутки:

1) $\left[1; 3\sqrt{2} + 2\sqrt{7}\right]$ и $\left[3\sqrt{3} + 4; 15\right]$;

2) $\left(0; \sqrt{27} + \sqrt{6}\right)$ и $\left(\sqrt{48} - 1; 10\right)$;

3) $\left[2; 2\sqrt{5} + 2\sqrt{6}\right]$ и $\left(3\sqrt{2} + \sqrt{22}; 11\right)$;

4) $\left[1; 1 + \sqrt{3}\right]$ и $\left(\frac{2}{\sqrt{3} - 1}; 4\right)$?

730. Пусть $0 < a < b$. Доказать, что на числовой оси:

1) точка $\frac{a+b}{2}$ — середина отрезка $[a; b]$;

2) точка $\frac{a+bc}{1+c}$, где $c > 0$, лежит внутри отрезка $[a; b]$.

731. Выполнить действия:

1) $(-3 + 2i)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right)$;
2) $\left(-5 + \sqrt{2}i\right)\left(-6 - 3\sqrt{2}i\right)$;

3) $(1 + i)(-1 + 2i) + 1 - 3i$;
4) $(3 - 2i)(4 + i) + 10i$;

5) $\frac{(3 - i)(1 + 3i)}{2 - i}$;
6) $\frac{2 - 3i}{(1 - i)(3 + i)}$;

7) $\frac{3}{2 - 3i} + \frac{3}{2 + 3i}$;
8) $\frac{2 - 3i}{2 + i} + \frac{2 + 3i}{2 - i}$.

732. Вычислить:

1) $(2 - i)^3$;
2) $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^4$;

3) $(2 + 3i)^2 - (2 - 3i)^2$;
4) $(3 + 4i)^2 + (3 - 4i)^2$.

733. На комплексной плоскости построить точки:

1) 5; 2) $2i$; 3) $-3i$; 4) $3 + 2i$; 5) $-2 + i$; 6) $-1 + i$.

734. Доказать равенство

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0.$$

735. Доказать, что для любых комплексных чисел z_1 и z_2 справедливо равенство $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

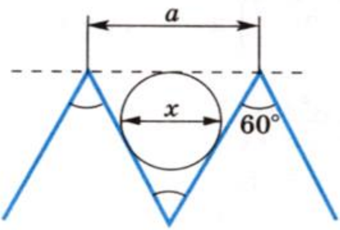


Рис. 139

Рис. 140

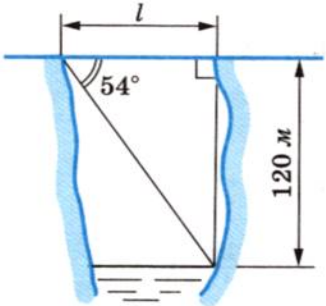


Рис. 141

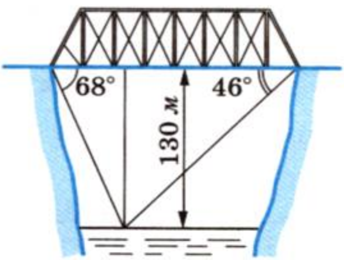


Рис. 142

736. Вычислить:

1) $i^5 + i^3 + i^7$; 2) $i^4 + i^6 + i^8$.

737. Найти значение выражения:

1) $\dfrac{A_{11}^3 - A_{10}^2}{A_9^1}$; 2) $\dfrac{A_{12}^4 \cdot A_7^7}{A_{11}^9}$; 3) $\dfrac{A_6^3}{P_4} + \dfrac{A_{11}^6}{11P_6}$; 4) $\left(\dfrac{C_{11}^7}{10} - \dfrac{C_5^2}{10}\right)\dfrac{P_6}{A_6^4}$.

738. 1) Вычислить диаметр x круга, вписанного в равносторонний треугольник (рис. 139), если $a = 6$ см.

2) Вычислить угол α заготовки, изображённой на рисунке 140, если $a = 4$ см.

739. Вычислить ширину l ущелья по данным, указанным на рисунке 141.

740. Вычислить длину моста по данным, указанным на рисунке 142.

741. Найти числовые значения всех остальных тригонометрических функций по данному значению одной из них, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$:

1) $\cos\alpha = 0{,}8$; 2) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{7}{24}$.

742. Вычислить:

1) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$.

743. Разложить на множители многочлен:

1) $4x^4+4x^3-25x^2-x+6$; 2) $x^4-2x^3-14x^2-6x+5$.

744. Сократить дробь:

1) $\dfrac{x^3+2x^2+9}{x^3-2x^2+4x-3}$; 2) $\dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{2x^3+x^2+1}$;

3) $\dfrac{x^4-2x^3+x-2}{2x^4-3x^3-x-6}$; 4) $\dfrac{2x^4-3x^3-7x^2-5x-3}{2x^3-5x^2-2x-3}$.

745. Найти разложение бинома:

1) $(x-1)^5$; 2) $(a+3)^4$.

Упростить выражение **(746—748)**.

746. 1) $\dfrac{a+2}{a-2}\cdot\left(\dfrac{2a^2-a-3}{a^2+5a+6}:\dfrac{2a-3}{a-2}\right)$;

2) $\left(2+\dfrac{1}{b}\right):\dfrac{8b^2+8b+2}{b^2-4b}\cdot\dfrac{2b+1}{b}$.

747. 1) $\dfrac{a}{a^2-1}+\dfrac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}+\dfrac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1}-\dfrac{2a^3}{a^4-1}$;

2) $\dfrac{1}{a^2+5a+6}+\dfrac{2a}{a^2+4a+3}+\dfrac{1}{(a+1)^2+a+1}-\dfrac{2}{a+3}$.

748. 1) $\dfrac{1}{4+4\sqrt{a}}-\dfrac{1}{2-2a}+\dfrac{1}{4-4\sqrt{a}}$; 2) $\dfrac{a\sqrt{2}+a-\sqrt{2}-1}{a\sqrt{2}-2-\sqrt{2}+2a}$.

749. Упростить выражение и найти его значение:

1) $\left(1+\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\right)\cdot\left(1-\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\right)$ при $a=5$, $x=4$;

2) $\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$ при $a=3$, $x=\sqrt{5}$.

Упростить выражение **(750—756)**.

750. 1) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{1-x^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}-x}\right)$;

2) $\dfrac{m+2m^{\frac{1}{2}}+1}{2m^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\dfrac{2m^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}-1}-\dfrac{4m^{\frac{1}{2}}}{m-1}\right)$.

751. 1) $6n\cdot\sqrt{\dfrac{m}{2n}}\cdot\sqrt{18mn}$; 2) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}$.

752. 1) $\left(\frac{a\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}+\sqrt{a}\right):\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$; 2) $\left(\frac{1+b\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}-\sqrt{b}\right)\cdot\frac{1+\sqrt{b}}{1-b}$.

753. $\frac{a^{-1}b^{-2}-a^{-2}b^{-1}}{a^{-\frac{5}{3}}b^{-2}-b^{-\frac{5}{3}}a^{-2}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$.

754. 1) $\left(\frac{a+\sqrt{ab}}{\sqrt{a^2+ab}}-\frac{\sqrt{ab+b^2}}{\sqrt{ab}+b}\right)^{-2}-\frac{\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}}{2ab}$;

2) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{2\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^3}$.

755. $\left(\frac{9a-25a^{-1}}{3a^{\frac{1}{2}}-5a^{-\frac{1}{2}}}-\frac{a+7+10a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}+2a^{-\frac{1}{2}}}\right)^4$.

756. $\left(\frac{3\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b^4}-9\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}-\frac{9}{\sqrt{b}}}\right)^{-2}-(b^2+18b+81)^{0,5}$.

757. Доказать, что

$$\log_c\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\log_c a+\log_c b),$$

если $a>0$, $b>0$, $a^2+b^2=7ab$, $c>0$, $c\neq1$.

758. Доказать, что

$$\log_c\frac{2a+3b}{5}=\frac{\log_c a+\log_c b}{2},$$

если $a>0$, $b>0$, $13ab=4a^2+9b^2$, $c>0$, $c\neq1$.

759. Выразить $\log_8 9{,}8$ через a и b, если $\lg 2=a$ и $\lg 7=b$.

760. Выразить $\log_{\sqrt{3}}8$ через a, если $\log_{12}3=a$.

761. Упростить:

1) $\frac{1+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}$; 2) $(1+\mathrm{tg}\,\alpha)(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)-\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

762. Доказать тождество $\frac{1-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha}=2\mathrm{tg}^2\alpha$.

Упростить выражение **(763—764)**.

763. 1) $\sin^2(\alpha+8\pi)+\cos^2(\alpha+10\pi)$;
2) $\cos^2(\alpha+6\pi)+\cos^2(\alpha-4\pi)$.

764. $\dfrac{\sin 2\alpha}{2(1-2\cos^2\alpha)}+\dfrac{\sin\alpha\cos(\pi-\alpha)}{1-2\sin^2\alpha}$.

765. Доказать тождество

$$\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}-\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=-\sin x-\cos x.$$

766. Разложить на множители:

1) $1+\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $1-\cos\alpha-\sin\alpha$;
3) $3-4\sin^2\alpha$; 4) $1-4\cos^2\alpha$.

767. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то:

1) $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

2) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

768. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha=2$. Найти значение выражения:

1) $\dfrac{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+3\cos\alpha\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{2-\sin^2\alpha}{3+\cos^2\alpha}$.

769. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=3$. Найти $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$.

Упростить выражение **(770—774)**.

770. 1) $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 2) $\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$.

771. 1) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$; 2) $\dfrac{\sin\alpha+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{3\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sqrt{3}\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; 4) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.

772. 1) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$; 2) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$; 4) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2$.

773. 1) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}$;

3) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$; 4) $\dfrac{2\sin 2\alpha+\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha}$.

774. 1) $\dfrac{\sin 2\alpha+\cos 2\alpha+2\sin^2\alpha}{\sin(-\alpha)-\sin(2{,}5\pi+\alpha)}$; 2) $\dfrac{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha-2\cos^2\alpha}{\cos(-\alpha)-\cos(2{,}5\pi+\alpha)}$.

775. Доказать тождество:

1) $\dfrac{1-\cos(2\pi-2\alpha)}{1-\cos^2(\alpha+\pi)}=2$; 2) $\dfrac{\sin^2(\alpha+90^\circ)}{1+\sin(-\alpha)}=1+\cos(\alpha-90^\circ)$.

Упростить выражение (776—781).

776. $\dfrac{5\cos x-3\sin x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin(-x)}-\dfrac{\sin 2x-8\sin^2 x}{\cos 2x}$.

777. $\sin(x-2\pi)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+\operatorname{tg}(\pi-x)\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)$.

778. 1) $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$;
2) $\sin^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$.

779. 1) $\dfrac{\cos 4\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

780. 1) $\dfrac{4\sin^2\alpha-\sin^2 2\alpha}{4-4\sin^2\alpha-\sin^2 2\alpha}$; 2) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha-1}{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2 2\alpha}$.

781. 1) $\dfrac{\sqrt{2}-\cos x-\sin x}{\sin x-\cos x}$; 2) $\dfrac{1+\cos x+\sin x+\operatorname{tg} x}{\sin x+\cos x}$.

782. Вычислить $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{3}{4}$.

783. Упростить выражение

$$\frac{2-3\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}-\frac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

и найти его числовое значение при $\alpha=-\dfrac{\pi}{8}$.

Доказать тождество (784—790).

784. $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$.

785. 1) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; 2) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

786. 1) $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$;
2) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$.

787. 1) $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$; 2) $1-\operatorname{ctg}^2\alpha=-\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

788. $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha=4\cos\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

789. 1) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\dfrac{1}{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=1+\dfrac{\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)^2}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$;
3) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$; 4) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

790. 1) $4\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\sin 3x;$

2) $\cos 3x\cos 6x\cos 12x=\frac{\sin 24x}{8\sin 3x}.$

791. Записать в тригонометрической форме число:

1) $2;$ 2) $-3;$ 3) $3i;$ 4) $-2i;$ 5) $\sqrt{3}-i;$ 6) $2-2i.$

792. Записать в алгебраической форме комплексное число:

1) $4\left(\cos\frac{7\pi}{3}+i\sin\frac{7\pi}{3}\right);$ 2) $6\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right).$

793. Выполнить действия и записать результат в алгебраической форме:

1) $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right);$

2) $(1+i)\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right);$

3) $\dfrac{\cos\frac{7\pi}{10}+i\sin\frac{7\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}};$ 4) $\dfrac{i}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}.$

2. Уравнения

794. Решить уравнение:

1) $\frac{3x-16}{12}+1=\frac{x+6}{4}-\frac{x+3}{6};$

2) $\frac{5}{3}(x-7)-3x-\frac{6(x-8)}{7}=-\left(x+\frac{43}{3}\right).$

795. При каком значении a уравнение $a(x-3)+8=13(x+2)$ имеет корень, равный 0?

796. При каком значении b уравнение $1-b(x+4)=2(x-8)$ имеет корень, равный 1?

Решить уравнение **(797—806)**.

797. 1) $\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x-3}=\frac{4}{x^2-9};$ 2) $\frac{5}{x-2}+\frac{2}{x-4}=\frac{11}{x^2-6x+8}.$

798. 1) $(a-b)x=a^2+(a+b)x;$ 2) $a^2x=a+b+b^2x.$

799. 1) $(x-3)(x-2)=6(x-3);$ 2) $x^2-\frac{11x}{6}+\frac{1}{2}=0.$

800. 1) $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=0;$ 2) $\frac{2x^2}{3x+1}-3=\frac{3x-21}{3x+1}$

801. 1) $\frac{3x-1}{x+2}-\frac{7}{2+x}=\frac{7x^2-28}{x^2-4}+\frac{18}{2-x};$

2) $\frac{x+1}{x+3}-\frac{12}{x^2-9}=\frac{2-x}{3-x}.$

802. 1) $\frac{2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x-1}{x^3+1}$; 2) $\frac{2x^2}{x-1}-\frac{3x}{x+2}=\frac{2(4x-1)}{x^2+x-2}$.

803. 1) $\frac{3x}{2x-1}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{3}{2-3x-2x^2}$; 2) $\frac{4x^2}{x+2}-\frac{10}{x+2}+4=0$.

804. 1) $x^4-11x^2+30=0$; 2) $2x^4-5x^2+2=0$.

805. 1) $2x^{-2}+4x^{-1}+3=0$; 2) $(x^2-x)^2+12=8(x^2-x)$.

806. 1) $x^2+ax-b^2+\frac{a^2}{4}=0$; 2) $\frac{2x}{2x-a}-\frac{x}{2x+a}=\frac{5a^2}{4x^2-a^2}$.

807. Решить относительно n уравнение:

1) $\frac{2P_{n-1}}{P_{n+1}}=1$; 2) $A_{n+1}^2=156$;

3) $C_n^3=\frac{4}{15}C_{n+2}^4$; 4) $12C_{n+3}^{n-1}=5A_{n+1}^2$.

808. При каком условии трёхчлен ax^2+bx+c является квадратом двучлена?

809. Доказать, что корни уравнения $ax^2+bx+a=0$ есть взаимно обратные числа, если $a\neq 0$.

Решить уравнение (810—811).

810. 1) $|2x-3|=7$; 2) $|x+6|=2x$; 3) $2x-7=|x-4|$.

811. 1) $|6-2x|=3x+1$; 2) $2|x-2|=|x|-1$.

812. Найти наименьший корень уравнения

$$|x^2-3x-6|=2x.$$

813. Найти наибольший рациональный корень уравнения

$$|x^2-8x+5|=2x.$$

Найти действительные корни уравнения (814—820).

814. 1) $x^3-3x^2+x=3$; 2) $x^3-3x^2-4x+12=0$;

3) $x^3-5x^2+8x-6=0$; 4) $x^4-3x^3-2x^2-6x-8=0$;

5) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3=0$;

6) $2x^4-2x^3-11x^2-x-6=0$.

815. 1) $(2x+1)(3x+2)(6x+1)(x+1)=210$;

2) $(x+1)(x+2)(x-2)(x-3)=10$.

816. 1) $(x-1)(x-3)(x+2)(x+6)=72x^2$;

2) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-6)=36x^2$.

817. 1) $(x^2-5x+4)(x^2+9x+18)=100$;

2) $(x^2-3x+2)(x^2-7x+12)=4$.

818. 1) $(x^2 - x - 2)^2 + (x^2 - x - 2)(x + 3) = 20(x + 3)^2$;

2) $4(x^2 - 4x + 1)^2 + 10(x - 2)^2 = 13(x^2 - 4x + 1)(x - 2)$.

819. 1) $\frac{x^2 - x + 3}{x^2 - x + 1} + \frac{x^2 - x - 4}{x^2 - x + 2} = 5$; 2) $\frac{x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1} + \frac{x^2 + x + 6}{x^2 + x + 3} = 4$.

820. 1) $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}$; 2) $\left(2x - \frac{3}{x}\right) + \left(4x^2 + \frac{9}{x^2}\right) = 42$.

821. Пересекает ли график функции $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ось Ox в точках, абсциссы которых являются целыми числами?

822. Уравнение $2x^3 + mx^2 + nx + 12 = 0$ имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Найти третий корень этого уравнения.

823. Могут ли корни уравнения $(x - m)(x - n) = k^2$ быть чисто мнимыми, если m, n и k — действительные числа?

Решить уравнение (z — комплексное число) **(824—828)**.

824. 1) $z^2 + 4z + 19 = 0$; 2) $z^2 - 2z + 3 = 0$.

825. 1) $z(2 + i) - 7 = 3i$; 2) $5i - z(3 - 2i) = -1$.

826. 1) $|z| + iz = 2 - i$; 2) $|z| - iz = 3 + 2i$.

827. 1) $z^2 + 3 = 0$; 2) $9z^2 = 125$;

3) $z^2 - 4z + 5 = 0$; 4) $z^2 - 8z + 41 = 0$.

828. 1) $z^2 - 25i = 0$; 2) $z^2 = -8 + 6i$;

3) $z^3 + 8 = 0$; 4) $z^4 - 1 = 0$.

829. Найти все целые числа, равные сумме квадратов своих цифр.

830. Решить в целых числах уравнение:

1) $2x^2y^2 - 14y^2 = 25 - x^2$;

2) $3x^2 - 8xy - 16y^2 = 19$.

831. Найти все пары целых чисел, сумма которых равна их произведению.

Решить уравнение **(832—835)**.

832. 1) $\sqrt{2x + 7} = x + 2$; 2) $x = 2 - \sqrt{2x - 5}$; 3) $\sqrt{x^4 - 3x - 1} = x^2 - 1$.

833. 1) $2\sqrt{x + 4} - \sqrt{1 - x} = \sqrt{x + 5}$; 2) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{3 - 2x} = \sqrt{x^2 - 1}$.

834. 1) $\sqrt[3]{x^6 - 26} + 2\sqrt[6]{x^6 - 26} = 3$; 2) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x + 2} = 0$.

835. 1) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{25 + 10x + x^2} = 8$;

2) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 5$;

3) $\sqrt[3]{(8 - x)^2} - \sqrt[3]{(8 - x)(27 + x)} + \sqrt[3]{(27 + x)^2} = 7$;

4) $\sqrt[4]{8 - x} - \sqrt[4]{89 + x} = 5$.

836. Найти все числа a, для которых выполняется условие $4 \cdot 2^{3a} = 0{,}25^{\frac{a^2}{2}}$.

Решить уравнение (**837—857**).

837. 1) $3^{x-7} = 81$; 2) $2^{x^2-5x+6,5} = \sqrt{2}$; 3) $\left(\frac{1}{4} \cdot 4^x\right)^x = 2^{2x+6}$.

838. 1) $9^{5x} - 9^{5x-1} = 8$; 2) $2^{x+4} - 2^x = 120$;
3) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 155$; 4) $3^{2x} - 2 \cdot 3^{2x-1} - 2 \cdot 3^{2x-2} = 1$;
5) $7^x - 7^{x-1} = 6$; 6) $3^{x+2} + 3^x = 10$.

839. 1) $5^{2x+5} \cdot 7^{3x+1} = 35^{\frac{1}{2}(5x+6)}$; 2) $0{,}2^{x^2} \cdot 5^{2x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^6$.

840. 1) $2{,}4^{3-2x} = 2{,}4^{3x-2}$; 2) $\left(\frac{5}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{8}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{-x}$.

841. 1) $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$; 2) $\sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[3]{3^x} = 216$.

842. 1) $3^{2x} - 3^x = 72$; 2) $4^x - 2^{x+1} = 48$.

843. 1) $0{,}5^x = 2x + 1$; 2) $2^x = 3 - x^2$; 3) $\log_3 x = 4 - x$;
4) $\log_{\frac{1}{2}} x = 4x^2$; 5) $2x = \log_{0,5} x$; 6) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \log_3 x$.

844. 1) $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$; 2) $(\log_3 x)^2 + 5 = 2\log_3 x^3$.

845. 1) $\ln\frac{2}{x+1} = \ln(x+2)$; 2) $\log_3\sqrt{3x-6} - \log_3\sqrt{x-3} = 1$.

846. 1) $\lg\left(\frac{1}{2} + x\right) = \lg\frac{1}{2} - \lg x$; 2) $2\lg x = -\lg\frac{1}{6-x^2}$.

847. 1) $\log_2(2x-18) + \log_2(x-9) = 5$;
2) $\lg(x^2+19) - \lg(x+1) = 1$.

848. 1) $5^{\log_3 x^2} - 6 \cdot 5^{\log_3 x} + 5 = 0$; 2) $25^{\log_3 x} - 4 \cdot 5^{\log_3 x + 1} = 125$.

849. 1) $x^{\lg x} = 10$; 2) $x^{\log_3 x} = 9x$;
3) $x^{\lg x} - 1 = 10(1 - x^{-\lg x})$; 4) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.

850. 1) $7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0$;
2) $5^{x+4} + 3 \cdot 4^{x+3} = 4^{x+4} + 4 \cdot 5^{x+3}$.

851. 1) $\log_4(2 + \sqrt{x+3}) = 1$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2 - 2x} = -\frac{1}{2}$;
3) $\frac{1}{2}\log_3(x+1) = \log_3\sqrt{x+4} - 2\log_3\sqrt{2}$.

852. 1) $x^{1+\lg x} = 10x$; 2) $x^{\lg x} = 100x$;
3) $\log_2(17 - 2^x) + \log_2(2^x + 15) = 8$;
4) $\log_2(3 + 2^x) + \log_2(5 - 2^x) = 4$.

853. 1) $9 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot 6^{\frac{1}{x}} = 4 \cdot 9^{\frac{1}{x}}$;

2) $\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0$;

3) $2\log_2 x - 2\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{\log_2 x}$;

4) $\log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2$.

854. 1) $1 + \log_x(5 - x) = \log_7 4 \cdot \log_x 7$;

2) $(\log_9(7 - x) + 1)\log_{3-x} 3 = 1$.

855. 1) $\log_3 3x + \log_3(4x + 1) = \log_{4x^2+x} 9$;

2) $\log_2 \frac{x}{2} + \log_2(21x - 2) = 2\log_{21x^2-2x} 8$.

856. 1) $\log_{\sqrt{6}} \operatorname{ctg} x = 1 + \log_6\left(\frac{3}{2} - \cos 2x\right)$;

2) $\log_{27}\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\cos x\right) = \frac{1}{3} + \log_3(-\cos x)$.

857. 1) $\log_3(\sin 3x - \sin x) = 2\log_9(17\sin 2x) - 1$;

2) $\log_{\sqrt{7}}(\sin x - \cos x) + 1 = \log_7(7 + 3\cos 4x)$.

858. Найти все решения уравнения, удовлетворяющие данному неравенству:

1) $\sqrt{7 - \log_{\sqrt{3}}(3x^2 - 24x)} = \log_9(x^2 - 8x)$, $\sin x < \operatorname{tg} 2x$;

2) $\sqrt{\log_{\frac{1}{6}}\left(x^2 + \frac{1}{6}x\right) \cdot \log_{36x^2+6x} 6} = 1$, $\sin x > \operatorname{tg} 6x$.

859. Решить уравнение $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ и указать любой его положительный корень.

860. С помощью графика синуса или косинуса найти все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-\pi; 3\pi]$:

1) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решить уравнение **(861—876)**.

861. 1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $2\operatorname{tg} x + 5 = 0$.

862. 1) $3\cos^2 x - 5\cos x - 12 = 0$; 2) $3\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 5 = 0$.

863. 1) $(3 - 4\sin x)(3 + 4\cos x) = 0$; 2) $(\operatorname{tg} x + 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$.

864. 1) $\sin 2x = 3\sin x\cos^2 x$; 2) $\sin 4x = \sin 2x$;

3) $\cos 2x + \cos^2 x = 0$; 4) $\sin 2x = \cos^2 x$.

865. 1) $\sin 2x = 3\cos x$; 2) $\sin 4x = \cos^4 x - \sin^4 x$;

3) $2\cos^2 x = 1 + 4\sin 2x$; 4) $2\cos x + \cos 2x = 2\sin x$.

866. 1) $\cos x + \cos 2x = 0$; 2) $\cos x - \cos 5x = 0$;

3) $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x$; 4) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

867. 1) $2\cos x + \sin x = 0$; 2) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$.

868. 1) $4\sin^4 x + \sin^2 2x = 2$; 2) $\sin^4 \frac{x}{3} + \cos^4 \frac{x}{3} = \frac{5}{8}$.

869. 1) $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$; 2) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$;
3) $8\sin x \cos 2x \cos x = \sqrt{3}$; 4) $4\sin x \cos x \cos 2x = \cos 4x$.

870. 1) $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x = \cos 2x$;
2) $2\sin^2 x - \cos^4 x = 1 - \sin^4 x$.

871. 1) $\sin x + \sin 5x = \sin 3x$; 2) $\cos 7x - \cos 3x = 3\sin 5x$.

872. 1) $\cos x \sin 9x = \cos 3x \sin 7x$; 2) $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x$.

873. 1) $5 + \sin 2x = 5(\sin x + \cos x)$;
2) $2 + 2\cos x = 3\sin x \cos x + 2\sin x$.

874. 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;
2) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$;
3) $\cos x \cos 3x = -0{,}5$.

875. 1) $\operatorname{tg}^2 3x - 4\sin^2 3x = 0$; 2) $\sin x \operatorname{tg} x = \cos x + \operatorname{tg} x$;
3) $\operatorname{ctg} x\left(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}\right) = 1$; 4) $4\operatorname{ctg}^2 x = 5 - \frac{9}{\sin x}$.

876. 1) $\operatorname{tg} 2x = 3\operatorname{tg} x$; 2) $\operatorname{ctg} 2x = 2\operatorname{ctg} x$;
3) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2$; 4) $\operatorname{tg}(2x + 1)\operatorname{ctg}(x + 1) = 1$.

877. Решить графически уравнение:
1) $\cos x = 3x - 1$; 2) $\sin x = 0{,}5x^3$;
3) $\cos x = \sqrt{x}$; 4) $\cos x = x^2$.

Решить уравнение **(878—881)**.

878. 1) $\cos\sqrt{2 - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin\frac{5\pi}{4}x = x^2 - 4x + 5$.

879. 1) $\cos^3 x - 3\cos^2 x + \cos x + \sin 2x = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$;
2) $\operatorname{ctg} x + \sin 2x = \operatorname{ctg} 3x$.

880. 1) $\sin x + \cos x = \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}$; 2) $\sqrt{5\sin 2x - 2} = \sin x - \cos x$.

881. 1) $\frac{2\sin x}{\cos x - \cos 3x} - \frac{1}{3} = 4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
2) $\frac{\sin 3x - 2\cos 2x - 1}{1 - \sin x} = |\sin x|$.

882. Найти все корни уравнения $\cos x + (1 + \cos x)\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x > 0$.

883. Найти все корни уравнения $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2\frac{25\pi}{6}$, удовлетворяющие неравенству $\lg(x - \sqrt{2x + 23}) > 0$.

884. Найти наибольший на интервале $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ корень уравнения $\cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin x \cos 2x = 0$.

885. Найти все значения a, при которых уравнение
$$\sin^8 x + \cos^8 x = a$$
имеет корни, и решить это уравнение.

3. Неравенства

886. При каких значениях x положительна дробь:

1) $\frac{5x-4}{7x+5}$; 2) $\frac{3x+10}{40-x}$; 3) $\frac{x+2}{5-4x}$; 4) $\frac{8-x}{6+3x}$?

887. При каких значениях x отрицательна дробь:

1) $\frac{3-2x}{3x-2}$; 2) $\frac{10-4x}{9x+2}$; 3) $\frac{18-7x}{-4x^2-1}$?

Решить неравенство (888—895).

888. 1) $\frac{5x+4}{x-3} < 4$; 2) $\frac{2}{x-4} < 1$; 3) $\frac{2}{x+3} \leqslant 4$.

889. 1) $8x^2 - 2x - 1 < 0$; 2) $5x^2 + 7x \leqslant 0$.

890. 1) $\frac{x^2-9}{x^2-4} < 0$; 2) $(2x^2+3)(x+4)^3 > 0$.

891. 1) $\frac{3x-15}{x^2+5x-14} \geqslant 0$; 2) $\frac{x-1}{x^2+4x+2} < 0$;

3) $\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x-3} > 0$; 4) $\frac{(x-5)\left(\frac{1}{2^{x-1}+0,2}\right)}{x+2} \leqslant 0$.

892. 1) $|2x-5| \leqslant 3$; 2) $|5x-9| > 4$;
3) $|2-3x| < x+1$; 4) $|1+2x| \geqslant 3-x$.

893. 1) $|x-1|(x^4-2x^2-3) \geqslant 0$; 2) $|x^2-9|(x^4-2x^2-8) \leqslant 0$.

894. 1) $|2x-3| < x$; 2) $|4-x| > x$;
3) $|x^2-7x+12| \leqslant 6$; 4) $|x^2-3x-4| > 6$;
5) $|2x^2-x-1| \geqslant 5$; 6) $|3x^2-x-4| < 2$.

895. $\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^3+6x^2+5x-12} > 0$.

896. Найти все значения a, для которых является верным при всех значениях x неравенство:

1) $\frac{8x^2-4x+3}{4x^2-2x+1} \leqslant a$; 2) $\frac{3x^2-4x+8}{9x^2-12x+16} \geqslant a$.

897. При каких значениях x выражение
$$\lg(x^2+8x+15)$$
не имеет смысла?

898. При каком наименьшем целом значении m уравнение
$$(m-1)x^2-2(m+1)x+m-3=0$$
имеет два различных действительных корня?

899. При каких целых значениях m уравнение
$$(m-7)x^2+2(m-7)x+3=0$$
не имеет действительных корней?

900. При каком наибольшем целом значении x выражение
$$\frac{\frac{1}{2}x^2+3}{x^2-9x+14}$$
принимает отрицательное значение?

901. При каком наименьшем целом значении x выражение
$$\frac{x^2-x-6}{-7-x^2}$$
принимает положительное значение?

902. Найти все пары целых чисел x и y, для которых верны три неравенства:
1) $3y-x<5,\ x+y>26,\ 3x-2y<46$;
2) $3y-5x>16,\ 3y-x<44,\ 3x-y>1$.

Решить неравенство **(903—917).**

903. 1) $2{,}5^{1-x}>2{,}5^{-3x}$; 2) $0{,}13^{x-4}\geqslant 0{,}13^{2-x}$;
3) $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$; 4) $3^{-4x}>\sqrt{3}$.

904. 1) $2^{-x+5}<\frac{1}{4}$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x-2|}>\frac{1}{27}$.

905. 1) $5^{x^2+3x+1{,}5}<5\sqrt{5}$; 2) $0{,}2^{x^2-6x+7}\geqslant 1$.

906. 1) $3^{x+1}\cdot 9^{x-\frac{1}{2}}\geqslant\sqrt[3]{3}$; 2) $3^{x+1}+3^{x-1}<10$.

907. 1) $2^{2x}-4^{x-1}+8^{\frac{2}{3}x}\cdot 2^{-4}>52$;
2) $2^{x+2}-2^{x+3}+5^{x-2}>5^{x+1}+2^{x+4}$.

908. 1) $3^{x^2+6x}<1$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-x^2}>\frac{1}{2}$; 3) $4^{\frac{x-3}{x^2+6x+11}}<1$;
4) $2^{2x+1}-21\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}+2\geqslant 0$; 5) $3^{4-3x}-35\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x}+6\geqslant 0$.

909. 1) $3^{\log_2\frac{x-1}{x+2}}<\frac{1}{9}$; 2) $5^{\log_2(x^2-4x+3{,}5)}>\frac{1}{5}$; 3) $2^{\log_{0{,}7}(1+2x)}>4$.

910. 1) $\log_6(2-x)<\log_6(2x+5)$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2)\geqslant -1$.

911. 1) $\sqrt{\lg x}<\frac{1}{2}$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}(2x+6)+2$.

912. 1) $\log_{0,5}(1+2x)>-1$; 2) $\log_3(1-2x)<-1$.

913. 1) $\log_{0,5}(x^2-5x+6)>-1$; 2) $\log_8(x^2-4x+3)\leqslant 1$.

914. 1) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_{\frac{1}{2}}\frac{3x+1}{x-1}\right)\leqslant 0$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2-5))>0$.

915. $\log_4 x^2+\log_2^2(-x)>6$.

916. 1) $\log_{\frac{1}{2}}\left(1+x-\sqrt{x^2-4}\right)\leqslant 0$;

2) $\frac{1}{\log_5(3-2x)}-\frac{1}{4-\log_5(3-2x)}<0$.

917. 1) $\log_{|2x+1|}x^2\geqslant 2$; 2) $\log_{x^2}|3x+1|<\frac{1}{2}$.

918. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+ax+1)<1$$

выполняется для всех x из промежутка $x<0$.

Решить неравенство (919—925).

919. 1) $x^{\lg 2x-3\lg x+1}>1000$; 2) $3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2$.

920. $\log_{|2x+2|}(1-9^x)<\log_{|2x+2|}(1+3^x)+\log_{|2x+2|}\left(\frac{5}{9}+3^{x-1}\right)$.

921. 1) $(x^2-4)\log_{0,5}x>0$; 2) $(3x-1)\log_2 x>0$;

3) $\log_7\log_{\frac{1}{3}}\frac{x^2+|x|-30}{x+6}<0$.

922. 1) $x^{1+\lg x}<0,1^{-2}$; 2) $x^{2\lg x}<10x$; 3) $3-x<\log_5(20+5^x)$.

923. 1) $\sqrt{32^x+4}-\sqrt{|32^x-7|}<1$; 2) $3^x\left(\sqrt{9^{1-x}-1}+1\right)<3\left|3^x-1\right|$.

924. 1) $\log_{6x+1}(25x)-2\log_{25x}(6x+1)>1$;

2) $\log_{6x-1}\frac{x}{6x-1}>2\log_x(6x-1)$; 3) $\log_{x+4}\left(\sqrt{x+5}+1\right)\leqslant 1$.

925. 1) $4\log_{3|x|+1}\sqrt{4x+3}-\log_{\sqrt{4x+3}}(3|x|+1)>0$;

2) $\log_{2|x|+1}(7x+4)-\log_{7x+4}(2|x|+1)>0$.

926. Решить неравенство $9^{|x|}-8\cdot 3^x>9$ и указать наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству.

Решить неравенство **(927—930).**

927. 1) $\sqrt{9x-20} < x$; 2) $\sqrt{x+7} > x+1$;

3) $\sqrt{\dfrac{x+4}{2-x}} > x$; 4) $\sqrt{\dfrac{1+5x}{1+2x}} \leqslant 1-x$.

928. 1) $\dfrac{13-3x+\sqrt{x^2-x-6}}{5-x} > 1$; 2) $\dfrac{7-3x+\sqrt{x^2+3x-4}}{x-3} < -1$.

929. 1) $\dfrac{\sqrt{3x^3-22x^2+40x}}{x-4} \geqslant 3x-10$; 2) $\dfrac{\sqrt{2x^3-22x^2+60x}}{x-6} \geqslant 2x-10$.

930. 1) $\cos(-3x) \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right) < -\dfrac{1}{2}$.

931. Решить графически неравенство:

1) $\sin x < \dfrac{1}{4}$; 2) $\sin x > -\dfrac{1}{4}$; 3) $\operatorname{tg} x - 3 \leqslant 0$; 4) $\cos x > \dfrac{1}{3}$.

932. С помощью графиков тригонометрических функций найти все решения неравенства, заключённые в промежутке $[-3\pi; \pi]$:

1) $2\cos x - \sqrt{3} < 0$; 2) $\sqrt{2}\sin x + 1 \geqslant 0$;

3) $\sqrt{3} + \operatorname{tg} x \leqslant 0$; 4) $3\operatorname{tg} x - 2 > 0$.

Решить неравенство **(933—934).**

933. $\sqrt[4]{\dfrac{7-\cos 4x}{2}} > -2\cos x$.

934. $\sqrt[4]{\dfrac{7-\cos 4x}{2}} > -2\sin x$.

Доказать неравенство **(935—937).**

935. 1) $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$;

2) $\dfrac{a^3+b^3}{2} > \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$, если $a>0$, $b>0$, $a \neq b$.

936. 1) $(a+b)(ab+1) \geqslant 4ab$, если $a>0$, $b>0$;

2) $a^4+6a^2b^2+b^4 > 4ab(a^2+b^2)$, если $a \neq b$.

937. 1) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a} \geqslant 3$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$;

2) $2a^2+b^2+c^2 \geqslant 2a(b+c)$.

4. Системы уравнений и неравенств

Решить систему уравнений **(938—939).**

938. 1) $\begin{cases} 5x-7y=3, \\ 6x+5y=17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y-13=0, \\ x+2y+1=0. \end{cases}$

939. 1) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{5}-\dfrac{x+y}{2}=10, \\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{x-y}{3}=6, \\ \dfrac{x+y}{4}-\dfrac{x-y}{3}=0. \end{cases}$

Найти действительные решения системы уравнений (940—944).

940. 1) $\begin{cases} y+5=x^2, \\ x^2+y^2=25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy=16, \\ \dfrac{x}{y}=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+2y^2=96, \\ x=2y. \end{cases}$

941. 1) $\begin{cases} x^2-y^2=13, \\ x-y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-3y=-5, \\ 7x+3y=23. \end{cases}$

942. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{2}, \\ x^2+y^2=20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=3\dfrac{1}{3}, \\ x^2-y^2=8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2=13x+4y, \\ y^2=4x+13y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2+y^2-4x=40, \\ 2x^2+y^2+3x=52. \end{cases}$

943. 1) $\begin{cases} \dfrac{x^4}{y^2}+xy=72, \\ \dfrac{y^4}{x^2}+xy=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{2y}+3xy=25, \\ \dfrac{y^3}{x}-2xy=16. \end{cases}$

944. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+x^4y=\dfrac{1}{xy^2}+x^2, \\ \dfrac{1}{x}+x^2y^2+4y^2=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+\dfrac{1}{x^3y^3}=x^3y+\dfrac{1}{xy^2}, \\ \dfrac{1}{x}+x^3y^3+10y^2=0. \end{cases}$

Решить систему уравнений (945—948).

945. 1) $\begin{cases} 2^{x+y}=32, \\ 3^{3y-x}=27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3^x-2\cdot 2^y=77, \\ 3^{\frac{x}{2}}-2y=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \lg x+\lg y=4, \\ x^{\lg y}=1000. \end{cases}$

946. 1) $\begin{cases} \log_4 x-\log_2 y=0, \\ x^2-5y^2+4=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^4=16, \\ \log_2 x+2\log_2 y=3. \end{cases}$

947. $\begin{cases} 9^x\cdot 3^y=9, \\ \sqrt{y}-\sqrt{x}=1. \end{cases}$

948. 1) $\begin{cases} \log_2(x^2y+2xy^2)-\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=4, \\ \log_5\left|\dfrac{xy}{6}\right|=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_2\left(x^2y+\dfrac{xy^2}{2}\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}\right)=3, \\ \log_{\frac{1}{5}}\left|\dfrac{xy}{6}\right|=0. \end{cases}$

949. При каких значениях a система уравнений
$$\begin{cases}\log_3(y-3)-2\log_9 x=0,\\ (x+a)^2-2y-5a=0\end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение?

Решить систему уравнений **(950—956)**.

950. 1) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=16,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=19.\end{cases}$

951. 1) $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1,\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{3y+x+1}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6.\end{cases}$

952. 1) $\begin{cases}3^{x+y+1}+7\cdot 3^{y-2}=8,\\ \sqrt{x+y^2}=x+y;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2^{x+y+1}\cdot 7\cdot 2^{y-5}=4,\\ \sqrt{2x+y^2}=x+y.\end{cases}$

953. 1) $\begin{cases}2\log_3^2(x+2y)=\log_{\frac{1}{3}}(x+2y)\log_{\frac{1}{3}}(x-y)+\log_3^2(x-y),\\ x^2+xy-2y^2=9;\end{cases}$

2) $\begin{cases}2\log_2^2(x+y)+\log_{\frac{1}{2}}(x+y)\log_{\frac{1}{2}}(x-2y)=2\log_2^2(x-2y),\\ x^2-xy-2y^2=4.\end{cases}$

954. $\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-y\right)=1,\\ x+y=-\frac{3\pi}{2}.\end{cases}$

955. 1) $\begin{cases}\sin x+\cos y=1,\\ \sin^2 x+2\sin x\cos y=\frac{3}{4};\end{cases}$

2) $\begin{cases}\sin x+\sin y=\frac{1}{2},\\ \cos^2 x+2\sin x\sin y+4\cos^2 y=4.\end{cases}$

956. 1) $\begin{cases}\sin x\cos y=-\frac{1}{2},\\ \operatorname{tg}x\operatorname{ctg}y=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x\sin y=\frac{1}{4},\\ 3\operatorname{tg}x=\operatorname{ctg}y.\end{cases}$

957. Найти наименьшее и наибольшее целые решения системы неравенств
$$\begin{cases}\frac{2x-3}{2}-\frac{3x+5}{3}-\frac{x}{6}<3-\frac{x+4}{2},\\ 1-\frac{2x-8}{3}+\frac{4-3x}{2}<2x-\frac{x+2}{3}.\end{cases}$$

958. Решить систему неравенств
$$\begin{cases}\frac{x+1}{5}-\frac{x+2}{4}<\frac{x-3}{3}+\frac{x-4}{2},\\ \frac{x-2}{3}>1+\frac{x-5}{15}.\end{cases}$$

959. 1) Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}\log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2},\\ x + y = a + a^2\end{cases}$$

имеет решение. Решить эту систему при найденных значениях a.

2) Найти все положительные значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4,\\ (x - 2)^2 + y^2 = a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

960. Для всех значений параметра a решить систему уравнений

$$\begin{cases}a^2 - 2\sqrt{3|a|}y + x^2 + 2xy - y^2 - 2 = 0,\\ x^2 + y^2 - 2y - \cos(xy) + 11 - 6a + a^2 = 0.\end{cases}$$

Решить систему уравнений **(961—963)**.

961. 1) $\begin{cases}x^y = y^x,\\ x^3 = y^2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^{\sqrt{y}} = y,\\ y^{\sqrt{y}} = x^4;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\sqrt{2}\sin x = \sin y,\\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y;\end{cases}$

4) $\begin{cases}x - y = -\dfrac{1}{3},\\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \dfrac{1}{2};\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\cos x \sin y = \dfrac{1}{2},\\ \sin 2x + \sin 2y = 0.\end{cases}$

962. $\begin{cases}6\sin x\cos y + 2\cos x\sin y = -3,\\ 5\sin x\cos y - 3\cos x\sin y = 1.\end{cases}$

963. $\begin{cases}3^{\log_3 x} - 2^{\log_4 y} = 77,\\ 3^{\log_3 \sqrt{x}} + 2^{\log_{16} y} = 11.\end{cases}$

964. Изобразить на плоскости фигуру, заданную множеством решений системы неравенств, и найти её площадь:

1) $\begin{cases}x + 3y - 3 \geqslant 0,\\ 2x + 3y - 12 \leqslant 0,\\ x \geqslant 0,\\ 0 \leqslant y \leqslant 2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x - y + 1 \leqslant 0,\\ 5x - 3y + 15 \geqslant 0,\\ x \leqslant 0,\\ 0 \leqslant y \leqslant 2{,}5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}(x + y - 1)(x + y - 3) \leqslant 0,\\ x - y \leqslant 0,\\ x \geqslant 0;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}(2x - y + 3)(4x + 3y - 9) \leqslant 0,\\ x + y \geqslant 0,\\ -1 \leqslant y \leqslant 3.\end{cases}$

5. Текстовые задачи

965. Пассажир поднимается по неподвижному эскалатору за 3 мин, а по движущемуся за 45 с. Определить, за какое время поднимает эскалатор неподвижно стоящего на нём пассажира.

966. Теплоход прошёл расстояние между двумя пристанями по течению реки за 7 ч, а против течения за 9 ч. Определить расстояние между пристанями, если скорость течения реки 2 км/ч.

967. Теплоход должен был пройти некоторое расстояние за 2,25 суток, но оказалось, что он проходил за каждый час на 2,5 км больше, чем предполагалось, а потому прошёл намеченный путь за 2 суток. Какое расстояние должен был пройти теплоход?

968. Один рабочий выполняет некоторую работу за 24 дня, другой рабочий ту же работу может выполнить за 48 дней. За сколько дней будет выполнена эта работа, если рабочие будут работать вместе?

969. При уборке урожая было собрано 4556 ц яровой пшеницы с общей площади 174 га, причём на целинных землях собрано по 30 ц с 1 га, а на остальной площади — по 22 ц с 1 га. Сколько гектаров целинных земель было освоено?

970. Разность двух чисел относится к их произведению как 1 : 24, а сумма этих чисел в 5 раз больше их разности. Найти эти числа.

971. Две организации приобрели театральные билеты. Первая организация израсходовала на билеты 7500 р., а вторая, купившая на 5 билетов меньше и заплатившая за каждый билет на 50 р. меньше первой организации, уплатила за билеты 5000 р. Сколько театральных билетов купила каждая организация?

972. Три дроби имеют числители, равные единице. Сумма этих дробей равна 1. Разность между первой и второй дробями равна третьей дроби. Сумма первых двух дробей в 5 раз больше третьей дроби. Найти эти дроби.

973. Бригада рабочих должна была к определённому сроку изготовить 360 деталей. Перевыполняя дневную норму на 9 деталей, бригада за день до срока перевыполнила плановое задание на 5%. Сколько деталей изготовит бригада к сроку, если будет продолжать работать с той же производительностью труда?

974. Катер отправился от речного причала вниз по реке и, пройдя 36 км, догнал плот, отправленный от того же причала за 10 ч до начала движения катера. Если бы катер отправился одновременно с плотом, то, пройдя 30 км и повернув обратно, встретил бы плот на расстоянии 10 км от речного причала. Найти собственную скорость катера.

975. От пристани отправился по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин вслед за плотом с той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 17 км. Какова скорость плота, если известно, что скорость моторной лодки по течению больше скорости плота на 48 км/ч?

976. При уборке урожая с каждого из двух участков собрано по 210 ц пшеницы. Площадь первого участка была на 0,5 га меньше площади второго участка. Сколько центнеров пшеницы собрано с 1 га на каждом участке, если урожай пшеницы с 1 га на первом участке был на 1 ц больше, чем на втором?

977. Расстояние от дома до школы 700 м. Сколько шагов делает ученик от дома до школы, если его брат, шаг которого на 20 см длиннее, делает на 400 шагов меньше?

978. Найти четыре числа, являющиеся последовательными членами геометрической прогрессии, если третье число больше первого на 9, а второе больше четвёртого на 18.

979. Найти сумму первых двенадцати членов арифметической прогрессии, если сумма первых трёх её членов равна нулю, а сумма четырёх первых членов равна 1.

980. Найти четыре числа, зная, что первые три из них являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии, а последние три — арифметической прогрессии. Сумма первого и четвёртого чисел равна 16, а сумма второго и третьего равна 12.

981. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой и одиннадцатый её члены являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии. Найти первый член геометрической прогрессии.

982. Произведение пятого и шестого членов арифметической прогрессии в 33 раза больше произведения её первого и второго членов. Во сколько раз пятый член прогрессии больше второго, если известно, что все члены прогрессии положительны?

983. В треугольнике, площадь которого равна 12 см^2, середины сторон соединены отрезками. Во вновь полученном треугольнике точно так же образован новый треугольник и т. д. Найти сумму площадей всех получающихся таким построением треугольников.

984. В цветочный магазин поставили 50 красных, 100 белых и 150 жёлтых гвоздик.

1) Сколько различных букетов по 3 гвоздики в каждом можно составить из имеющихся цветов?

2) Сколько различных букетов, состоящих из одной красной, одной белой и одной жёлтой гвоздик, можно собрать из имеющихся цветов?

3) Сколько различных букетов, содержащих 2 красные, 2 белые и одну жёлтую гвоздики, можно составить из имеющихся цветов?

4) Сколько различных букетов, содержащих 3 красные, одну белую и 5 жёлтых гвоздик, можно составить из имеющихся цветов?

985. Состав нужно скомплектовать из различных 7 плацкартных, 6 купейных вагонов и одного вагона-ресторана. Сколькими способами можно скомплектовать вагоны в состав?

986. Состав нужно скомплектовать из 7 плацкартных, 6 купейных вагонов и одного вагона-ресторана. Сколько существует последовательностей расположения имеющихся вагонов трёх типов?

987. Для проверки на всхожесть было посеяно 300 семян, из которых 255 семян проросли. Какова вероятность прорастания отдельного семени в этой партии? Сколько семян в среднем взойдёт из 1000 посеянных?

988. Вероятность того, что размеры детали, выпускаемой станком-автоматом, окажутся в пределах заданных допусков, равна 0,96. Какое количество годных деталей в среднем будет содержаться в каждой партии объёмом 400 штук?

989. Отдел технического контроля проверяет половину изделий некоторой партии и признаёт годной всю партию, если среди проверенных изделий не более одного бракованного. Какова вероятность того, что партия из 20 изделий, в которой 2 бракованных, будет признана годной?

990. В ящике 10 деталей, 4 из которых окрашены. Сборщик наугад взял 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

991. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

992. Завод в среднем даёт 27% продукции высшего сорта и 70% первого сорта. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие будет или высшего, или первого сорта.

993. При каждом включении двигатель начнёт работать с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что для его запуска потребуется не более двух включений?

994. С первого станка на сборку поступает 40% всех изделий, со второго — 30%, с третьего — 30%. Вероятности изготовления бракованной детали для каждого станка соответственно равны 0,01, 0,03 и 0,05. Найти вероятность того, что наугад поступившая на сборку деталь бракованная.

6. Функции и графики

995. Найти коэффициенты k и b линейной функции $y = kx + b$, если её график проходит через точки A и B:
1) $A(-1;\ -2)$, $B(3;\ 2)$; 2) $A(2;\ 1)$, $B(1;\ 2)$;
3) $A(4;\ 2)$, $B(-4;\ -3)$; 4) $A(-2;\ -2)$, $B(3;\ -2)$.

996. Через точку $A(-3;\ 2)$ проходит прямая, параллельная прямой, проходящей через точки $B(-2;\ 2)$ и $C(3;\ 0)$. Записать формулы, задающие линейные функции, графиками которых являются данные прямые.

997. Выяснить, принадлежит ли прямой $x + \frac{y}{2} = 1$ точка A:
1) $A(-1;\ 4)$; 2) $A(0;\ 3)$; 3) $A(1;\ 0)$; 4) $A\left(\frac{3}{2};-1\right)$.

998. Линейная функция задана формулой $y = -\frac{3}{4}x + 2$. Найти:
1) точки A и B пересечения графика этой функции с осями координат;
2) длину отрезка AB;
3) расстояние от начала координат до прямой $y = -\frac{3}{4}x + 2$.

999. Найти значения x, при которых график функции $y = 2x - 1$ лежит ниже графика функции $y = 3x - 2$.

1000. Найти значения x, при которых график функции $y = \left(\sqrt{3} - 2\right)x - \sqrt{3}$ лежит выше графика функции
$$y = \left(1 + \sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{3}.$$

1001. Доказать, что функция $y = 2x - 3$ возрастает.

1002. Доказать, что функция $y = -\sqrt{3}x - 3$ убывает.

1003. Выяснить, пересекаются ли графики функций:
1) $y = 3x - 2$ и $y = 3x + 1$; 2) $y = 3x - 2$ и $y = 5x + 1$.

1004. Построить график функции:
1) $y = 2 - |x|$; 2) $y = |2 - x|$; 3) $y = |2 - x| + |x - 3|$.
Выяснить, пересекает ли график каждой из данных функций прямую $y = 3$. В случае утвердительного ответа найти координаты точек пересечения.

1005. Дана функция $y = x^2 - 2x - 3$.
1) Построить её график и найти значения x, при которых $y(x) < 0$.
2) Доказать, что функция возрастает на промежутке $[1;\ 4]$.
3) Найти значение x, при котором функция принимает наименьшее значение.
4) Найти значения x, при которых график функции $y = x^2 - 2x - 3$ лежит выше графика функции $y = -2x + 1$.
5) Записать уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 2x - 3$ в точке с абсциссой, равной 2.

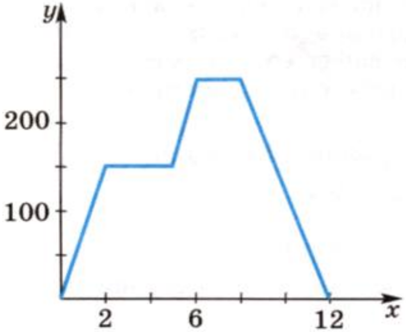


Рис. 143

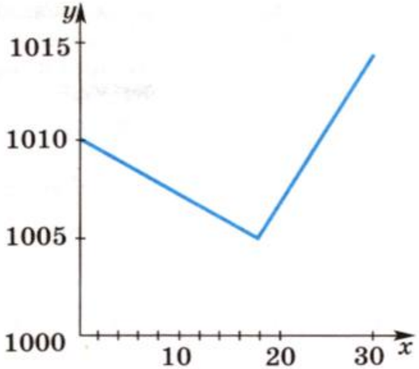


Рис. 144

1006. Дана функция $y = -2x^2 + 3x + 2$.

1) Построить её график и найти значения x, при которых $y(x) < 0$.

2) Доказать, что функция убывает на промежутке [1; 2].

3) Найти значение x, при котором функция принимает наибольшее значение.

4) Найти значения x, при которых график данной функции лежит ниже графика функции $y = 3x + 2$.

5) Записать уравнения касательных к параболе $y = -2x^2 + 3x + 2$ в точках с ординатой, равной 3.

1007. Совершая воскресную прогулку, автомобилист дважды останавливался для осмотра достопримечательностей. После второй остановки он вернулся домой. На рисунке 143 изображён график движения автомобилиста (по оси абсцисс откладывалось время в часах, по оси ординат — расстояние от дома в километрах). С помощью графика ответить на вопросы:

1) С какой скоростью автомобилист ехал до первой остановки?

2) Сколько времени он потратил на осмотр достопримечательностей?

3) Какова средняя скорость движения автомобилиста (без учёта остановок)?

1008. На рисунке 144 представлено изменение курса акций некоторой компании в течение октября (по оси абсцисс отложены числа месяца, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях). Два брокера 4 октября купили по 90 акций каждый, 12 октября первый из них продал 30 акций, второй — 35 акций. Оставшиеся акции оба брокера продали 30 октября. Которому из брокеров сделка принесла меньшую прибыль? На сколько рублей он получил меньше, чем другой брокер?

1009. Сигнал с корабля можно различить в море на расстоянии одной мили. Корабль A идёт на юг, делая 3 мили в час, и в настоящее время находится в 5 милях к западу от корабля B, который идёт на запад со скоростью 4 мили в час. Будут ли корабли на расстоянии, достаточном для приёма сигнала?

1010. Выяснить, пересекаются ли графики функций:

1) $y = x^2$ и $y = x + 6$; 2) $y = \frac{3}{x}$ и $y = 4(x+1)$;

3) $y = \frac{1}{8}x^2$ и $y = \frac{1}{x}$; 4) $y = 2x - 1$ и $y = \frac{1}{x}$.

1011. Построить график и выяснить, является ли ограниченной функция:

1) $y = \begin{cases} 2x - x^2 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 2 - x \text{ при } x > 1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 \text{ при } x < 1, \\ \sqrt{x} \text{ при } x \geqslant 1. \end{cases}$

1012. Построить график и выяснить, является ли непрерывной функция:

1) $y = \begin{cases} \log_2 (x-1) \text{ при } x \leqslant 1, \\ \sqrt{x-1} \text{ при } x > 1; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 \text{ при } x < 1, \\ \sqrt{x-1} \text{ при } x \geqslant 1; \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} |x^2 - 1| \text{ при } x < 1, \\ |\log_2 x| \text{ при } x \geqslant 1; \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} |3^x - 1| \text{ при } x < 0, \\ \sqrt{x} - 1 \text{ при } x \geqslant 0. \end{cases}$

1013. Выяснить, является ли чётной или нечётной функция:

1) $y = 2^x + 2^{-x}$; 2) $y = 3^x - 3^{-x}$;

3) $y = \ln \frac{3+x}{3-x}$; 4) $y = \left| \ln \frac{5+x}{5-x} \right|$.

1014. Исследовать на чётность и нечётность функцию:

1) $y = 2x^2 - 1$; 2) $y = x - x^3$; 3) $y = x^5 - \frac{1}{x}$; 4) $y = \frac{\sin x}{x}$.

1015. Выяснить, является ли чётной или нечётной функция:

1) $y = x \sin x$; 2) $y = x^2 \cos 2x$;

3) $y = x + \sin x$; 4) $y = x + \cos x$.

1016. Выяснить, при каких значениях x возрастает функция:

1) $y = \sqrt{x^2 - 9x - 10}$; 2) $y = \sqrt{7 - 6x - x^2}$;

3) $y = \frac{x-3}{x-4}$; 4) $y = \frac{x-5}{x-6}$;

5) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$; 6) $y = \frac{3}{x^2 + 3x - 4}$.

1017. Выяснить, является ли периодической функция:

1) $y = 2^{5x-1}$; 2) $y = 2^{\sqrt{\cos^2 x - 1}}$.

Найти наименьший положительный период функции (1018—1019).

1018. 1) $y = \cos\frac{3x}{2}$; 2) $y = 2\sin 0{,}6x$.

1019. 1) $y = \cos 3x$; 2) $y = \sin\frac{x}{5}$;

3) $y = \operatorname{tg} 5x$; 4) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$.

1020. Исследовать на чётность и нечётность и построить график функции:

1) $y = -x^4 + 4x^2 - 5$; 2) $y = x^3 - 4x$.

1021. Найти наибольшее или наименьшее значение функции $y = ax^2 + bx - 4$, если $y(1) = 0$ и $y(4) = 0$.

1022. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x$; 2) $y = 2\cos 2x + \sin^2 x$.

1023. Дана функция $f(x)$. Найти корни уравнения $f(x) = a$, а также наибольшее и наименьшее значения функции, если:

1) $f(x) = \dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^6 x + \cos^6 x}$, $a = \dfrac{10}{7}$;

2) $f(x) = \dfrac{2\sin^4 x + 3\cos^2 x}{2\cos^4 x + \sin^2 x}$, $a = \dfrac{15}{7}$.

1024. Найти коэффициенты a, b, c квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если $y(-2) = 15$, $y(3) = 0$, $y\ (0) = -3$.

1025. Построить график функции $y = \sqrt{25 - x^2}$. Найти по графику промежутки монотонности функции. Доказать, что график данной функции симметричен относительно оси Oy.

1026. Построить график функции $y = \dfrac{5}{x-2}$. Показать, что функция убывает на промежутках $x < 2$ и $x > 2$. В какой точке график функции пересекает ось ординат?

1027. Выяснить основные свойства и построить график функции:

1) $y = 3^x + 1$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$; 3) $y = \log_2(x+1)$;

4) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$; 5) $y = \sqrt{x+1} - 2$; 6) $y = \sqrt{2x-1} + 1$.

1028. Построить график функции:

1) $y = 2^{x-1} - 3$; 2) $y = \log_2(x+2) + 3$;

3) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $y = \dfrac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} + 1$.

1029. При каких значениях a графики функций

$$y = x^2 - 4x + 2 \text{ и } y = -2x + a$$

имеют общие точки?

Найти область определения функции (1030—1033).

1030. 1) $y = 2^x + \lg(6 - 3x)$; 2) $y = 3^{-x} - 2\ln(2x + 4)$;

3) $y = \dfrac{1}{\cos 2x}$; 4) $y = \operatorname{tg} \dfrac{x}{4}$.

1031. 1) $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+3}}$; 2) $y = \sqrt{4 - \dfrac{9}{x+1} + \dfrac{1}{x-3}}$; 3) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11}}$.

1032. 1) $y = \sqrt{\log_3 \dfrac{2x+1}{x-6}}$; 2) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} (x-3) - 1}$.

1033. 1) $y = \sqrt{\log_{0,8} (x^2 - 5x + 7)}$;

2) $y = \sqrt{\log_{0,5} (x^2 - 9)}$;

3) $y = \sqrt{\log_4 (1 + 6x) + \left|\log_{\frac{1}{8}} (1 + 7x)\right|}$;

4) $y = \sqrt{\left|\log_{27}\left(1 + \dfrac{7}{2}x\right)\right| - \log_{\frac{1}{3}} (1 + 2x)}$.

Найти множество значений функции (1034—1037).

1034. 1) $y = x^2 + 6x + 3$; 2) $y = -2x^2 + 8x - 1$;

3) $y = e^x + 1$; 4) $y = 2 + \dfrac{2}{x}$.

1035. 1) $y = 0,5 + \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = 0,5\cos x + \sin x$.

1036. 1) $y = \sqrt{6x - 7} - 2x$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$.

1037. 1) $y = \sin x \cdot \cos x$; 2) $y = \log_2(x^2 + 2)$.

1038 Найти все значения x, при которых функция

$$y = 6\cos^2 x + 6\sin x - 2$$

принимает наибольшее значение.

1039. Найти все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$y = x^2 + (a + 4)x + 2a + 3$$

на отрезке $[0; 2]$ равно -4.

1040. 1) Найти все значения a, при каждом из которых наименьшее значение квадратичной функции

$$y = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на отрезке $[0; 2]$ равно 3.

2) Найти все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$y = 4ax + |x^2 - 8x + 7|$$

больше 1.

1041. Найти все значения параметра a, при каждом из которых вершины двух парабол

$$y = 4x^2 + 8ax - a \text{ и } y = 4ax^2 - 8x + a - 2$$

лежат по одну сторону от прямой $y = -5$.

1042. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{2\cos^4 x + \sin^2 x}{2\sin^4 x + 3\cos^2 x}.$$

1043. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$; 2) $f(x) = \cos 3x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

1044. Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = \frac{1}{4x^2} - \sqrt{x}$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = 2x\sqrt{x}$, $x_0 = \frac{1}{3}$.

1045. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = \frac{3}{4x\sqrt{x}}$, $x_0 = \frac{1}{4}$; 2) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 4$, $x_0 = -1$.

1046. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^3 - x + 1$ в точке пересечения его с осью Oy.

1047. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 3x^3 - 1$ в точке с ординатой $y = 2$.

1048. Прямая $y = 4x + a$ является касательной к параболе $y = 6 - 2x + x^2$. Найти a и координаты точки касания.

1049. Найти точки, в которых касательные к графику функции

$$y = 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$$

параллельны оси абсцисс.

1050. На параболе $y = 3x^2 + 7x + 1$ найти такую точку, в которой касательная к параболе образует с осью абсцисс угол $\frac{\pi}{4}$.

1051. Найти все точки графика функции $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$, в которых касательная к этому графику проходит через начало координат.

1052. Написать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x) = x\ln 2x$, $x_0 = 0{,}5$;

2) $f(x) = 2^{-x}$, $x_0 = 1$.

1053. Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ в точке $M(2;\ -4)$.

1054. Найти тангенс угла, который касательная к графику функции $y = x^2e^{-x}$ в точке с абсциссой $x = 1$ образует с осью Ox.

1055. Найти угол между осью Ox и касательной к графику функции $y=\frac{2}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{3}$.

1056. Записать уравнение касательной к графику функции
$$f(x)=\frac{x^3+1}{3}$$
в точке его пересечения с осью Ox.

1057. Записать уравнение касательной к графику функции
$$f(x)=\sqrt{x^3}+1$$
в точке с абсциссой $x=4$.

1058. Найти тангенс угла между касательными, проведёнными к параболе $y=x^2$ из точки (0; 9).

1059. Найти промежутки монотонности функции:

1) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$; 2) $y=\frac{x^2-1}{x}$.

Найти точки экстремума функции (**1060—1061**).

1060. 1) $y=(x-1)^3(x-2)^2$; 2) $y=4+(6-x)^4$.

1061. 1) $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$; 2) $y=\frac{x^2+6x+3}{3x+4}$.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции (**1062—1064**).

1062. 1) $y=2\sin x+\sin 2x$ на отрезке $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$;

2) $y=2\sin x+\cos 2x$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

1063. 1) $y=\sqrt{x+5}$ на отрезке $[-1;\ 4]$;

2) $y=\sin x+2\sqrt{2}\cos x$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

1064. 1) $y=\ln x-x$ на отрезке $[0{,}5;\ 4]$;

2) $y=x\sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[0;\ 1]$.

1065. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2-3\sin x+4\cos x$ на отрезке $\left[-\frac{4\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$.

1066. При каком значении a наибольшее значение функции $y=x^3-3x+a$ на отрезке $[-2;\ 0]$ равно 5?

1067. При каких значениях a функция $y=x^3-3ax^2+27x-5$ имеет единственную стационарную точку?

1068. Найти эстремумы функции:

1) $f(x)=x^3+3x^2-9x+4$;

2) $f(x)=x^4-2x^5+5$.

1069. Исследовать с помощью производной функцию

$$y = x^3 - 3x + 2$$

и построить её график. Найти точки, в которых касательные к графику параллельны оси Ox.

1070. Исследовать с помощью производной функцию

$$y = x^3 - 5x^2 - x + 5$$

и построить её график. Записать уравнение касательной к графику этой функции в точке с абсциссой, равной 4.

Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить её график **(1071—1073)**.

1071. 1) $f(x) = 4x^3 + 6x^2$; 2) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$;

3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$; 4) $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2$.

1072. 1) $y = -\frac{x^4}{4} + x^2$; 2) $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

1073. 1) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 9$; 2) $y = -x^4 + 6x^2 - 9$;

3) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$; 4) $y = \frac{x^2 + 2}{2x}$.

1074. Периметр осевого сечения цилиндра 6 дм. При каком радиусе основания цилиндра его объём будет наибольшим?

1075. Найти наибольший возможный объём цилиндра, площадь полной поверхности которого равна 54π см^2, если известно, что радиус основания не меньше 2 см и не больше 4 см.

1076. В правильной пирамиде $SABC$ из вершины S проведена высота SO. Найти сторону основания пирамиды, если объём пирамиды является наибольшим при условии, что $SO + AC = 9$ и $1 \leqslant AC \leqslant 8$.

1077. В правильной четырёхугольной призме диагональ равна $2\sqrt{3}$. При какой высоте призмы её объём наибольший?

1078. Для функции $f(x) = x^{-2} + \cos x$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M\left(0{,}5\pi; -\frac{2}{\pi}\right)$.

1079. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x^2(2x - 3) - 12(3x - 2)$$

на отрезке $-3 \leqslant x \leqslant 6$.

1080. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 2\ln^3 x - 9\ln^2 x + 12\ln x$$

на отрезке $e^{\frac{3}{4}} \leqslant x \leqslant e^3$.

1081. На параболе $y = x^2$ найти точку, расстояние от которой до точки $A\left(2; \frac{1}{2}\right)$ является наименьшим.

1082. На координатной плоскости даны точки $A(3; -1)$ и $D(4; -1)$. Рассматриваются трапеции, у которых отрезок AD является одним из оснований, а вершины другого основания лежат на параболе $y = 1 - x^2$, заданной на отрезке $[-1; 1]$. Среди этих трапеций выбрана та, которая имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

1083. На координатной плоскости дана точка $K(3; 6)$. Рассматриваются треугольники, у которых две вершины симметричны относительно оси Oy и лежат на параболе $y = 4x^2$, заданной на отрезке $[-1; 1]$, а точка K — середина одной из сторон. Из этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найти эту площадь.

1084. Каковы должны быть коэффициенты p и q квадратичной функции $y = x^2 + px + q$, чтобы при $x = 5$ она имела минимум, равный 1?

1085. Какой должна быть высота конуса с образующей 20 дм, чтобы его объём был наибольшим?

1086. Какую наименьшую площадь полной поверхности имеет цилиндр, если его объём равен V?

1087. Найти радиус основания цилиндра, вписанного в шар радиуса R и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.

1088. Найти высоту цилиндра наибольшего объёма, вписанного в шар радиуса R.

1089. Найти высоту конуса наибольшего объёма, вписанного в шар радиуса R.

1090. В конус с заданным объёмом V вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным α. При каком значении α объём пирамиды будет наибольшим?

1091. Из всех цилиндров, у которых периметр осевого сечения равен p, выбран цилиндр наибольшего объёма. Найти этот объём.

1092. Из всех цилиндров, которые можно поместить внутри сферы радиуса R, найти цилиндр наибольшего объёма.

1093. Консервная жестяная банка заданного объёма должна иметь форму цилиндра. При каком соотношении между диаметром основания D и высотой H цилиндра расход жести будет наименьшим?

1094. Из всех правильных треугольных призм, которые вписаны в сферу радиуса R, выбрана призма наибольшего объёма. Найти высоту этой призмы.

1095. Из всех цилиндров, вписанных в конус с радиусом основания R и высотой H, найти цилиндр наибольшего объёма.

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями **(1096—1100)**.

1096. 1) $y=\sqrt{x-1}$, $y=3-x$, $y=0$;

2) $y=-\frac{1}{x}$, $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{8}$.

1097. 1) $y=4x-x^2$, $y=5$, $x=0$, $x=3$;
2) $y=x^2-2x+8$, $y=6$, $x=-1$, $x=3$;

3) $y=\sin x$, $y=0$, $x=\frac{2\pi}{3}$, $x=\pi$;

4) $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{6}$.

1098. 1) $y=\sqrt{x}$, $y=2$, $x=9$; 2) $y=x^2+3$, $y=x+5$.

1099. 1) $y=9-x^2$, $y=(x-1)^2-4$; 2) $y=x^2$, $y=\sqrt[3]{x}$.

1100. 1) $y=\cos x$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=0$;

2) $y=3^x$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$;

3) $y=2\cos 3x-5\sin 2x+10$, $y=0$, $x=-\frac{3\pi}{4}$, $x=\frac{5\pi}{4}$.

1101. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=9x-x^3$ и касательной к этому графику в его точке с абсциссой 3.

1102. Доказать, что при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ сумма $\arcsin x+\arccos x$ равна C, где C — постоянная. Найти C.

1103. Найти все значения b, при каждом из которых производная функции

$$f(x)=\sin 2x-8(b+2)\cos x-(4b^2+16b+6)x$$

отрицательна на всей числовой прямой.

1104. Найти все значения x, при которых касательные к графикам функций

$$y=3\cos 5x \text{ и } y=5\cos 3x+2$$

в точках с абсциссой x параллельны.

1105. Графику функции $y=-x^3+ax^2+bx+c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x=2$. Касательные к этому графику в точках A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку (0; 2), а другая — через точку (0; 6). Найти a, b, c.

1106. Графику функции $y=x^3+ax^2+bx+c$ принадлежат точки A и B, симметричные относительно прямой $x=-2$. Касательные к этому графику в точках A и B параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку (0; 1), а другая — через точку (0; 5). Найти a, b, c.

1107. График функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, $c < 0$, пересекает ось ординат в точке A и имеет ровно две общие точки M и N с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке M, проходит через точку A. Найти a, b, c, если площадь треугольника AMN равна 1.

1108. График функции $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$, $c > 0$, пересекает ось ординат в точке D и имеет ровно две общие точки A и B с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке B, проходит через точку D. Найти a, b, c, если площадь треугольника ABD равна 1.

1109. В какой точке графика функции $y = (x-1)^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, нужно провести касательную к графику, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, была наименьшей?

1110. На параболе $y = 2x^2 - 3x + 8$ найти точки, касательные в которых проходят через начало координат.

1111. Парабола $y = x^2 + px + q$ пересекает прямую $y = 2x - 3$ в точке с абсциссой 1. При каких значениях p и q расстояние от вершины параболы до оси Ox является наименьшим? Найти это расстояние.

1112. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и касательными к ней, проходящими через точку $M\left(\frac{5}{2}; 6\right)$.

1113. При каком значении k площадь фигуры, заключённой между параболой $y = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y = kx + 1$, наименьшая?

1114. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 0{,}5x^2 - 2x + 2$ и касательными к ней, проведёнными через точки $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$ и $B\ (4;\ 2)$.

1115. Через точку графика функции $y = \sqrt{x}$ с абсциссой a, где $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 2$, проведена касательная к этому графику. Найти значение a, при котором площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и прямой $x = 3$, будет наименьшей, и вычислить эту площадь.

1116. Дана фигура, ограниченная кривой $y = \sin x$ и прямыми $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$. Под каким углом к оси Ox нужно провести прямую через точку (0; 0), чтобы эта прямая разбивала данную фигуру на две фигуры равной площади?

7. Производная и интеграл

1117. Найти значение производной функции $f(x)$ в точке x_0, если:

1) $f(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+x,\ x_0=\frac{1}{3}$; 2) $f(x)=\frac{\ln x}{x},\ x_0=1$;

3) $f(x)=x^{-3}-\frac{2}{x^2}+3x,\ x_0=3$; 4) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x},\ x_0=\frac{\pi}{4}$.

1118. Найти значения x, при которых равно нулю значение производной функции:

1) $f(x)=\sin 2x-x$; 2) $f(x)=\cos 2x+2x$;
3) $f(x)=(2x-1)^3$; 4) $f(x)=(1-3x)^5$.

1119. Показать, что $f'(1)=f'(0)$, если $f(x)=(2x-3)(3x^2+1)$.

1120. Найти значения x, при которых значения производной функции

$$f(x)=x^3-1{,}5x^2-18x+\sqrt{3}$$

отрицательны.

1121. Пуля вылетает из пистолета вверх со скоростью 360 м/с. Найти скорость пули в момент $t=10$ с и определить, сколько времени пуля поднимается вверх. Уравнение движения пули $h=v_0t-4{,}9t^2$.

1122. Колесо вращается так, что угол поворота прямо пропорционален кубу времени вращения. Первый оборот был сделан колесом за 2 с. Определить угловую скорость колеса через 4 с после начала вращения.

1123. Трудоёмкость (объём) комплекса работ Q измеряется в человеко-часах (чел.-ч). Бригада осваивает объект так, что выполненный объём работ как функция времени описывается формулой $Q=160t$ чел.-ч (где t — время в сутках). Какова скорость освоения объёма работ (интенсивность) q чел.-ч в сутки? Сколько человек в бригаде, если суточная норма рабочего 8 чел.-ч в сутки?

1124. Дневная производительность труда (за 7 рабочих часов) рабочего машиностроительного завода описывается функцией $y=-0{,}09t^2+0{,}28t+10{,}06$, где t — время в часах, y — количество продукции. Сколько продукции производит рабочий за один год (260 рабочих дней)?

Найти производную функции (**1125—1127**).

1125. 1) $y=\frac{x^5-3x^3+2x^2-x+3}{x^3}$; 2) $y=\frac{6x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$.

1126. 1) $y=\frac{3x^2-2x+1}{x+1}$; 2) $y=\frac{2x^2-3x+1}{2x+1}$.

1127. 1) $y=(2x+1)^2\sqrt{x-1}$; 2) $y=x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$;
3) $y=\sin 2x\cos 3x$; 4) $y=x\cos 2x$.

1128. Найти производную функции $y = \log_{3x+4}(7x-4)$ в точке $x = 2$.

1129. Найти значения x, для которых производная функции
$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$
равна -1.

1130. Определить знак числа $f'(2)$, если:

1) $f(x) = e^{3-2x} \cdot x^2$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{1-x}}$.

1131. Дана функция $f(x) = \dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$. Найти $f'(0), f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

1132. Найти значения x, при которых $f'(x) \leqslant g'(x)$, если
$$f(x) = x^3 + x^2 + x\sqrt{3},\ g(x) = x\sqrt{3} + 1.$$

1133. Для функции $f(x) = \cos 4x$ найти первообразную $F(x)$, если $F\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = -1$.

1134. Найти первообразную функции:

1) $y = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$; 2) $y = \dfrac{3}{4x-1}$.

Вычислить интеграл (1135—1136).

1135. 1) $\displaystyle\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$; 2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 x - 1)\,dx$;

3) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx$; 4) $\displaystyle\int_0^6 x\sqrt{36-x^2}\,dx$.

1136. 1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$; 2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$;

3) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^2+2x+3)\,dx$; 4) $\displaystyle\int_1^2 (x^2-6x+8)\,dx$;

5) $\displaystyle\int_1^3 (x^{-2}+1)\,dx$; 6) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{5-4x}\,dx$.

Ответы

Глава I

1. 2) $x \in \boldsymbol{R}$; 4) $x \neq 0$; 6) $x < -1$, $x \geqslant 1$. **2.** 2) $0 \leqslant y \leqslant 2$; 6) $-1{,}25 \leqslant y \leqslant -0{,}75$. **3.** 2) $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** 1) $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $f\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 1$; 2) $x \neq \frac{1}{2} + n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $f(0) = 0$, $f(-1) = 1$, $f(100) = 100$. **5.** 2) $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **6.** 2) $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **7.** 2) $-1 \leqslant y \leqslant 1$; 4) $1 \leqslant y \leqslant 10$; 6) $-\sqrt{3} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}$. **8.** 1) $-\sqrt{26} \leqslant y \leqslant \sqrt{26}$; 2) $-1 \leqslant y \leqslant 3$; 4) $-2 \leqslant y \leqslant 4$. **9.** 1) $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1$; 2) $\frac{1}{4} \leqslant y \leqslant 1$. **12.** 2) Нечётная; 4) нечётная; 6) чётная. **13.** 2) Не является чётной и нечётной; 4) чётная; 5) чётная. **16.** 2) Чётная; 4) нечётная; 6) чётная; 8) нечётная. **18.** 2) $\frac{4\pi}{3}$; 4) π. **19.** 2) 2π; 3) π; 4) 6π. **20.** 1) Является, $T = 2\pi$; 2) не является; 3) является, $T = \pi$. **22.** $\frac{\pi}{2}$. **23.** 1) 2π; 2) π. **24.** $T = 2|b - a|$. **25.** $T = 4|a - c|$. **26.** $2T$. **29.** 1) 0; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 0. **30.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{4}$. **31.** 1) Принадлежит; 2) не принадлежит; 3) не принадлежит; 4) принадлежит. **33.** 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[-\pi;\ 0]$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. **34.** 2) $\cos\frac{8\pi}{7} < \cos\frac{10\pi}{7}$; 4) $\cos\left(-\frac{8\pi}{7}\right) < \cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$; 6) $\cos 4 < \cos 5$. **35.** 2) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$; 4) $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{8\pi}{3}$. **36.** 2) $0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{8\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6} < x \leqslant 3\pi$. **37.** 1) а) $(-\infty;\ 2\pi]$; б) $[-1;\ \infty)$; в) $[\pi;\ 2\pi]$; 2) а) $[-3\pi;\ \infty)$; б) $[-1;\ \infty)$; в) $[-3\pi;\ -2\pi]$, $[-\pi;\ \infty)$. **38.** 2) $\sin\frac{\pi}{7} < \cos\frac{\pi}{7}$; 4) $\sin\frac{3\pi}{5} > \cos\frac{\pi}{5}$; 6) $\cos\frac{\pi}{8} > \sin\frac{3\pi}{10}$. **39.** 2) $-\frac{\pi}{18}$, $\frac{\pi}{18}$, $\frac{11\pi}{18}$, $\frac{13\pi}{18}$, $\frac{23\pi}{18}$, $\frac{25\pi}{18}$. **40.** $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$. **41.** 2) $-\frac{\pi}{18} < x < \frac{\pi}{18}$, $\frac{11\pi}{18} < x < \frac{13\pi}{18}$, $\frac{23\pi}{18} < x < \frac{25\pi}{18}$. **42.** 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < y < \frac{\sqrt{2}}{2}$. **43.** $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$. **44.** 1) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$; 2) $x = \frac{\pi}{2}$; 3) $x = 2\pi$; 4) $x = -\frac{\pi}{2}$. **45.** 1) Имеет; 2) не имеет. **46.** 1) 2 решения; 2) 3 решения. **50.** 1) $-\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **52.** 1) 1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **53.** 1) 1; 2) 2; 3) $\frac{4}{3}$; 4) 2. **54.** 1), 3) Не принадлежит; 2), 4) принадлежит. **56.** 2) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; 4) $\left[-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$.

57. 2) $\sin\frac{13\pi}{7} > \sin\frac{11\pi}{7}$; 3) $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right) > \sin\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$; 4) $\sin 7 > \sin 6$. **58.** 2) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$; 4) $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$. **59.** 2) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4} \leqslant x \leqslant 3\pi$; 4) $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$. **60.** 1) а) $(-\infty;\ 3\pi]$; б) $[-1;\ \infty)$; в) $(-\infty;\ 0)$, $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right]$; 2) а) $[-2\pi;\ 2\pi]$; б) $[-1;\ 1]$; в) $[-2\pi;\ -\pi]$, $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
61. 2) $\sin\frac{9\pi}{8} > \cos\frac{9\pi}{8}$; 4) $\sin\frac{\pi}{8} < \cos\frac{3\pi}{10}$. **62.** 2) $-\frac{11\pi}{9}$, $-\frac{10\pi}{9}$, $-\frac{5\pi}{9}$, $-\frac{4\pi}{9}$, $\frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9}$. **63.** $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$. **64.** 2) $-\frac{3\pi}{2} \leqslant x < -\frac{11\pi}{9}$, $-\frac{10\pi}{9} < x < -\frac{5\pi}{9}$, $-\frac{4\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$, $\frac{2\pi}{9} < x < \frac{7\pi}{9}$, $\frac{8\pi}{9} < x \leqslant \pi$. **65.** 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. **66.** 1) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $[\pi;\ 2\pi]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$. **67.** 1) $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 \approx -1{,}25$, $x_3 = \pi$, $x_4 \approx 7{,}5$, $x_5 = \frac{5\pi}{2}$; 2) $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$; 3) $x = 0$; 4) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **68.** 1) Имеет; 2) не имеет. **69.** 1) Три; 2) три. **73.** 1) $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $2\pi n - \frac{7\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **76.** 1) -1; 2) 0; 3) $-\sqrt{3}$; 4) 1. **77.** 1) $y = \sqrt{3}$; 2) $y = 1$; 3) $y = \sqrt{3}$; 4) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **78.** 1) Принадлежит; 2) не принадлежит; 3) принадлежит; 4) принадлежит. **79.** 2) $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8} < \operatorname{tg}\frac{8\pi}{9}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{5}\right) > \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; 6) $\operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg} 1{,}5$. **80.** 2) $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. **81.** 2) $-\pi \leqslant x < -\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$; 4) $-\pi < x \leqslant -\frac{\pi}{6}$, $0 < x \leqslant \frac{5\pi}{6}$, $\pi < x \leqslant \frac{11\pi}{6}$.
82. 1) а) $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$; б) $[-1;\ \infty)$; в) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\pi; \frac{\pi}{2}\right)$; 2) а) $(-\pi;\ 2\pi)$; б) $\boldsymbol{R}$; в) $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$. **83.** 2) $\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **84.** 2) $-\operatorname{arcctg} 2 + \pi$, $-\operatorname{arcctg} 2 + 2\pi$, $-\operatorname{arcctg} 2 + 3\pi$. **85.** 2) $0 \leqslant x < \operatorname{arctg} 4$, $\frac{\pi}{2} < x < \operatorname{arctg} 4 + \pi$, $\frac{3\pi}{2} < x < \operatorname{arctg} 4 + 2\pi$, $\frac{5\pi}{2} < x \leqslant 3\pi$; 4) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg} 3 + \pi < x < \frac{3\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg} 3 + 2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$, $-\operatorname{arctg} 3 + 3\pi < x \leqslant 3\pi$. **86.** 2) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant \operatorname{arctg} 5 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\operatorname{arctg} 5 + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **87.** 2) Нет корней на промежутке; 4) $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$. **88.** 2) $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{4\pi}{9}$, $-\frac{\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{9}$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{9}$; 4) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. **90.** 2) $y > -1$; 4) $y > 1$, $y < -1$. **94.** 2) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **95.** 1) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} < \arcsin\frac{2}{\sqrt{10}}$; 2) $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) > \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$; 3) $\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} > \arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) > \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$. **96.** 1) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}} < \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) > \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

97. 1) $\operatorname{arctg} 2\sqrt{3} < \operatorname{arctg} 3\sqrt{2}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$; 3) $\operatorname{arcctg}\sqrt{5} > \operatorname{arcctg}\sqrt{7}$; 4) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) < \operatorname{arcctg}(-\sqrt{2})$. **98.** 2) $x = \frac{6-\sqrt{2}}{4}$; 4) $x = -3 - \sqrt{3}$. **99.** 2) $x = -\frac{1}{3}$; 4) $x = -1$. **100.** 2) $x = 1$; 4) $x = 1$. **101.** 1) $1 \leqslant x \leqslant 5$; 2) $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$; 3) $1 \leqslant x \leqslant 4$; 4) $-2 \leqslant x \leqslant -1$, $1 \leqslant x \leqslant 2$; 5) $0 \leqslant x \leqslant 25$; 6) $\frac{1}{9} \leqslant x \leqslant 1$; 8) $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. **108.** 2) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $x \neq \pi n$, $x \neq (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **109.** 2) $-1 \leqslant y \leqslant 1$; 4) $5 \leqslant y \leqslant 7$; 6) $-4 \leqslant y \leqslant -2$. **110.** 2) Нечётная; 4) не является чётной и нечётной. **112.** 2) $\sin(-1) < \cos 1$; 4) $\cos 3 < \operatorname{tg} 4$. **113.** 2) $y = \cos x$; 4) обе. **114.** 2) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. **115.** 1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) $-\frac{\pi}{4}$. **116.** 2) $\left[-\frac{3\pi}{4}; 0\right)$, $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right)$, $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. **117.** 2) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$; 4) π, 3π. **118.** 2) $-\frac{11\pi}{6} < x < -\frac{7\pi}{6}$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - 2\pi \leqslant x < -\frac{3\pi}{2}$. **119.** 1) Два; 2) три. **121.** 2) $\operatorname{tg} 4{,}5$, $\operatorname{tg} 3$, $\operatorname{tg} 2$, $\operatorname{tg} 1{,}8$. **122.** 2) $\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **123.** 2) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$; 4) 1 и -2. **124.** 2) Чётная; 3) нечётная. **125.** 2) 4π. **127.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \frac{2\pi n}{3}$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **128.** 1) $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 3$; 2) $x = -3{,}5$. **129.** $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **131.** 2) $-1 \leqslant y \leqslant \frac{5}{4}$. **132.** 1) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **133.** $90°$.

Глава II

136. 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 1. **138.** 1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\sqrt{\frac{3}{2}}$; 6) $-\frac{1}{2}$. **139.** 1) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$; 2) 2; 3) $\sqrt{3}$; 4) 0. **140.** $\frac{1}{da_1}$. **141.** 1) 0; 2) -6; 3) 3; 4) 7. **142.** 1) 1 и 2; 2) 2 и 1; 3) 0 и 1; 4) -1 и 2. **144.** 1) $x = 2$, $x = -2$; 2) $x = -\frac{3}{2}$; 3) $x = -2$, $x = 1$; 4) $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. **145.** 1) $y = 3$; 2) $y = 5$; 3) $y = -\frac{1}{3}$. **146.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\sqrt{3}$; 6) $\frac{3}{2}$. **147.** 2) Нет; 4) да. **148.** 1) $[-2; 4]$, $[-3; 3]$; 2) $[-2; 5]$, $[-3; 0] \cup [2; 6]$; 3) $[-3; -1) \cup (-1; 3)$, $(0; 4]$; 4) $[-6; 3]$, $(-3; 1]$. **149.** 1) $\boldsymbol{R}$, $\left[-\frac{25}{4}; +\infty\right)$; 2) $\boldsymbol{R}$, $(-\infty; 4]$; 3) $x \neq 1$, $y \neq 0$; 4) $x \neq -1$, $y \neq 1$. **151.** 1) а); 2) $x = -1$ в случаях в) и г); 3) а), б). **152.** а) 1), 4) Да; 2), 3) нет; б) все — нет; в) 1) при $x \neq 2$; 2) при $0 < x < 2$ и при $x > 2$; 3) при $x \neq 2$; 4) при $x \neq 1$. **153.** 1) Нет; 2) нет; 3) да; 4) нет. **155.** 1) 1; 2) $\frac{1}{\pi}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) -1. **156.** 2) $\frac{(x+h-1)-(x-1)}{h}$;

4) $\frac{((x+h)^2+2)-(x^2+2)}{h}$; 6) $\frac{(2(x+h)^3+(x+h))-(2x^3+x)}{h}$. **157.** 2) 5; 4) $6x+5$. **158.** 2) -4; 4) -7. **159.** 2) 5. **160.** 2) $v(2)=0{,}3$, $v(8)=0{,}3$. **161.** 2) $10t$. **162.** 2) 2,91. **163.** 2) $2x-1$; 4) $-54x$; 6) $1{,}8x^2$; 8) $16x$. **164.** 2) $12x+5$; 4) $1-16x$; 6) $-36x^2+18$; 8) $-9x^2+4x-1$. **165.** 2) $f'(0)=-2$, $f'(2)=10$; 4) $f'(0)=1$, $f'(2)=13$. **166.** 2) $x=1{,}5$; 4) $x=-0{,}5$; 6) $x=-1$. **167.** 2) $5x^4-8x^3+3x^2-4x$; 4) $9x^2-24x$. **168.** 2) 44. **169.** 2) 1; 4) $-\frac{5}{18}$. **170.** 2) $\frac{4x^3-3x^2-6x-1}{(x-1)^2}$. **171.** 2) $f(g(x))=\lg\sqrt{x-1}$; 4) $f(g(x))=\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$. **172.** 4) $3(x^3-x^2)^2(3x^2-2x)=3x^5(x-1)^2(3x-2)$. **173.** 2) $x>2$; 4) $x\neq\frac{1}{3}$. **174.** 2) $x<0$, $x>2$. **175.** 2) $x>0{,}5$. **176.** 2) $f(g(x))=|\sin x|$.

177. 1) $g(x)=\frac{2x+3}{x-2}$; $g'(x)=-\frac{7}{(x-2)^2}$; 2) $g(x)=\sqrt{x}$; $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **178.** 2) $3(x^3-2x^2+3x+2)^2(3x^2-4x+3)$. **179.** 2) $12x^{11}$; 4) $21x^2-21x^6$; 6) $3x^2-\frac{2}{x^3}$. **180.** 2) $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt[6]{x^5}}+\frac{1}{2\sqrt[14]{x^{13}}}$; 6) $-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$; 8) $3x^2+\frac{1}{2x\sqrt{x}}$, $x>0$. **181.** 2) $f'(3)=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{9}$, $f'(1)=-\frac{1}{2}$; 4) $f'(3)=\frac{14\sqrt{3}}{9}$, $f'(1)=3$; 6) $f'(3)=0$, $f'(1)=-8$; 8) $f'(3)=24$, $f'(1)=-4$. **182.** 2) $x_1=-4$, $x_2=0$, $x_3=1$; 4) $x_1=-1$, $x_2=1$; 6) $x=1$. **183.** 2) 192; 4) 31,5. **184.** $x_1=-\frac{2}{5}$, $x_2=\frac{16}{11}$, $x_3=3$. **185.** 2) $\frac{3x^4-4x^3+x^2-2x-1}{(x-1)^2}$. **186.** 2) $-6x^{-\frac{5}{2}}$; 4) $\frac{4}{7}x^{-\frac{5}{7}}+\frac{6}{5}x^{-\frac{7}{5}}$; 6) $\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-7x^{-\frac{11}{4}}$. **187.** 2) $\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 4) $\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}}$; 6) $1-\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{6}}+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. **188.** 2) $(x-1)^3(x+1)^6(11x-3)$; 4) $\frac{4}{3}(2x+1)^{-\frac{2}{3}}\times(2x-3)^2(10x+3)$. **189.** 2) $\frac{2(3x^2+3x+2)}{(2x+1)^2}$; 4) $\frac{(x+2)(5x-x^2-4)}{2x\sqrt{x}(2-x)^2}$. **190.** 2) $x_1=0$, $x_2=-1$; 4) $x=3$. **191.** 2) $-1<x<0$, $x>2$; 4) $x>2$; 6) $x>1$. **192.** 3,5 рад/с. **193.** 902,5 Дж. **194.** 2) 103 г/см. **195.** $\frac{2x-5}{2\sqrt{(x-2)(x-3)}}$. **196.** 2) $e^x-\cos x$; 4) $-\frac{2}{x^3}+e^x$; 6) $e^x+\frac{1}{\sin^2 x}$. **197.** 2) $-10e^{2x}$; 4) $-6\cos 2x$; 6) $4e^x+8e^{-2x}$. **198.** 2) $2x^7+9\cos 3x$; 4) $-\frac{10}{x^3}+e^{\frac{x}{4}}$; 6) $\frac{6}{\cos^2 2x}-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. **199.** 2) $-3x^{-\frac{4}{3}}-\cos 4x$; 4) $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}-\sin\frac{x}{5}$. **200.** 2) $6x^2+\frac{3}{2\sqrt{x}}+2\sin 2x$; 4) $16x^7-\frac{9}{\cos^2 3x}-\cos 3x$; 6) $-\frac{1}{5\sin^2 x}-4x^{-\frac{1}{5}}-\frac{1}{2}e^{2x}$. **201.** 2) $7(x-4)^6$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{x+5}}$; 6) $-\frac{3}{(x-1)^4}$; 8) $-(x-4)^{-\frac{4}{3}}$. **202.** 2) $30(5x-4)^5$; 4) $-24(3x-1)^{-3}$;

6) $15(4-3x)^{-6}$. **203.** 2) $\frac{4}{3}(4x+1)^{-\frac{2}{3}}$; 4) $-2(4x+1)^{-\frac{3}{2}}$; 6) $21(2-9x)^{-\frac{4}{3}}$.

204. 2) $-\sin 2x$; 4) $4\sin^3 x\cos x$; 6) $-4x^3e^{-x^4}$; 8) $\frac{1}{x}$.

205. 2) $\frac{2}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}$; 4) $\frac{1}{x}$; 6) $-4\sin(4x)$; 8) $\frac{2}{3}\cos\left(\frac{2x}{3}+1\right)$. **206.** 2) $-\frac{3}{4}\cos\left(\frac{3x}{4}-2\right)$; 4) $-\frac{1}{3}\sin\frac{x-1}{3}$; 6) $\frac{2}{5}\cos\frac{2x+3}{5}$; 8) $-12\cos^3 3x\cdot\sin 3x$; 10) $2\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}\times$ $\times\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\sin^3\frac{x}{2}}{\cos^5\frac{x}{2}}$. **207.** 2) $\frac{8x}{4x^2-3}$; 4) $-\frac{2}{(2x+3)^2}e^{\frac{1}{2x+3}}$; 6) $-\frac{4x+7}{2x^2+7x}$.

208. 2) $4^x\ln 4$; 4) $7^{x-3}\ln 7$; 6) $\frac{1}{x\ln 4}$; 8) $\frac{1}{(x+3)\ln 10}$. **209.** 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $x=-1$; 6) $x=0$; 8) корней нет. **210.** 2) $-\frac{\sqrt{6}}{12\sqrt{1-x}}+\frac{10}{2-5x}$; 4) $\frac{5}{2}\cos\frac{2x+3}{4}+2(x-1)^{-\frac{3}{2}}$; 6) $4(2-x)^{-\frac{5}{3}}-10e^{\frac{3-5x}{2}}$. **211.** 2) $2^{x^2+3x}(2x+3)\ln 2$; 4) $\frac{4}{x^2-4}$. **212.** 2) $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\sin^3 3x+e^{\frac{x}{2}}\cdot 9\sin^2 3x\cdot\cos 3x$; 4) $-2e^{3-2x}\cos(3-2x)-$ $-2e^{3-2x}\sin(2x-3)$. **213.** 2) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}(3^x+1)}-\frac{\sqrt{3x}\,3^x\ln 3}{(3^x+1)^2}$; 4) $\frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$.

214. 2) $\frac{1}{x^2\ln 2}\left(x2^x\ln 2-\frac{1}{\ln 2}-2x+\log_2 x\right)$; 4) $\sin x+\cos x$. **215.** 2) $x_1=1$, $x_2=4$; 4) корней нет. **216.** 2) $x\in\boldsymbol{R}$; 4) $x>2$; 6) $x>3$. **217.** 2) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **218.** 2) 2. **219.** $2(\pi+1)$. **220.** 2) $f'(x)=0$ при $x=e^{-1}$, $f'(x)>0$ при $x>e^{-1}$, $f'(x)<0$ при $0<x<e^{-1}$; 4) $f'(x)=0$ при $x=1$, $f'(x)>0$ при $x>1$, $f'(x)<0$ при $0<x<1$. **221.** $\frac{2x+5}{x^2+5x+6}$. **222.** 2) $y=3x+7$; 4) $y=\frac{x}{3}-$ $-\frac{1}{3}$; 6) $y=-\frac{x}{2}$. **223.** 2) $y=-x-2$; 4) $y=-\sqrt{3}\,x+4\sqrt{3}-3$. **224.** 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 3; 6) 1. **225.** 2) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 6) $\frac{\pi}{4}$. **226.** $f'(x)>0$ в точках A и D, $f'(x)=0$ в точке B и $f'(x)<0$ в точке C. **227.** 2) $y=-6x+12$; 4) $y=\frac{x}{4}+\frac{3}{4}$; 6) $y=x+1$; 8) $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$. **228.** 2) $y=\frac{x}{3}+1$; 4) $y=1$; 6) $y=x$. **229.** 2) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 6) $\frac{\pi}{6}$. **230.** 2) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{2}$. **231.** 2) $y=0$; 4) $y=2x$; 6) $y=\frac{1}{2}x+1$.

232. 2) (1; 2); 4) $\left(\ln 2;\frac{5}{2}\right)$; 6) $(\pi+2\pi n;\ \pi+2\pi n)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **233.** (0; −1), (4; 3). **234.** (1; −1), $y=2x-3$; (1; 0), $y=2x-2$. **235.** 1) $y=\pi+1-x$; 2) $y=3-2x$.

236. 2) Нет; 4) нет. **237.** 2) $-5x^4+6x^2-6x$; 4) $-\frac{6}{x^4}-2x^{-\frac{3}{4}}$; 6) $-21(4-3x)^6$; 8) $2(1-4x)^{-\frac{3}{2}}$; 10) $-3\sin 3x$. **238.** 2) $-\sin x-\frac{1}{\cos^2 x}$; 4) $24x^3-9e^x$; 6) $-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{2x}$. **239.** 2) $2e^{2x}-\frac{1}{x}$; 4) $4\cos\frac{2x}{3}+3e^{1-3x}$. **240.** 2) $x^2(3\ln x+1)$;

4) $2\sin 2x$; 6) $e^x(\cos x - \sin x)$. **241.** 2) $\frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$; 4) $\frac{x\ln x - x + 1}{x(1-x)^2}$.

242. 2) $f'(x)=0$ при $x=-3$, при $x=\frac{6}{5}$, при $x=4$; $f'(x)>0$ при $x<-3$, при $-3<x<\frac{6}{5}$, при $x>4$; $f'(x)<0$ при $\frac{6}{5}<x<4$; 4) $f'(x)=0$ при $x=1$; $f'(x)>0$ при $x>1$; $f'(x)<0$ при $x<0$ и при $0<x<1$. **243.** 2) e; 4) $\frac{1}{2}$.

244. 2) $y=30x-54$; 4) $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. **245.** $s(4)=22$ м, $v(4)=7$ м/с.

246. 2) $3x^2\cos 2x - 2(x^3+1)\sin 2x$; 4) $\frac{(x^4-1)}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}+4x^3\sqrt[3]{x-1}$.

247. 2) $-\frac{x+8}{8x^2\sqrt{x+4}}$; 4) $\frac{2}{\sin 2x - 1}$. **248.** 2) $\frac{x}{2}-e^x+2\cos x$; 4) $x^{-\frac{5}{6}}-x^{-1}-$ $-\frac{1}{3}\sin x$; 6) $3x^2+8x+4+\frac{2}{x}+3\sin x$; 8) $4x+5+e^x-\cos x$. **249.** 2) $x\neq 3$.

250. 2) $x=-\frac{1}{3}$. **251.** 2) $\frac{1}{2}$. **252.** 2) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$; 4) $-4\sin x\cdot\cos^3 x$; 6) $-\frac{3}{\sin^2 3x}$.

253. 2) $\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}$; 4) $-(1+6x^2)\sin(x+2x^3)$; 6) $-e^x\sin e^x$; 8) $-\sin x\cdot 2^{\cos x}\ln 2$.

254. 2) $f'(x)=0$ при $x=0$; $f'(x)>0$ при $x>0$; $f'(x)<0$ при $x<0$; 4) $f'(x)>0$ при $x>-\frac{1}{2}$; 6) $f'(x)=0$ при $x=3$; $f'(x)>0$ при $x>1$; $f'(x)<0$ при $-1<x<3$. **255.** $a\geqslant 3$. **256.** $a<-12$. **257.** 2) $a\leqslant 0$; 4) $a>12$. **258.** 2) $a\geqslant 0$; 4) $a\leqslant 0$. **259.** 2) $\frac{\pi}{4}$. **260.** 2) $y=-\frac{x}{8}\ln 2+\frac{3}{16}+\frac{1}{4}\ln 2$; 4) $y=(1+e^{-1})x$; 6) $y=2\pi(1-x)$. **261.** 2) $y=-\frac{1}{4}$; 4) $y=-7$. **262.** $y=6x+\frac{19}{6}$, $y=6x-54$.

263. 8 кв. ед. **264.** $2k$ кв. ед. **265.** Увеличивается со скоростью 1,2 Град/с.

266. 1) $f(t_2)-f(t_1)$; 2) $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$; 3) $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$.

Глава III

267. 2) Возрастает при $x>5$, убывает при $x<5$; 4) возрастает при $x<-3$ и при $x>2$, убывает при $-3<x<2$. **268.** 2) Возрастает при $x<1$, убывает при $x>1$; 4) возрастает при $-1<x<0$ и при $x>1$, убывает при $x<-1$ и при $0<x<1$. **269.** 2) $x<0$ и $x>0$ — промежутки убывания; 4) возрастает при $x\geqslant 5$; 6) возрастает на $\boldsymbol{R}$. **270.** 2) Возрастает при $x\leqslant-\frac{3}{2}$ и при $x\geqslant-\frac{1}{2}$, убывает при $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2}$; 4) возрастает при $x\leqslant\frac{1}{3}$, убывает при $x\geqslant\frac{1}{3}$.

271. Возрастает при $-1\leqslant x\leqslant 3$, убывает при $-5\leqslant x\leqslant -1$ и при $3\leqslant x\leqslant 5$.

272. 1) $a\leqslant 0$; 2) $a\geqslant 1$. **275.** 2) $x=7$; 4) $x_1=-6$, $x_2=6$; 6) $x=0$; 8) $x=\pi n$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **276.** 2) $x=1$; 4) $x_1=0$, $x_2=3$. **277.** 2) $x=-6$ — точка минимума; 4) $x=-8$ — точка максимума, $x=8$ — точка минимума; 6) $x_1=-2$, $x_2=2$ — точки минимума, $x=0$ — точка максимума; 8) $x=$ $=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, — точки максимума, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, — точки минимума. **278.** 2) Экстремумов нет; 4) экстремумов нет; 6) $x=-1$ — точка максимума; 8) $x=4$ — точка минимума. **279.** Функция возрастает на промежутках $-6 \leqslant x \leqslant -4$ и $0 \leqslant x \leqslant 3$, убывает на промежутках $-7 \leqslant x \leqslant -6$ и $-4 \leqslant x \leqslant 0$; $x=-6$ и $x=0$ — точки минимума, $x=-4$ — точка максимума. **280.** 1) $x=-3$ — точка минимума; 2) $x=\frac{25}{4}$ — точка максимума; 3) $x=\frac{9}{2}$ — точка максимума, $x=5$ — точка минимума; 4) $x=-3$ — точка максимума, $x=1$ — точка минимума. **281.** 2) 3 и -13; 4) 9 и -2. **282.** 2) 2 и $-\frac{1}{4}$. **283.** 2) $\frac{3}{2}$ и -3. **284.** 2) 1; 4) -2. **285.** 2) 4. **286.** $50 = 25+25$. **287.** $625=25\cdot 25$. **288.** Квадрат со стороной $\frac{p}{4}$. **289.** Квадрат со стороной 3 см. **290.** 2) $2+e^{-2}$ и 1. **291.** 2) $\sqrt{2}$ и 1. **292.** 2) 1; 4) -1. **293.** 2) 1. **294.** 2) 1. **295.** 2) $5+\frac{3}{2}\ln 2$ и 0. **296.** 2) 1 и -7. **297.** 2. **298.** Квадрат со стороной $\frac{p}{4}$. **299.** Куб со стороной $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **300.** -2. **301.** $\frac{32}{27}$. **302.** $y=-\frac{1}{16}(x-8)^2$. **303.** 2) $x(6-x^2)\sin x+6x^2\cos x$; 4) $12x^2-18x$; 6) $\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. **304.** 2) Выпукла вверх на интервале $-1<x<1$ и выпукла вниз на интервалах $x<-1$ и $x>1$. **305.** 4) $x_1=0$, $x_2=-\frac{\pi}{3}$, $x_3=\frac{\pi}{3}$. **306.** 2) Выпукла вверх на интервале $0<x<1$, выпукла вниз на интервале $x>1$. **307.** 1) $x=\frac{2}{3}$; 2) $x_1=2$, $x_2=4$; 3) $x_1=0$, $x_2=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$, $x_3=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$; 4) $x=e^{-\frac{3}{2}}$. **308.** 2) $y=-(x+1)^2\cdot(x-2)$, $y'=3(1-x^2)$, $y''=-6x$; точки пересечения графика с осями координат: $(-1;\ 0)$, $(2;\ 0)$, $(0;\ 2)$; минимум $y=0$ при $x=-1$, максимум $y=4$ при $x=1$; $x=0$ — точка перегиба; 4) $y'=3(x+1)(x+3)$, $y''=6(x+2)$; точки пересечения графика с осями координат: $(-3;\ 0)$, $(0;\ 0)$; максимум $y=0$ при $x=-3$, минимум $y=-4$ при $x=-1$; $x=-2$ — точка перегиба. **309.** 2) $y'=\frac{4}{9}x^2(x+3)$, $y''=\frac{4}{3}x(x+2)$; точки пересечения графика с осями координат: $(0;\ 0)$, $(-4;\ 0)$; $y>0$ при $x<-4$ и $x>0$, $y<0$ при $-4<x<0$; минимум $y=-3$ при $x=-3$; $x=-2$ и $x=0$ — точки перегиба; 4) функция чётная, точки пересечения графика с осями координат: $(0;\ 0)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}};0\right)$, $\left(\sqrt{\frac{3}{2}};0\right)$; $y>0$ при $|x|<\sqrt{\frac{3}{2}}$ и $y<0$ при $|x|>\sqrt{\frac{3}{2}}$; $y'=24x^3(1-x^2)$, $x=0$ — точка максимума, $y(0)=0$; $x=\pm 1$ — точки минимума, $y(\pm 1)=2$; $y''=24x^2(3-5x^2)$; $x=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$ — точки перегиба. **310.** 2) $x=-4$, $y=x-4$; 4) $x=-3$, $y=x-6$. **311.** 1) $x=1$, $y=x+11$; 2) $y=x+2$ при $x\to+\infty$, $y=-x-2$ при $x\to-\infty$. **312.** 2) Функция нечётная; точки пересечения графика с осями координат: $(0;\ 0)$, $\left(\sqrt{\frac{5}{3}};0\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}};0\right)$; $y>0$ при $x>\sqrt{\frac{5}{3}}$ и $-\sqrt{\frac{5}{3}}<x<0$, $y<0$ при $x<-\sqrt{\frac{5}{3}}$ и $0<x<\sqrt{\frac{5}{3}}$; $y'=15x^2(x^2-1)$, $x=-1$ — точка минимума, $y(-1)=-2$; $x=1$ —

точка минимума, $y(1) = -2$; $y'' = 30x(2x^2 - 1)$, $x = 0$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ — точки перегиба; 4) $y' = (x-1)^2(x+1)(5x^2+6x+1)$; точки пересечения графика с осями координат: $(-1;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $(0;\ -1)$; $x = -1$ — точка максимума, $y(-1) = 0$; $x = -\frac{1}{5}$ — точка минимума, $y\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{3456}{3125}$; точки перегиба: $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{5}$. **313.** 2) $y' = 1 + \frac{9}{x^2}$ — экстремумов нет, $y = x$ — асимптота при $x \to \infty$, $x = 0$ — асимптота; функция нечётная, $(-3;\ 0)$ и $(3;\ 0)$ — точки пересечения графика с координатными осями; 4) $(1;\ 0)$ — точка пересечения графика с осью Ox, $x = 0$ и $y = x$ — асимптоты. **314.** 2) $y = (x+1)(x-1)(x-3)$; $(-1;\ 0)$, $(1;\ 0)$, $(3;\ 0)$, $(0;\ 3)$ — точки пересечения графика функции с координатными осями; $y' = 3x^2 - 6x - 1$; $x_1 = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ — точка максимума; $y(x_1) = \frac{20\sqrt{3}}{9}$, $x_2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ — точка минимума; $y'' = 6(x-1)$, $x = 1$ — точка перегиба. **315.** 2) $y = -x + 3 - \frac{1}{x}$, асимптоты $x = 0$ и $y = -x + 3$; $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ и $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ — точки пересечения графика с осью Ox; $y' = -1 + \frac{1}{x^2}$, $x = -1$ — точка минимума; $y(-1) = 5$, $x = 1$ — точка максимума, $y(1) = 1$; 4) асимптоты $x = 2$ и $y = -2$; точки пересечения графика с осями координат: $\left(\frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}; 0\right)$ и $(0;\ 1)$; $y' = \frac{7x - 10}{(x-2)^3}$, $x = \frac{10}{7}$ — точка максимума, $y\left(\frac{10}{7}\right) = \frac{33}{8}$; $\left(\frac{8}{7}; \frac{31}{9}\right)$ — точка перегиба; 6) функция нечётная; $x = \pm 1$ и $y = x$ — асимптоты, $y' = \frac{x^2(x^2-3)}{x^2-1}$, $x = \sqrt{3}$ — точка минимума, $y\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $x = -\sqrt{3}$ — точка максимума, $y\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$; $x = 0$ — точка перегиба. **316.** 2) Асимптоты $x = 0$ и $y = x + 3$; $y' = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}$, $x = 2$ — точка минимума, $y(2) = \frac{27}{4}$, $x = -1$ — точка перегиба; 4) асимптоты $x = -2$ и $y = 0$; $y' = \frac{x(4-x)}{(x+2)^4}$, $x = 0$ — точка минимума, $y(0) = 0$, $x = 4$ — точка максимума; $y(4) = \frac{2}{27}$, $y'' = \frac{2(x^2 - 8x + 4)}{(x+2)^5}$, $x = 4 \pm 2\sqrt{3}$ — точка перегиба. **317.** 2) $(1;\ 0)$ и $(0;\ -1)$ — точки пересечения графика с координатными осями; $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$, функция возрастает на $\boldsymbol{R}$; $f''(x) = 6x - 2$, $x = \frac{1}{3}$ — точка перегиба. **318.** Один. **319.** 2) Возрастает при $x < -1$ и $x > 2$, убывает при $-1 < x < 2$; 4) убывает при $x < 3$ и $x > 3$. **320.** 2) $x_1 = 0$,

$x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$; 4) $x = \pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **321.** 2) $x = 1$ — точка минимума. **322.** 2) $x = 0$ — точка максимума, $y(0) = -3$; $x = 2$ —точка минимума, $y(2) = -12{,}6$. **323.** 2) Точки пересечения графика с осями координат: (0; 0), $(\pm\sqrt{6}; 0)$; функция чётная; $y' = \frac{x^3}{4}(4 - x^2)$, $x = 0$ — точка минимума, $x = \pm 2$ — точки максимума; $y(\pm 2) = \frac{4}{3}$, $y'' = \frac{x^2}{4}(12 - 5x^2)$, $x = \pm\sqrt{\frac{12}{5}}$ — точки перегиба; 4) точки пересечения с осями координат: (0; 0), (± 2; 0); функция чётная; $y' = x(2 - x^2)$, $x = 0$ — точка минимума, $x = \pm\sqrt{2}$ — точки максимума; $y(\pm\sqrt{2}) = 1$, $y'' = -3x^2 + 2$, $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ — точки перегиба. **324.** 2) Точки пересечения с осями координат: (0; 0), $\left(\frac{8}{3}; 0\right)$; $y(-1) = \frac{11}{12}$, $y(3) = \frac{9}{4}$; $y' = x^2(x - 2)$, $x = 2$ — точка минимума, $y(2) = -\frac{4}{3}$; $y'' = x(3x - 4)$, $x = 0$ и $x = \frac{4}{3}$ — точки перегиба, $y\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{31}$. **325.** 2) 0 и -4; 4) 14 и -11. **327.** Равносторонний треугольник со стороной $\frac{p}{3}$. **328.** Куб с ребром 10 см. **329.** 1) $x = 0$, $y = x - 3$; 2) $x = 1$, $y = x$. **332.** 2) $x = -1$ — точка минимума; 4) $x = -3$ — точка максимума, $x = \frac{9}{2}$ — точка минимума. **333.** 2) $y = 0$ — асимптота; $x = 0$ — точка максимума, $y(0) = \frac{1}{2}$; функция чётная; 4) $y' = (x - 1)^2(4x - 1)$, $x = \frac{1}{4}$ — точка минимума, $y\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{256}$. **334.** 2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 4) 3 и 1. **335.** 2) $\frac{1}{2}$. **336.** 12. **337.** Катеты $\frac{l}{3}$ и $\frac{l}{\sqrt{3}}$, гипотенуза $\frac{2l}{3}$. **338.** 2) (2; 13); 4) (-1; 8). **339.** 9. **340.** $\frac{p}{\pi + 4}$. **341.** $x = a$. **342.** $\frac{a}{6}$. **343.** $\frac{S^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{6\pi}}$. **344.** $\pi(\sqrt{5} + 1)R^2$. **345.** $x = -\sqrt{2}$ — точка максимума, $x = \sqrt{2}$ — точка минимума. **346.** 2) Область определения: $x \leqslant 0$ и $x \geqslant 2$; (0; 0) — точка пересечения с осями координат; асимптоты $y = 1$ при $x \to +\infty$ и $y = 2x - 1$ при $x \to -\infty$; функция возрастает при $x \leqslant 0$ и убывает при $x \geqslant 2$; выпукла вниз; 4) асимптота $y = 0$ при $x \to +\infty$; (0; 0) — точка пересечения с осями координат; $x = 3$ — точка максимума, $y(3) = 27e^{-3} \approx 1{,}3$; $x_1 = 3 - \sqrt{3}$ и $x_2 = 3 + \sqrt{3}$ — точки перегиба; 6) (0; 0) — точка пересечения с осями координат; асимптоты $x = -1$ и $y = x - 3$; минимум $y = 0$ при $x = 0$, максимум $y = -\frac{256}{27}$ при $x = -4$. **347.** $\operatorname{arctg} k$. **348.** $T \approx 44\,^\circ$C. **349.** На расстоянии 3 км от посёлка. **350.** Разметка верна. **351.** $\frac{\sqrt{2} \cdot |a - b|}{2}$.

Глава IV

354. 2) $\frac{x^6}{6}+C$; 4) $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+C$; 6) $4x^{\frac{1}{4}}+C$. **355.** 2) $\frac{x^2}{2}+\frac{5}{2}$; 4) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-8$. **356.** 2) $x^5+\frac{x^4}{2}+C$; 4) $2x^3-2x^2+3x+C$; 6) $3x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{3}{2}}+C$; 8) $-\frac{1}{x^2}-3\ln|x|+C$. **357.** 1) $2\sin x-5\cos x+C$; 2) $3e^x+\cos x+C$; 3) $x+3e^x-4\sin x+C$; 4) $8\sqrt{x}+3\ln|x|-2e^x+C$. **358.** 2) $\frac{1}{5}(x-2)^5+C$; 4) $\frac{9}{2}(x+3)^{\frac{2}{3}}+C$; 6) $3\ln|x-3|+2\cos(x-1)+C$. **359.** 2) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x+2\right)^6+C$; 4) $\frac{4}{21}(3x-1)^{\frac{7}{4}}+C$; 6) $2\sqrt{4x+1}+C$; 8) $-\frac{1}{4}(2-3x)^{\frac{4}{3}}+C$. **360.** 1) $\frac{1}{3}\sin(3x+4)+C$; 2) $-\frac{1}{3}\cos(3x-4)+C$; 4) $-4\cos\left(\frac{x}{4}+5\right)+C$; 6) $\frac{1}{3}e^{3x-5}+C$. **361.** 2) $3e^{\frac{x}{3}}-\frac{1}{3}\cos3x+C$; 4) $21\sin\frac{x}{7}+\frac{2}{3}e^{3x-\frac{1}{2}}+C$; 6) $\frac{10}{3}\left(\frac{x}{5}\right)^{\frac{3}{2}}-\cos(4x+2)+C$; 8) $\frac{8}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{3}{2}\ln|2x-5|+C$. **362.** 2) $\frac{3}{10}x^4-\frac{3}{10}x^2+\frac{2}{5}x+C$; 4) $\frac{3}{2}x^2+5\ln|x|+C$; 6) $x^2-\frac{2}{3}x^3+C$; 8) $2x^3-\frac{5}{2}x^2-6x+C$. **363.** 2) $\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}+C$; 4) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-6x^{\frac{1}{2}}+C$. **364.** 2) $2x^2-x$; 4) $2\sqrt{x+3}-3$; 6) $\frac{1}{3}\sin3x$; 8) $1-\frac{1}{x+1}$. **365.** 1) $12\frac{1}{3}$; 2) 6; 4) $12\frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{2}$. **366.** 2) 4; 4) 12; 6) 18; 8) $1-\ln2$. **367.** 1) 9; 2) 5; 3) $\frac{3}{8}$; 4) 2. **368.** 2) 1; 3) 2; 4) 0. **369.** 2) 11; 4) $\frac{8}{3}$; 6) 32; 8) 10. **370.** 2) 25; 4) $8\frac{2}{3}$; 6) 2; 8) $1+\frac{\sqrt3}{2}$. **371.** 2) $4\frac{5}{6}$; 4) 5. **372.** 2) 68; 4) $4\sqrt3$; 6) -3. **373.** 2) 8. **374.** 2) e^6-e^2; 4) $\frac{4}{3}\ln4$. **375.** 2) 0; 4) $\frac{4\pi-3\sqrt3}{24}$. **376.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $1\frac{1}{3}$; 3) $4\frac{1}{2}$; 4) $4\frac{1}{2}$. **377.** 2) $6\frac{1}{6}$; 4) 4; 6) 8. **378.** 2) $2-\sqrt2$; 4) $\frac{11}{12}$. **379.** 2) $9\frac{1}{3}$; 4) 8; 6) $2+\frac{\pi}{6}-\sqrt3$. **380.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $\frac{\sqrt2}{2}$. **381.** 2) 4,5. **382.** 1) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $20\frac{5}{6}$; 5) $\frac{\pi}{2}-1$. **383.** 2) $\frac{8\sqrt2}{3}$; 4) $\frac{\sqrt3}{6}$; 6) $6\frac{1}{3}$. **384.** 2) $21\frac{1}{3}$ м; 4) $44\frac{1}{6}$ м. **385.** $10\frac{2}{3}$ м. **386.** 2) $y=2x^3-4x^2+x+C$; 4) $y=2\sin2x+C$. **387.** 2) $y=\sin x+\cos x+C$; 4) $y=x^3-2e^{2x}+C$. **388.** 2) $y=2\sin x+1$; 4) $y=2x+x^2-x^3+2$; 6) $y=3-e^{-x}$. **390.** 2) $-\cos x-1$; 4) e^x+1; 6) $2x-x^2+3$. **391.** 2) $\frac{\sqrt3}{2}$; 4) $1\frac{151}{192}$; 6) $\frac{4}{9}$. **392.** 2) 12; 4) -2; 6) $\frac{3}{8}$; 8) 2. **393.** 2) 0; 4) -3; 6) $8\frac{2}{3}$. **394.** 2) $-\frac{1}{6}$;

4) $2\sin 12$. **395.** 2) 1; 4) $1\frac{1}{3}$. **396.** 2) $2\frac{2}{3}$; 4) $\frac{8}{9}$. **397.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $4\ln 3-2$. **398.** 1) $10\frac{1}{4}$; 2) $3\frac{8}{15}$. **399.** $k=p$. **400.** $l\approx 4$ см. **401.** $h\approx 53$ см. **402.** $\frac{mgRh}{R+h}$. **403.** $\nu RT\ln\frac{V_2}{V_1}$, где R — универсальная газовая постоянная. **404.** 1) $F'(x)=-\sigma_0\cdot F(x)$; 2) $F(x)=F(0)e^{-\sigma_0 x}$; 3) $\frac{\lg 2}{\sigma_0}$.

Глава V

409. 1) 6; 2) 24. **410.** 1) 27; 2) 64. **411.** 16. **412.** 6. **413.** 240. **414.** 720. **415.** 6840. **416.** 50 000. **417.** 90. **418.** 45. **419.** 30 000. **420.** 4 536 000. **421.** 720. **422.** 1) 720; 2) 40 320; 3) 5040; 4) 362 880. **423.** 24. **424.** 5040. **425.** 1) 24; 2) 6; 3) 12. **426.** 1) 8!; 2) 16!; 3) 14!; 4) $(k+1)!$; 5) $k!$; 6) $(k+1)!$; 7) $k!$; 8) $(k-3)!$. **427.** 1) 19; 2) 462; 3) $\frac{3}{7}$; 4) 15; 5) n^2+3n+2; 6) $\frac{1}{n^2+5n+6}$; 7) $\frac{1}{m+2}$; 8) $\frac{1}{k+6}$. **428.** 1) $n=2$; 2) $n=11$; 3) корней нет. **429.** P_{11}. **430.** 96. **431.** 1) 725 760; 2) 241 920. **432.** 1) 12; 2) 12; 3) 60; 4) 30; 5) 840; 6) 420; 7) 151 200; 8) 10 080. **433.** 90. **434.** $\approx 10^{60}$. **435.** 1) 3; 2) 6; 3) 42; 4) 5040; 5) 5336; 6) 1680; 7) 90; 8) 5040. **436.** 60 480. **437.** 360. **438.** 870. **439.** 720. **440.** 1) 100; 2) 3. **441.** 1) $m=10$; 2) $m=9$; 3) $m=12$; 4) $m_1=9$, $m_2=10$. **442.** $10(11-n)$. **443.** 336. **445.** 1) 15; 2) 56; 3) 28; 4) 56; 5) 9; 6) 9; 7) 1; 8) 1; 9) 120; 10) 120; 11) 4950; 12) 2415. **446.** 84. **447.** 286. **448.** 190. **449.** 105. **450.** 220. **451.** C_n^p. **452.** 1) $1+7x+21x^2+35x^3+35x^4+21x^5+7x^6+x^7$; 2) $x^4-8x^3+24x^2-32x+16$; 3) $16x^4+96x^3+216x^2+216x+81$; 4) $81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$; 5) $32a^5-40a^4+20a^3-5a^2+\frac{5}{8}a-\frac{1}{32}$; 6) $\frac{a^6}{64}+\frac{3}{8}a^5+\frac{15}{4}a^4+20a^3+60a^2+96a+64$. **453.** 60. **454.** 1) $m_1=4$, $m_2=8$; 2) $m=8$; 3) $m_1=3$, $m_2=14$; 4) $m=5$. **455.** 1) 560; 2) 220; 3) 1140; 4) 4950. **456.** 1) 32; 2) 62. **457.** 1) $x=9$; 2) $x=10$. **459.** 150. **460.** $C_{13}^3\cdot C_{13}^4\cdot C_{13}^5\cdot C_{13}^2$. **461.** $C_{10}^3\cdot x^2$. **462.** $C_{16}^6\cdot x^3$. **463.** C_k^2. **464.** $C_{32}^{12}\cdot C_{20}^{12}$. **466.** 1) 84; 2) 126; 3) 45; 4) 10. **467.** 20 способами. **468.** 120 способами. **469.** 120. **470.** 1) 48; 2) 36; 3) 124; 4) 1090. **471.** 1) n^2+3n+2; 2) $\frac{n}{n+1}$. **472.** 1) 47; 2) 10. **473.** 1) $n=2$; 2) $n=7$; 3) $n=4$; 4) $n=11$; 5) $n=7$; 6) $n_1=4$, $n_2=9$. **474.** 40 320. **475.** 28. **476.** 56. **477.** 59280. **478.** 15 800. **479.** 5; 14; $\frac{n(n-3)}{2}$. **480.** 1) 364; 2) 455. **481.** 1) 16; 2) 64. **482.** 1) $x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1$; 2) $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$; 3) $16-32a+24a^2-8a^3+a^4$; 4) $a^4+12a^3+54a^2+108a+81$. **484.** 350. **485.** 2^{32}. **486.** 3 800 000. **487.** 252. **488.** 1) 1001; 2) 462; 3) 35; 4) 56; 5) 64; 6) 262. **489.** 1) $32a^5-80a^4+80a^3-40a^2+10a-1$; 2) $\frac{1}{64}+\frac{3}{8}b+\frac{15}{4}b^2+20b^3+60b^4+96b^5+64b^6$; 3) $81x^4+36x^3+6x^2+\frac{4}{9}x+\frac{1}{81}$; 4) $\frac{1}{243}y^5-\frac{5}{27}y^4+\frac{10}{3}y^3-30y^2+135y-243$. **490.** $8!-1$.

491. 6720 способами. **492.** 1) 9; 2) 16. **493.** 1) 1,016; 2) 0,973. **494.** 15625. **495.** m^N. **496.** Пять значений: $R_1+R_2+R_3$; $\frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}$; $R_1+\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}$; $R_2+\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}$; $R_3+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. **497.** 12.

498. 3136 способами. **499.** 306. **500.** $\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$. **501.** $\frac{C_4^2\cdot C_{32}^{16}}{2}$. **502.** Можно.

503. $364x^4$. **504.** $C_{12}^6\cdot\frac{1}{x}$. **505.** 570 способами. **507.** 1) 20; 2) 26. **508.** 84 способами.

Глава VI

509. 1) Невозможное; 2) случайное; 3) достоверное. **510.** 1) Являются; 2) не являются; 3) не являются; 4) являются. **511.** 1) Сегодня первый урок — не физика; 2) экзамен сдан не на «отлично»; 3) на игральной кости выпало не меньше пяти очков; 4) ни одна пуля не попала в цель.

512. 1) AB; 2) $A+B$; 3) $A\bar{B}+\bar{A}B$; 4) $\bar{A}\bar{B}$; 5) $\bar{A}B$. **513.** $\frac{1}{3}$. **514.** $\frac{2}{61}$.

515. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{7}{12}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{3}{4}$; 7) 1; 8) 0. **516.** $\frac{C_{95}^3}{C_{100}^3}\approx 0{,}86$.

517. 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{72}$; 3) $\frac{1}{36}$. **518.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{7}{12}$. **519.** 1) $\frac{1}{35}$; 2) $\frac{12}{35}$;

3) $\frac{22}{35}$. **520.** $\frac{5}{12}$. **521.** $\frac{21}{64}$. **522.** $\frac{2}{9}$. **523.** $\frac{2}{3}$. **524.** $\frac{5}{6}$. **525.** 0,99999999.

526. $\frac{3}{4}$. **527.** $\frac{26}{33}$. **528.** $\frac{181}{385}$. **529.** 1) 0,94; 2) 0,06. **531.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$;

4) $\frac{1}{3}$. **532.** 1) $\frac{8}{9}$; 2) $\frac{8}{45}$. **533.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{5}{18}$. **534.** 1) $\frac{17}{70}$; 2) $\frac{18}{70}$; 3) $\frac{18}{35}$.

535. 1) Являются; 2) являются; 3) являются; 4) не являются. **536.** $\frac{5}{21}$.

537. $\frac{49}{2475}$. **538.** 1) $\frac{161}{267}$; 2) $\frac{70}{89}$. **539.** 0,36. **540.** 0,42. **541.** 1) 0,15; 2) 0,1.

542. $\frac{1}{8}$. **543.** $\frac{1}{9}$. **544.** $\frac{1}{3}$. **545.** 0,91. **546.** 0,44. **547.** 68,6%. **548.** 0,144.

549. $\frac{1}{75}$. **550.** 1) $\frac{105}{512}$; 2) $\frac{63}{256}$. **551.** 1) $\frac{625}{3888}$; 2) $\frac{25}{7776}$. **552.** $\frac{7}{432}$.

553. 0,973. **554.** $\frac{1}{3}$. **555.** $\frac{1}{2}$. **556.** $\frac{5}{36}$. **557.** $\frac{1}{90}$. **558.** $\frac{5}{6}$. **559.** $\frac{1}{12}$.

560. 0,02. **561.** $\frac{1}{6}$. **562.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{7}{12}$. **563.** $\frac{11}{36}$. **564.** 1) $\frac{1}{105}$; 2) $\frac{4}{315}$;

3) $\frac{2}{35}$; 4) $\frac{4}{35}$. **565.** 1) $\frac{9}{38}$; 2) $\frac{5}{19}$; 3) $\frac{10}{19}$. **566.** $\frac{7}{8}$. **567.** $\frac{7}{18}$.

568. $\dfrac{C_{90}^3}{C_{100}^3} \approx 0{,}729$. **569.** $1 - \dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$. **570.** 1) $\dfrac{1}{C_{49}^6}$; 2) $\dfrac{258}{C_{49}^6}$. **571.** 0,972. **572.** 0,316. **573.** 1) $P \approx 0{,}0038$; 2) $P \approx 0{,}9999$. **574.** $\dfrac{C_n^p \cdot C_{m-n}^{k-p}}{C_m^k}$. **575.** $\dfrac{C_4^2 \cdot C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}} = \dfrac{325}{833}$. **576.** $\dfrac{2C_5^5 \cdot C_{13}^4}{C_{18}^9} = \dfrac{1}{34}$. **577.** 2) $\dfrac{7}{64}$; 4) $\dfrac{37}{256}$. **578.** 2) $\dfrac{125}{3888}$; 4) $\dfrac{13}{3888}$. **579.** $\dfrac{7}{128}$.

Глава VII

581. 1) $2 + 5i$; 2) $2{,}3 - 1{,}7i$; 3) $-6i$; 4) -6. **584.** 1-ое и 3-е, 2-ое и 4-ое. **585.** 1) $3 + 7i$; 2) $7 - 2i$; 3) $2 - 4i$; 4) $-1 + i$; 5) 6; 6) $-i$. **586.** 1) $-7 + 22i$; 2) $3 - 11i$; 3) $-13i$; 4) 10; 5) $5 + 5i$; 6) $-7 + 6\sqrt{2}i$. **587.** 1) $5 - 5i$; 2) $-3 + 4i$; 3) $10i$; 4) -29; 5) $6 - 3\sqrt{3}i$; 6) $2 + 3i$. **588.** 2) Например, $-7{,}5$. **589.** 1) $x = \dfrac{4}{3}$, $y = \dfrac{1}{2}$; 2) $x = -1$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $x = -2$, $y = -8{,}3$; 4) $x = -0{,}5$, $y = 1$; 5) $x = 2$, $y = 1$; 6) $x = 1$, $y = -2$. **590.** 1) $2a - 2bi$; 2) $-4a$; 3) $a^2 + 9b^2$; 4) $4a^2 + b^2$; 5) $(4b^2 + 9a^2)i$; 6) $(9a^2 + 16b^2)i$. **591.** 1) 0; $-\dfrac{1}{3}$; 2) 0; 3. **592.** (3; 4), (3; 5), (4; 4), (4; 5). **593.** 1) $x = -1$, $y = 1$; 2) $x = 1$, $y = 0$; 3) $x = 2$, $y = 3$; 4) $x = 1$, $y = \dfrac{1}{2}$. **595.** 1) $1 - i$; 2) $3 - 4i$; 3) $-2 - 5i$; 4) $-6 + 3i$; 5) $-0{,}7 + 1{,}3i$; 6) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}i$. **596.** 1) 10; 2) 10; 3) 2; 4) $\sqrt{5}$; 5) 5; 6) 2; 7) $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$; 8) $\dfrac{5}{7}$. **597.** 1) $-5 - 3i$; 2) $-4 + 2i$; 3) $3 - i$; 4) $\sqrt{2} + 7i$. **598.** 1) $2 + i$; 2) $-3 - 9i$; 3) $2i$; 4) 2; 5) $3 - i$; 6) $-i$; 7) $-2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}i$; 8) $2\sqrt{5} - 5\sqrt{3}i$. **599.** 1) $6 - 6i$; 2) $-1 - 4i$; 3) $3i$; 4) -1. **600.** 1) $-i$; 2) $-\dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}i$; 3) $-1 + i$; 4) $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$; 5) $\dfrac{28}{37} - \dfrac{17}{37}i$; 6) $-1 + 2i$. **601.** 1) $-\dfrac{5}{2} - \dfrac{15}{2}i$; 2) i; 3) $\dfrac{3}{25} - \dfrac{1}{25}i$; 4) $\dfrac{1}{25} - \dfrac{11}{50}i$; 5) 0; 6) $-\dfrac{22}{17}i$. **602.** 1) 7; 2) 9; 3) 1; 4) 1. **603.** $x_1 = -2$, $y_1 = -2$; $x_2 = -2$, $y_2 = 2$. **604.** $-2{,}5$; 2. **605.** 1) $z = -5 - i$; 2) $z = \sqrt{5} - 4\sqrt{3}i$; 3) $z = 2 + i$; 4) $z = 6 + (\sqrt{2} - 6)i$. **606.** 1) $z = -\dfrac{1}{13} + \dfrac{8}{13}i$; 2) $z = -\dfrac{23}{13} + \dfrac{2}{13}i$; 3) $z = 2i$; 4) $z = 4 - 3i$. **607.** 1) $5 - 12i$; 2) $-11 - 2i$; 3) -4; 4) $8i$; 5) $4i$; 6) -1. **608.** 1) $-\dfrac{18}{25} + \dfrac{173}{50}i$; 2) $\dfrac{22}{159} - \dfrac{5}{318}i$. **609.** 1) $z = 2 - \dfrac{3}{2}i$; 2) $z_1 = 0$, $z_2 = -3i$, $z_3 = 3i$. **610.** 1) -1; 2) $-i$. **612.** 1) 16; 2) -64. **617.** 1) $z = 2 - 6i$; 2) $z = -3 + 2i$. **618.** 1) 10; 2) 9; 3) $\sqrt{5}$; 4) $2\sqrt{2}$. **619.** 1) Окружность радиуса $R = 5$ с центром в точке $z = 0$; 2) окружность радиуса $R = 3$ с центром в точке $z = 1$; 3) окружность радиуса $R = 1$ с центром в точке $z = -3i$; 4) окружность радиуса $R = 2$ с центром в точке $z = 1 - 2i$; 5) прямая, перпендикулярная отрезку, соединяющему точки 2 и $-i$, и проходящая через его середину; 6) прямая, перпендикулярная отрезку, соединяющему точки $1 + i$

и $-1-i$, и проходящая через его середину. **620.** 1) Множество точек, лежащих внутри круга радиуса $R=3$ с центром в точке $z=i$; 2) множество точек, лежащих вне круга радиуса $R=4$ с центром в точке $z=-3i$; 3) кольцо между двумя окружностями радиусов 1 и 2 с общим центром в точке -2 (исключая точки окружности); 4) кольцо между двумя окружностями радиусов 2 и 3 с общим центром в точке $5i$ (включая точки окружности). **621.** 1) $z_1=-\frac{3}{2}-\frac{17}{4}i$, $z_2=-\frac{3}{2}-2i$; 2) $z_1=5-5i$, $z_2=-5+5i$, $z_3=\sqrt{26}-\sqrt{26}\,i$, $z_4=-\sqrt{26}+\sqrt{26}\,i$. **623.** $z_1=6+17i$, $z_2=6+8i$. **624.** 1) $2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; 2) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; 5) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; 6) $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; 7) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$; 8) $\frac{4\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. **625.** 1) $z=3(\cos 0+i\sin 0)$; 2) $z=\cos\pi+i\sin\pi$; 3) $z=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 5) $z=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; 6) $z=5\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$; 7) $z=\sqrt{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; 8) $z=\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$. **626.** 1) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 2) $z=3$; 3) $z=-1+i$; 4) $z=4i$; 5) $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; 6) $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **627.** 1) $\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right)$; 2) $12\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$; 3) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{8\pi}{7}+i\sin\frac{8\pi}{7}\right)$; 4) $3\left(\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}\right)$. **628** 1) и 3). **629.** 1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\frac{1}{2}(\cos 0+i\sin 0)$; 3) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; 4) $\frac{9}{10}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. **631.** 1) $\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$; 2) $5(\cos 220^\circ+i\sin 220^\circ)$; 3) $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $-2\cos\frac{6\pi}{7}\left(\cos\frac{13\pi}{7}+i\sin\frac{13\pi}{7}\right)$. **632.** 1) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$; 2) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 3) $2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 4) $12\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 5) $2(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)$; 6) $\cos 10+i\sin 10$. **633.** 1) $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$; 2) $4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$; 4) $\frac{1}{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$; 5) $2(\cos(-30^\circ)+i\sin(-30^\circ))$; 6) $\cos 5+i\sin 5$. **634.** 1) 8; 2) -1; 3) $\frac{1}{16}i$; 4) i. **635.** 1) 1; 2) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 3) $-128i$; 4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$; 5) $\frac{1}{64}-\frac{\sqrt{3}}{64}i$; 6) -2. **636.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $3\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; 3) $8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; 4) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$. **637.** 1) $z_{1,2}=\pm\left(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i\right)$; 2) $z_{1,2}=\pm\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)$; 3) $z_{1,2}=\pm\left(\sqrt{3}-i\right)$; 4) $z_{1,2}=\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)$. **638.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$;

3) $\frac{1}{\cos^4 1}(\cos 4 + i\sin 4)$; 4) $2(\cos 0 + i\sin 0)$, если n — чётное; $2(\cos\pi + i\sin\pi)$, если n — нечётное. **641.** 1) $\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$; 2) $\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$. **643.** 1) $z_{1,\,2} = \pm 4i$; 2) $z_{1,\,2} = \pm\sqrt{7}i$; 3) $z_{1,\,2} = \pm 0{,}6i$; 4) $z_{1,2} = \pm\frac{3}{5}i$; 5) $z_{1,\,2} = \pm 2$, $z_{3,\,4} = \pm 2i$; 6) $z_{1,\,2} = \pm 3$, $z_{3,4} = \pm 3i$. **644.** 1) $10i$; 2) $0{,}5i$; 3) $2\sqrt{3}i$; 4) $3\sqrt{3}i$. **645.** 1) $z_{1,\,2} = 1 \pm 3i$; 2) $z_{1,\,2} = -1 \pm i$; 3) $z_{1,\,2} = 3 \pm 2i$; 4) $z_{1,\,2} = -4 \pm i$. **646.** 1) $z_{1,\,2} = \frac{1}{2} \pm i$; 2) $z_{1,\,2} = -1 \pm \frac{1}{3}i$; 3) $z_{1,\,2} = 2 \pm \sqrt{3}i$; 4) $z_{1,\,2} = -1 \pm \sqrt{5}i$; 5) $z_1 = -3$, $z_{2,3} = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$; 6) $z_1 = 2$, $z_{2,\,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$. **647.** 1) $z^2 - 4z + \frac{17}{4} = 0$; 2) $z^2 + z + \frac{1}{2} = 0$; 3) $z^2 - 2\sqrt{2}z + 7 = 0$; 4) $z^2 + 2\sqrt{6}z + 9 = 0$. **648.** 1) $z_{1,2} = \pm 2$, $z_{3,\,4} = \pm i$; 2) $z_{1,2} = \pm 1$, $z_{3,4} = \pm 4i$. **649.** 1) $(z-2-i)(z-2+i)$; 2) $(z+2-3i)(z+2+3i)$; 3) $\left(z+1-i\sqrt{3}\right)\left(z+1+i\sqrt{3}\right)$; 4) $\left(z-3-i\sqrt{2}\right) \times \left(z-3+i\sqrt{2}\right)$. **650.** 1) $4\left(z+\frac{1}{2}-i\right)\left(z+\frac{1}{2}+i\right)$; 2) $16\left(z-1-\frac{1}{4}i\right)\left(z-1+\frac{1}{4}i\right)$; 3) $25(z+1-0{,}2i)(z+1+0{,}2i)$; 4) $-(z-5+i)(z-5-i)$. **651.** 1) $5z^2 + 8z + 13 = 0$; 2) $2z^2 + 10z + 17 = 0$. **652.** 1) $z_{1,2} = \pm(2+3i)$; 2) $z_{1,2} = \pm(1-2i)$; 3) $z_{1,2} = \pm 1$, $z_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $z_{5,6} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; 4) $z_{1,2} = \pm i$, $z_{3,4} = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$, $z_{5,6} = \frac{-\sqrt{3} \pm i}{2}$; 5) $z_1 = -1$, $z_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $z_4 = 2$, $z_{5,6} = -1 \pm i\sqrt{3}$. **653.** 1) $1, i, -1, -i$; 2) $\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$; 3) i; $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$; $\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$; $\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$; $\cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$; 4) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)$; $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{24} + i\sin\frac{13\pi}{24}\right)$; $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{24} + i\sin\frac{25\pi}{24}\right)$; $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{24} + i\sin\frac{37\pi}{24}\right)$. **654.** 1) $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$; 2) $\frac{3}{2}$; $-\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$; $-\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}i$; 3) $\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$; $\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}$; $\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$; 4) $i\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$; $\sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$; 5) $1 + i$; $\frac{-\sqrt{3}+1}{2} + i$; $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; 6) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)$; $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$; $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right)$; $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$. **655.** 1) $z_{1,2} = \pm 2\left(\sqrt{\sqrt{5}-2} + \sqrt{\sqrt{5}+2}\,i\right)$; 2) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_5 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $z_6 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $z_7 = \frac{\sqrt{3}}{3}i$, $z_8 = -\frac{\sqrt{3}}{3}i$; 3) $z_1 = z_2 = 1$, $z_{3,4} = \pm i$; 4) $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1 + i\sqrt{15}}{4}$, $z_3 = \frac{1 - i\sqrt{15}}{4}$. **656.** 1) $z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = 1 + 3i$; 2) $z_1 = 1 + 4i$, $z_2 = 1 - 2i$. **657.** 1) $x = -2$; 2) $x = 0$;

3) $x=\frac{1}{2}$; 4) $x=-3$. **658.** 1) $x=-2$; 2) $x=-\frac{8}{3}$; 3) $x=1{,}6$; 4) $x=-0{,}5$. **659.** 1) 24; 2) $-5+3i$; 3) 67; 4) 8. **660.** 1) $-\frac{52}{29}-\frac{15}{29}i$; 2) $2i$; 3) $-\frac{41}{50}+\frac{63}{50}i$; 4) $\frac{12}{13}+\frac{5}{13}i$. **661.** 1) $3(\cos 270° + i\sin 270°)$; 2) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 3) $\frac{1}{2}(\cos 30° + i\sin 30°)$; 4) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. **662.** 1) 15; 2) 21; 3) $\sqrt{29}$; 4) 2; 5) $\sqrt{17}$; 6) 4. **663.** 1) $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 2) $-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$. **665.** 1) $z=-9-4i$; 2) $z=5-3i$; 3) $z=8+\left(1-\sqrt{2}\right)i$; 4) $z=-1-i$. **666.** 1) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 2) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$. **667.** 1) $1 \pm 2i$; 2) $-5 \pm i$; 3) $-\frac{3}{5}\pm\frac{4}{5}i$; 4) $-\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{15}}{4}i$. **668.** 1) $x=6$, $y=4$; 2) $x=3$, $y=1$. **669.** 1) $3i$; 2) $\frac{3}{5}-\frac{14}{5}i$. **670.** Модуль первого числа больше модуля второго числа. **671.** 1) -9; 2) 1. **672.** $x=-4$, $y=6$. **673.** 1) $z^2-2\sqrt{3}z+8=0$; 2) $z^2+1=0$. **674.** 1) $-81i$; 2) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 3) $4-4\sqrt{3}i$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$. **675.** 1) $8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=4\sqrt{2}-4\sqrt{2}i$; 2) $64(\cos\pi+i\sin\pi)=-64$; 3) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) $2^7\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-2^7i$. **676.** 1) $z_1=1-i$, $z_2=i$; 2) $z=0$. **677.** 1) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; $i\sqrt{2}$; $-i\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; $-i$; 3) 1; $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; -1; $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; 4) $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$. **678.** 1) $z_{1,2}=\pm\left(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i\right)$; 2) $z_1=3+i$, $z_2=-3-i$; 3) -5; $\frac{5}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}i$; $\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}i$; 4) $z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $z_1=2\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$, $z_2=2\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$, $z_3=2\left(\cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}\right)$; 5) $z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_3=\sqrt[6]{2}\times\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$; 6) $z_0=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$, $z_1=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$, $z_2=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$, $z_3=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$, $z_4=\sqrt[5]{2}\times\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$. **679.** 1) $\frac{1}{\cos^4 2}(\cos 8+i\sin 8)$; 2) $-32\cos^5\frac{3\pi}{5}\times\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. **680.** $z_1=2\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$, $z_2=2\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$, $z_3=\sqrt[5]{31}\left(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$, $z_4=-\sqrt[5]{31}$, $z_5=\sqrt[5]{31}\left(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$. **681.** $-\frac{1}{3}$;

$(z_1 + z_2 + z_3)$. **682.** 1) Действительная положительная полуось $z = x > 0$; 2) мнимая полуось $z = iy$, $y > 0$; 3) верхняя полуплоскость $z = x + iy$, $y > 0$; 4) вся комплексная плоскость за исключением точки $z = 0$. **684.** $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Глава VIII

685. 30. **686.** $3\frac{1}{2}\%$. **687.** 400%. **688.** 13,5. **689.** 62%. **690.** 30%, 10%, 60%. **691.** 3650 р. **692.** На 21%. **693.** 8. **694.** 600. **695.** 6365 р. 40 к., 6556 р. 36 к. **696.** 4088 р. 50 к. **697.** На 17%. **703.** 1) 9; 2) 2. **704.** 1) 88; 2) 47. **705.** Нет. **706.** Указание. Сравнить степени, в которых входит какое-нибудь простое число в произведение $a!$ и в произведение $(t+1)(t+2)...(t+a)$. **707.** 2) 0,5; 3) 20,8. **708.** 1083. **709.** 2) 3. **710.** 2) 0. **711.** 2) 64. **712.** 2) 160. **713.** 2. **714.** 2) $(0{,}2)^{\frac{2}{3}} > (0{,}2)^{\frac{3}{4}}$; 4) $\log_{0,3}\frac{4}{5} < \log_{0,3}\frac{3}{4}$. **715.** 2) $0 < a < 1$; 4) $0 < a < 1$; 6) $a > 1$. **716.** 2) Первое. **717.** 2) $3 < \log_2 10 < 4$. **718.** $\log_3 4 > \sqrt[4]{2}$. **720.** 2) 0. **721.** 2) $|b|(2b^2+1)$. **722.** 2) $3\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)$; 4) $\sqrt{11}-\sqrt{3}$. **723.** 1) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{6}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$. **724.** 2) $2\frac{7}{9}$; 4) $1\frac{4}{11}$; 6) $\frac{16}{75}$. **725.** 2) 2,(1); 4) 5,(18). **726.** 2) Да. **729.** 2) Имеют; 4) не имеют. **731.** 1) $\frac{13}{6}i$; 2) $36 + 9\sqrt{2}i$; 3) $-2-2i$; 4) $14+5i$; 5) $\frac{4}{5}+\frac{22}{5}i$; 6) $0{,}7-0{,}4i$; 7) $\frac{12}{13}$; 8) $\frac{2}{5}$; **732.** 1) $2-11i$; 2) 1; 3) $24i$; 4) -14. **736.** 1) $-i$; 2) 1. **737.** 1) 100; 2) 3; 3) 47; 4) 64. **738.** 2) $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{9}{16} \approx 58{,}7^\circ$. **739.** $120\,\mathrm{tg}\,36^\circ \approx 87$ м. **740.** $130(\mathrm{tg}\,36^\circ + \mathrm{tg}\,44^\circ) \approx 178$ м. **741.** 2) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{5}{12}$; 4) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{24}{7}$, $\sin\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos\alpha = \frac{7}{25}$. **742.** 2) $\frac{12}{13}$. **743.** 1) $(x-2)(2x-1)(2x+1)(x+3)$; 2) $(x-5)(x+1)\left(x+1+\sqrt{2}\right)\left(x+1-\sqrt{2}\right)$. **744.** 1) $\frac{x+3}{x-1}$; 2) $\frac{x^2+x+1}{2x^2-x+1}$; 3) $\frac{x^2+x+1}{2x^2-x+3}$; 4) $x+1$. **745.** 1) $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$; 2) $a^4+12a^3+54a^2+108a+81$. **746.** 2) $\frac{b-4}{2b}$. **747.** 2) 0. **748.** 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **749.** 2) 4,8. **750.** 2) $1+\sqrt{m}$. **751.** 2) $\sqrt{a}-1$. **752.** 2) $1-\sqrt{b}$. **753.** $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$. **754.** 2) $\frac{1}{ab}$. **755.** $16a^2$. **756.** $-6\sqrt{b}$. **759.** $\frac{2b+a-1}{3a}$. **760.** $\frac{3(1-a)}{a}$. **761.** 2) 2. **763.** 2) $2\cos^2\alpha$. **764.** $-\mathrm{tg}\,2\alpha$. **766.** 2) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$. **768.** 2) $\frac{3}{8}$. **769.** 7. **770.** 2) 0. **771.** 2) $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$; 4) 2. **772.** 2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 4) 4. **773.** 2) $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; 4) $\mathrm{ctg}^2\alpha$. **774.** 2) $-\sin\alpha-\cos\alpha$. **776.** $\frac{5}{\cos 2\alpha}$. **777.** $\cos^2 x$.

778. 2) $-\cos 2\alpha \cos 4\beta$. **779.** 2) $2\cos\alpha$. **780.** 2) $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg} 3\alpha$. **781.** 2) $1+\frac{1}{\cos x}$. **782.** $1\frac{5}{7}$. **783.** $-\frac{1}{2}$. **791.** 1) $z=2\ (\cos 0 + i\sin 0)$; 2) $z=3(\cos\pi + i\sin\pi)$; 3) $z=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $z=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; 5) $z=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$; 6) $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$. **792.** 1) $2+2\sqrt{3}i$; 2) $3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$. **793.** 1) $\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$; 2) $-1+i$; 3) i; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$. **794.** 2) $x=8$. **795.** $a=-6$. **796.** $b=3$. **797.** 2) $x=5$. **798.** 2) $x=\frac{1}{a-b}$. **799.** 2) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{3}{2}$. **800.** 2) $x=3$. **801.** 2) Корней нет. **802.** 1) $x=2$; 2) $\frac{1}{2}$. **803.** 1) $x_1=-1$, $x_2=-0{,}4$; 2) $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. **804.** 1) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{6}$; 2) $x_{1,2}=$ $=\pm\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **805.** 2) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_3=-1$, $x_4=3$. **806.** 1) $x_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm b$; 2) $x_1=a$, $x_2=-2{,}5a$. **807.** 1) Нет корней; 2) 12; 3) 4; 8; 4) 8. **808.** $a>0$, $b^2=4ac$. **810.** 2) $x=6$; 3) $x=3\frac{2}{3}$. **811.** 2) $x_1=3$, $x_2=\frac{5}{3}$. **812.** $x=3$. **813.** $x=5$. **814.** 2) $x_{1,2}=\pm 2$, $x_3=3$; 4) $x_1=-1$, $x_2=4$; 6) $x_1=-2$, $x_2=3$. **815.** 2) $\frac{1\pm\sqrt{17\pm 4\sqrt{14}}}{2}$. **816.** 2) $x_{1,2}=\frac{6+\sqrt{37}\pm\sqrt{49\pm 12\sqrt{37}}}{2}$. **817.** 2) $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{2}$. **819.** 1) $x_1=0$, $x_2=1$; 2) $x_1=-1$, $x_2=0$. **820.** 1) $x_1=1$, $x_2=-3$; 2) $x_1=3$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_{3,4}=-\frac{3\pm\sqrt{15}}{2}$. **821.** $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$. **822.** $x_3=3$. **823.** Нет. **824.** 2) $z_{1,2}=1\pm i\sqrt{2}$. **825.** 1) $z=\frac{17}{5}-\frac{1}{5}i$; 2) $z=-\frac{7}{13}+\frac{17}{13}i$. **826.** 1) $z=-1-\frac{3}{4}i$; 2) $z=-2+\frac{5}{6}i$. **827.** 1) $z_{1,2}=\pm i\sqrt{3}$; 2) $z_{1,2}=\pm\frac{5\sqrt{5}}{3}i$; 3) $z_{1,2}=2\pm i$; 4) $z_{1,2}=4\pm 5i$. **828.** 1) $z_{1,2}=\pm\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}+i\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $z_{1,2}=\pm(1+3i)$; 3) $z_1=-2$, $z_{2,3}=$ $=1\pm i\sqrt{3}$; 4) $z_{1,2}=\pm 1$, $z_{3,4}=\pm i$. **829.** 1. **830.** 1) (5; 0), (−5; 0), (3; 2), (−3; 2), (3; −2), (−3; −2); 2) (−5; 1), (5; −1). **831.** 2; 2 и 0; 0. **832.** 2) Корней нет. **833.** 1) $x=\frac{-12+\sqrt{44}}{5}$; 2) корней нет. **834.** 1) $x=$ $=\pm\sqrt{3}$; 2) $x=-1$. **835.** 1) $-5\leqslant x\leqslant 3$; 2) $x\geqslant 3$; 3) $x_1=0$, $x_2=-19$. Указание. Пусть $y=\sqrt[3]{8-x}$, $z=\sqrt[3]{27+x}$, тогда $y^2-yz+z^2=7$, $y^3+z^3=35$, откуда $y+z=5$, $yz=6$; 4) $x_1=-73$, $x_2=-8$. **836.** $a_1=-1$, $a_2=-2$. **837.** 2) $x_1=3$, $x_2=2$; 3) $x_1=3$, $x_2=-1$. **838.** 2) $x=3$; 4) $x=1$; 6) $x=0$. **839.** 2) $x_1=4$, $x_2=-2$. **840.** 2) $x_1=1$; 3) $x=-\frac{3}{8}$. **841.** 2) $x=9$. **842.** 2) $x=3$. **844.** 2) $x_1=3$, $x_2=243$. **845.** 2) $x=3{,}5$. **846.** 2) $x=\sqrt{3}$.

847. 2) $x_1 = 1$, $x_2 = 9$. **848.** 2) $x = 9$. **849.** 2) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 9$; 4) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. **850.** 2) $x = -3$. **851.** 2) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; 3) $x = 0$. **852.** 2) $x_1 = 100$, $x_2 = 0{,}1$; 4) $x = 0$. **853.** 2) $x = 2$; 4) $x = 4$. **854.** 2) $x = -9$. **855.** 1) $x_1 = \frac{1}{12}$, $x_2 = \frac{3}{4}$; 2) $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{2}{3}$. **856.** 1) $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \arcsin\frac{2}{3} + (2n+1)\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **857.** 1) $x = \pi + \arccos\frac{1}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$, $x = \pi - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **858.** 1) $x = -1$; 2) $x = \frac{1}{3}$. **860.** $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$. **861.** 2) $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $x = -\operatorname{arctg} 2{,}5 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **862.** 1) Корней нет; 2) корней нет. **863.** 2) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **864.** 2) $x = \pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **865.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **866.** 2) $x = \frac{\pi n}{3}$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **867.** 2) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **868.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **869.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **870.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **871.** 2) $x = \frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **872.** 2) $x = \frac{\pi n}{8}$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **873.** 2) $x = \pi + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n\arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **874.** 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **875.** 2) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **876.** 2) Корней нет; 4) $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **878.** 1) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2 - \frac{\pi^2}{36}}$; 2) 2. **879.** 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **880.** 2) $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{12} + (2n+1)\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **881.** 1) $x = \frac{1}{2}\left((-1)^n\arcsin\frac{1}{3} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$. **882.** $x = \frac{\pi}{3} + (2n+1)\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **883.** $x = \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 3$. **884.** $x = \frac{\pi}{3}$. **885.** $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\left(4\sqrt{2(1+a)} - 7\right) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, при $\frac{1}{8} \leqslant a \leqslant 1$. **886.** 2) $-3\frac{1}{3} < x < 40$; 4) $-2 < x < 8$. **887.** 1) $x < \frac{2}{3}$, $x > \frac{3}{2}$; 2) $x < -\frac{2}{9}$, $x > \frac{5}{2}$; 3) $x < 2\frac{4}{7}$. **888.** 1) $-16 < x < 3$; 2) $x < 4$, $x > 6$; 3) $x < -3$, $x \geqslant -2{,}5$. **889.** 2) $-1{,}4 \leqslant x \leqslant 0$. **890.** 2) $x > -4$. **891.** 1) $-7 < x < 2$, $x \geqslant 5$; 2) $x < -2 - \sqrt{2}$, $-2 + \sqrt{2} < x < 1$; 3) $x < -4$, $-1 < x < 2$, $x > 3$. **892.** 1) $1 \leqslant x \leqslant 4$; 2) $x < 1$, $x > 2{,}6$; 3) $0{,}25 < x < 1{,}5$;

4) $x \leqslant -4$, $x \geqslant \frac{2}{3}$. **893.** 1) $x \leqslant -\sqrt{3}$, $x = 1$, $x \geqslant \sqrt{3}$; 2) $x = \pm 3$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$. **894.** 2) $x < -2$; 4) $x < 2$, $1 < x < 2$, $x > 5$; 6) $\frac{1-\sqrt{73}}{6} < x < -\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3} < x < 1$, $1 < x < \frac{1+\sqrt{73}}{6}$. **895.** $x < -4$, $-3 < x < -2$, $-1 < x < 1$, $x > 2$. **896.** 1) $a \geqslant \frac{10}{3}$; 2) $a \leqslant \frac{1}{3}$. **897.** $-5 \leqslant x \leqslant -3$. **898.** $m = 2$. **899.** 7; 8; 9. **900.** $x = 6$. **901.** $x = -1$. **902.** 1) $x = 20$, $y = 8$; 2) $x = 6$, $y = 16$. **903.** 2) $x \leqslant 3$; 4) $x < -\frac{1}{8}$. **904.** 2) $-1 < x < 5$. **905.** 2) $3 - \sqrt{2} \leqslant x \leqslant 3 + \sqrt{2}$. **906.** 2) $x < 1$. **907.** 2) Решений нет. **908.** 2) $x \in \boldsymbol{R}$; 3) $x < 3$; 5) $x \leqslant 1 - \frac{1}{3}\log_3 5$. **909.** 2) $x < 1$, $x > 3$. **910.** 2) $-2 \leqslant x < -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} < x \leqslant 2$ **911.** 2) $x > 3$. **912.** 2) $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$. **913.** 2) $-1 \leqslant x < 1$, $3 < x \leqslant 5$. **914.** 2) $-3 < x < -\sqrt{6}$, $\sqrt{6} < x < 3$. **915.** $x < -4$, $-\frac{1}{8} < x < 0$. **916.** 1) $x \geqslant 2$; 2) $-311 < x < -11$, $1 < x < 1{,}5$. **917.** 1) $-\frac{1}{3} \leqslant x < 0$; 2) $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4} < x < 0$, $0 < x < 1$. **918.** $a < \sqrt{2}$. **919.** 2) $x > 0{,}01$. **920.** $-\frac{3}{2} < x < -1$, $-\frac{1}{2} < x < 0$. **921.** 2) $0 < x < \frac{1}{3}$, $x > 1$; 3) $1 - \sqrt{37} < x < \frac{2-\sqrt{292}}{3}$, $\frac{16}{3} < x < 6$. **922.** 2) $\frac{1}{\sqrt{10}} < x < 10$. **923.** 1) $x < \log_{32} \frac{3+\sqrt{21}}{2}$, $x > 1$; 2) $\log_3 \frac{12}{5} < x \leqslant 1$. **924.** 1) $\frac{1}{9} < x < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{30} < x < \frac{1}{25}$; 2) $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2} < x < 1$; 3) $-4 < x < -3$, $x \geqslant -1$. **925.** 1) $-\frac{2}{3} < x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{7} < x < 0$, $x > 0$; 2) $-\frac{1}{2} < x < -\frac{3}{7}$, $-\frac{1}{3} < x < 0$, $x > 0$. **926.** $x < \log_3 \frac{\sqrt{33}-1}{16}$, $x > 2$, $x = 3$. **927.** 1) $\frac{20}{9} \leqslant x < 4$, $x > 5$; 2) $-7 \leqslant x < 2$. **928.** 1) $x \leqslant -2$, $3 \leqslant x < 5$, $x > 7$; 2) $x \leqslant -4$, $1 \leqslant x < 3$, $x > 5$; 3) $-4 \leqslant x < 2$; 4) $x \leqslant -1$, $-\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 0$. **929.** 1) $0 \leqslant x \leqslant \frac{8}{3}$, $x = \frac{10}{3}$, $4 < x \leqslant 5$; 2) $0 \leqslant x \leqslant 4$, $x = 5$, $6 < x \leqslant 7{,}5$. **930.** 2) $\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **931.** 2) $-\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n < x < \arcsin\frac{1}{4} + \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n < x < \arccos\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **932.** 2) $-3\pi \leqslant x \leqslant -\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{9\pi}{4} \leqslant x \leqslant -\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - 3\pi < x < -\frac{5\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - 2\pi < x < -\frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi < x < -\frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} < x < \frac{\pi}{2}$. **933.** $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **934.** $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **938.** 1) (2; 1); 2) (5; −3). **939.** 1) (−1200; 500); 2) (7; 1). **940.** 2) (−8; −2), (8; 2); 3) (8; 4), (−8; −4). **941.** 1) (7; 6); 2) (2; 3),

$\left(-9; 28\frac{2}{3}\right)$. **942.** 2) (3; 1), (−3; −1); 4) (3; −5), (3; 5), (4; $2\sqrt{2}$), (4; $-2\sqrt{2}$). **943.** 1) (4; 2), (−4; −2); 2) (2; 4), (−2; −4). **944.** 1) $x=-2$, $y=\frac{1}{4}$; 2) $x=-2$, $y=\frac{1}{4}$. **945.** 2) (4; 1); 4) (10; 1000), (1000; 10). **946.** $(\sqrt{8}; \sqrt[4]{8})$. **947.** (1; 0), $\left(\frac{1}{9}; 1\frac{7}{9}\right)$. **948.** 1) (2; −3), (−6; 1); 2) (1; −6), (−3; 2). **949.** $-\frac{7}{3} \leqslant a < 6$. **950.** 2) (100; 81). **951.** 2) (0; 1). **952.** 1) $\left(\log_3\frac{49}{27}; \log_3\frac{9}{7}\right)$, $\left(0; \log_3\frac{36}{17}\right)$; 2) $\left(0; \log_2\frac{128}{71}\right)$, $(2\log_2 7-6;\ 4-\log_2 7)$. **953.** 1) (3; 0), $\left(\frac{1459}{27}; -\frac{728}{27}\right)$; 2) (2; 0), $\left(\frac{43}{4}; \frac{21}{4}\right)$. **954.** $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n; -\frac{3\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **955.** 1) $\left((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\pi n; (-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m\right)$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\left((-1)^n\arcsin\frac{5}{7}+\pi n; (-1)^{m+1}\arcsin\frac{3}{14}+\pi m\right)$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **956.** 1) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\left(n+\frac{m}{2}\right); -\frac{\pi}{4}+\pi\left(n-\frac{m}{2}\right)\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $m \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(k+m);\ \frac{\pi}{6}+\pi(m-k)\right)$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(k+m); -\frac{\pi}{6}+\pi(m-k)\right)$, $m \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **957.** 2; 12. **958.** $x > 5$. **959.** 1) $(a; a^2)$, $(a^2; a)$, если $a > 0$ и $a \neq 1$; $(-a-1; (a+1)^2)$, $((a+1)^2; -a-1)$, если $a < -1$ и $a \neq -2$; 2) 3 и $\sqrt{65}+2$. **960.** При $a \neq 3$ нет решений, при $a = 3$ — (0; 1). У к а з а н и е. Записать второе уравнение системы в виде $x^2+(y-1)^2+(a-3)^2+1-\cos(xy)=0$. **961.** 2) (1; 1), (2; 4); 4) $\left(-\frac{1}{6}+n; \frac{1}{6}+n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\left((-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi n; (-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k+\pi n\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+2\pi k\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **962.** $\left(-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}-\frac{\pi k}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. У к а з а н и е. Решить систему как линейную относительно u и v, где $u=\sin x\cos y$, $v=\cos x\sin y$. **963.** (81; 16). **964.** 1) 7,5; 2) 5,125; 3) 2; 4) 7. **965.** 1 мин. **966.** 126 км. **967.** 1080 км. **968.** 16 дней. **969.** 91 га. **970.** 8, 12. **971.** 25 и 20 билетов или 30 и 25 билетов. **972.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$. **973.** 432 детали. **974.** 15 км/ч. **975.** 3 км/ч. **976.** 21 ц, 20 ц. **977.** 1400 шагов. **978.** 3, −6, 12, −24. **979.** 27. **980.** 1, 3, 9, 15 или 16, 8, 4, 0. **981.** 2 или $12\frac{2}{5}$. **982.** В 3 раза. **983.** 16 см². **984.** 1) C_{300}^3; 2) $50 \cdot 100 \cdot 150$; 3) $C_{50}^2 \cdot C_{100}^2 \cdot 150$; 4) $C_{50}^3 \cdot 100 \cdot C_{150}^5$. **985.** P_{14}. **986.** $\frac{P_{14}}{P_7 \cdot P_6}$. **987.** 0,85; 850. **988.** 480. **989.** $\frac{29}{38}$. **990.** $\frac{5}{6}$. **991.** 0,18. **992.** 0,97. **993.** 0,96. **994.** 0,028. **995.** 2) $k=-1$,

$b=3$; 4) $k=0$, $b=-2$. **996.** $y=-\frac{2}{5}x+\frac{4}{5}$, $y=-\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}$. **997.** 2) Нет; 4) да. **998.** 2) $3\frac{1}{3}$. **999.** $x>1$. **1000.** $x<-\sqrt{3}$. **1003.** 2) Да. **1004.** 2) $(-1; 3)$, $(5; 3)$. **1005.** 4) $x<-2$, $x>2$. **1006.** 4) $x\neq 0$. **1007.** 1) 75 км/ч; 2) 5 ч; 3) $\approx 71{,}4$ км/ч. **1008.** Второму; на 40 р. **1009.** Нет, так как наименьшее расстояние между кораблями будет равно 3 милям через 48 мин. **1011.** 1), 2) Не является. **1012.** 1) Является; 2) не является; 3) является; 4) не является. **1013.** 2) Нечётная; 4) чётная. **1014.** 2) Нечётная; 4) чётная. **1015.** 2) Чётная; 4) не является чётной и не является нечётной. **1017.** 1) Нет; 2) да. **1018.** 2) $\frac{10\pi}{3}$. **1019.** 2) 10π; 4) 2π. **1021.** 2,25. **1022.** 2) 2 и -1. **1023.** 1) $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \mathbf{Z}$, $f_{\max}=2$, $f_{\min}=1$; 2) $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, $f_{\max}=\frac{15}{7}$, $f_{\min}=\frac{3}{2}$. **1024.** $a=2$, $b=-5$, $c=-3$. **1029.** $a\geqslant 1$. **1030.** 2) $x>-2$; 4) $x\neq 2\pi+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **1031.** 2) $x<-1$, $x>3$. **1032.** 1) $x\leqslant -7$, $x>6$; 2) $3<x\leqslant 3\frac{1}{2}$. **1033.** 2) $-\sqrt{10}\leqslant x<-3$, $3<x\leqslant\sqrt{10}$; 3) $-\frac{1}{7}<x\leqslant-\frac{1}{8}$, $x\geqslant 0$; 4) $-\frac{2}{7}<x\leqslant-\frac{1}{4}$, $x\geqslant 0$. **1034.** 2) $y\leqslant 7$; 4) $y\neq 2$. **1035.** 2) $-\sqrt{1{,}25}\leqslant y\leqslant\sqrt{1{,}25}$. **1036.** 1) $y\leqslant-\frac{19}{12}$; 2) $y\geqslant 0$. **1037.** 1) $-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$; 2) $y\geqslant 1$. **1038.** $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **1039.** $a=-3{,}5$. **1040.** 1) $a=1-\sqrt{2}$, $a=5+\sqrt{10}$; 2) $\left(\frac{1}{4};\frac{4+\sqrt{6}}{2}\right)$. **1041.** $a<-4$, $-\frac{5}{4}<a<0$. **1042.** $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{15}$. **1043.** 2) -3. **1044.** 2) $\frac{\pi}{3}$. **1045.** 2) $y=-6x-1$. **1046.** -1. **1047.** 9. **1048.** $(3; 9)$, $a=-3$. **1049.** $(1; 2)$, $(0{,}5; 2{,}25)$. **1050.** $(-1; -3)$. **1051.** $(3; e)$. **1052.** 2) $y=0{,}5(1+\ln 2-x\ln 2)$. **1053.** $\frac{\pi}{4}$. **1054.** e^{-1}. **1055.** $-\frac{\pi}{4}$. **1056.** $y=x+1$. **1057.** $y=3x-3$. **1058.** $\frac{12}{35}$. **1059.** 2) Возрастает на промежутках $x<0$ и $x>0$. **1060.** 2) $x=6$ — точка минимума. **1061.** 2) $x=2$ — точка минимума, $x=0$ — точка максимума. **1062.** 2) 1,5 и 1. **1063.** 2) 3 и 1. **1064.** 2) 0,5 и 0. **1065.** 7, -3. **1066.** $a=3$. **1067.** $a=\pm 3$. **1068.** 2) $x=0$ — точка минимума, $x=0{,}4$ — точка максимума. **1069.** $(1; 0)$, $(-1; 4)$. **1070.** $y=7x-43$. **1074.** 1 дм. **1075.** 54π см^3. **1076.** 6. **1077.** 2. **1078.** $\sin x-\frac{1}{x}-1$. **1079.** 132, -57. **1080.** 9 и 4. **1081.** $(1; 1)$. **1082.** $\frac{49}{27}$. **1083.** $4\sqrt{2}$. **1084.** $p=-10$, $q=26$. **1085.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ дм. **1086.** $3\sqrt[3]{2\pi v^2}$. **1087.** $\frac{R}{\sqrt{2}}$. **1088.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. **1089.** $\frac{4R}{3}$. **1090.** $\frac{\pi}{3}$. **1091.** $\frac{\pi p^3}{216}$. **1092.** $r=R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $H=R\frac{2}{\sqrt{3}}$. **1093.** $D=H$. **1094.** $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

1095. $r = \frac{2R}{3}$, $h = \frac{H}{3}$. **1096.** 2) $\ln 2$. **1097.** 2) $9\frac{1}{3}$; 4) 1. **1098.** 2) 4,5. **1099.** 2) $\frac{5}{12}$. **1100.** 2) $\frac{8}{3\ln 3}$. **1101.** $546\frac{3}{4}$. **1102.** $C = \frac{\pi}{2}$. **1103.** $b > \sqrt{3} - 1$, $b < -3 - \sqrt{3}$. **1104.** $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **1105.** $a = 6$, $b = -11$, $c = 6$. Указание. Так как точки A и B симметричны относительно прямой $x = 2$, то $A(x_1;\ y_0)$, $B(x_2;\ y_0)$, где $x_1 = 2 - t$, $x_2 = 2 + t$, $t > 0$. Из условия $f'(x_1) = f'(x_2)$ следует, что $a = 6$ и $f'(x_1) = f'(x_2) = -3t^2 + 12 + b$, а равенство $f(x_1) = f(x_2)$ можно записать в виде $b = t^2 - 12$ (так как $t > 0$), откуда $f'(x_1) = f'(x_2) = -2t^2 < 0$. **1106.** $a = 6$, $b = 11$, $c = 5$. **1107.** $a = -4$, $b = 5$, $c = -2$. **1108.** $a = 4$, $b = -5$, $c = 2$. **1109.** $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{9}\right)$. **1110.** $(-2;\ 22)$, $(2;\ 10)$. **1111.** $p = -2$, $q = 0$, $d = 1$. **1112.** 2,25. **1113.** $k = 2$. **1114.** $1\frac{1}{8}$. **1115.** $a = 1$, $s = 4$. **1116.** $\operatorname{arctg} \frac{4}{\pi^2}$. **1117.** 3) $3\frac{1}{9}$; 4) -2. **1118.** 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $x = \frac{1}{3}$. **1120.** $-2 < x < 3$. **1121.** $v(10) = 262$ м/с, $t \approx 37$ с. **1122.** 12π. **1123.** 160 чел.-ч/сут.; 20 чел. **1124.** 17417 ед. продукции. **1125.** 2) $5x^{-\frac{1}{6}}$. **1126.** 2) $\frac{4x^2 + 4x - 5}{(2x + 1)^2}$. **1127.** 2) $\frac{2x(4x + 3)}{3\sqrt[3]{x + 1}}$; 4) $\cos 2x - 2x\sin 2x$. **1128.** $\frac{2}{5\ln 10}$. **1129.** $x = 2$. **1130.** 2) $f'(2) > 0$. **1131.** $f'(0) = 4$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8\left(7 + 4\sqrt{3}\right)$. **1132.** $-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 0$. **1133.** $\frac{1}{8}(2\sin 4x - 9)$. **1134.** $\frac{3}{4}\ln|4x - 1| + C$. **1135.** 1) 11,25; 2) $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$; 3) $5{,}5 + 7\ln 2$; 4) 72. **1136.** 2) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$; 4) $1\frac{1}{3}$; 5) $\frac{4}{3}$; 6) $\ln 3$.

Ответы к заданиям «Проверь себя!»

Глава I

1. $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; функция нечётная. **2.** $y = \sin\ x$: 1) $x_1 = -\frac{3\pi}{2}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{2}$; 2) $x = -\frac{\pi}{2}$; 3) $x_1 = -2\pi$, $x_2 = \pi$, $x_3 = 0$, $x_4 = \pi$; 4) $-2\pi < x < -\pi$, $0 < x < \pi$; 5) $-\pi < x < 0$; $y = \cos\ x$: 1) $x_1 = -2\pi$, $x_2 = 0$; 2) $x_1 = -\pi$, $x_2 = \pi$; 3) $x_1 = -\frac{3\pi}{2}$, $x_2 = -\frac{\pi}{2}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$; 4) $-2\pi \leqslant x < -\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; 5) $-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$. **3.** $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$. **4.** $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{8}$, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{7}$, $\operatorname{ctg} 2$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$.

1. Рис. 145, а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; б) $-\pi+2\pi n\geqslant x\geqslant 2\pi n$.

2. Рис. 146, $y>0$ при $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **3.** 3 решения. **4.** $[-1;\ 2]$. **5.** Рис. 147.

Глава II

1. 11. **2.** 1) $-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{\sqrt{x}}-e^x$; 2) $9(3x-5)^2$; 3) $6\cos 2x\cos x-3\sin 2x\sin x$; 4) $\frac{x^4+15x^2}{(x^2+5)^2}$. **3.** $\alpha=-\frac{\pi}{4}$. **4.** $x<-\frac{1}{3}$. **5.** $y=x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$.

1. $\frac{2}{3}$. **2.** Нет. **3.** $x_1=1,\ x_2=4$. **4.** $y=3x-4,\ y=3x+6\frac{2}{3}$.

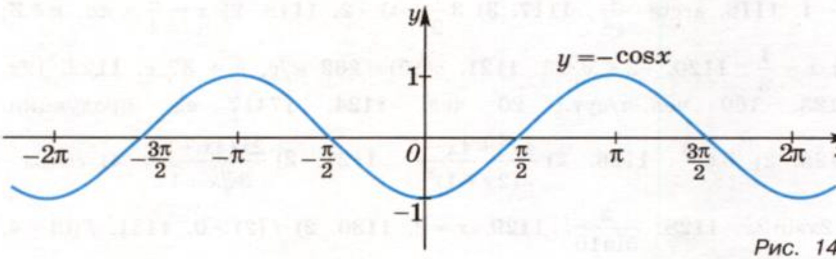


Рис. 145

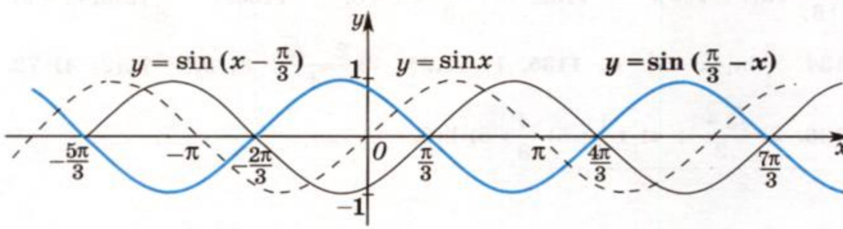


Рис. 146

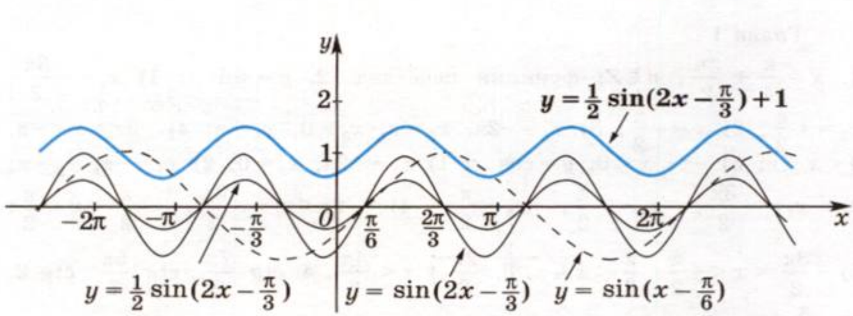


Рис. 147

Глава III

1. 1) Возрастает при $x \geqslant 1\frac{1}{4}$, убывает при $x \leqslant 1\frac{1}{4}$; 2) убывает при $x \geqslant -4$. **2.** Минимум $y = -7$ при $x = 3$. **3.** См. рис. 148. **4.** Наибольшее 10, наименьшее 6. **5.** 3 дм, 6 дм, 4 дм.

1. $a \geqslant 0$. 2. 1) См. рис. 149. 3. Наибольшее e, наименьшее 0. 4. $4R$.

Глава IV

2. $F(x) = x^3 + x^2 - 3x - 1$. **3.** 1) $4\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{16}$; 3) 0; 4) 1. **4.** $20\frac{5}{6}$ кв. ед.

1. $F(x) = e^x + 3\cos x - 2$. 2. 1) $\frac{14}{3}$; 2) $\frac{2}{3}\ln 2$. 3. $S = \frac{4}{3}$ кв. ед. (рис. 150). 4. $S = 9$ кв. ед. 5. $S = \frac{16}{3}$ кв. ед.

Глава V

1. 1) 5040; 2) 336; 3) 56; 4) $\frac{2}{7}$. **2.** 1) $n^2 + n$; 2) $\frac{1}{n^2 - 5n + 6}$. **3.** 84 способами. **4.** 5040 способами. **5.** 720 способами. **6.** 720. **7.** 1) $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$; 2) $1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4 - a^5$.

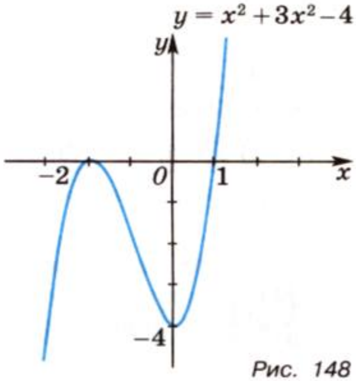


Рис. 148

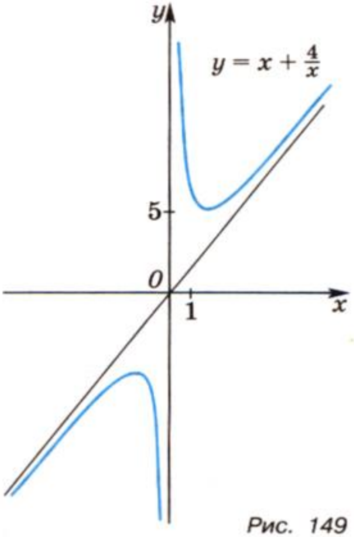


Рис. 149

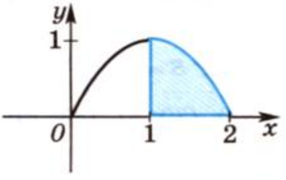


Рис. 150

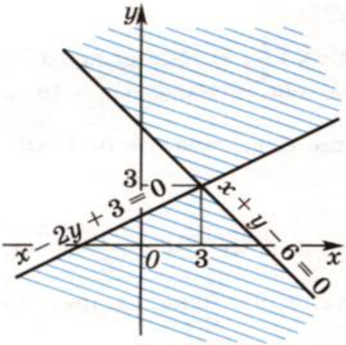


Рис. 151

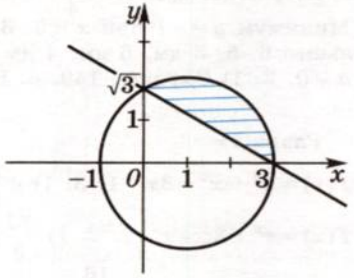


Рис. 152

1. 1) $n = 1$; 2) $n = 2$. 2. $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$, $n_4 = 3$. 3. 14 580. 4. 64 способами. 5. 1) $C_9^7 = 36$; 2) $2^9 : 2 = 256$. 6. $-15\ 504 \cdot x^5$.

Глава VI

1. $\frac{1}{4}$. 2. 0,95. 3. $\frac{1}{3}$. 4. $\frac{15}{56}$. 5. 0,64. 6. $\frac{15}{19}$.

1. 0,18. 2. 0,992. 3. 0,3. 4. $\frac{17}{27}$.

Глава VII

1. 1) $8 - i$; 2) $4 - 4i$; 3) $71 + 3i$; 4) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. 2. 1) $-1\frac{13}{29}$; 2) $-\frac{8}{25} - \frac{6}{25}i$.

3. 1) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $\cos\left(-\frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$. 4. 1) $z_{1,2} = \pm\sqrt{5}\, i$; 2) $z_{1,2} = 5 \pm 3i$. 5. Окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом $R = 3$. 6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. 7. 1) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $25i$. 8. 1) $z_0 = 2$, $z_1 = +2i$, $z_2 = -2$, $z_3 = -2i$; 2) $z_0 = 4$, $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}\, i$, $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}\, i$.

Глава VIII

1. 1) Прямая, проходящая через точки $\left(0; \frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; 2) окружность радиуса 4 с центром в точке (3; −1). 2. 2) круг радиуса 2 с центром в точке (−2; 5). 3. Внутренняя область треугольника с вершинами (1; 0), (0; −1), (4; −3).

1. См. рис. 151. 2. См. рис. 152; $S = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{3}$. 3. 1) Квадрат с вершинами в точках $A(-3; 0)$, $B(0; -3)$, $C(0; 3)$, $D(3; 0)$; 2) все точки, лежащие внутри квадрата $ABCD$.

Предметный указатель

Оглавление

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

В учебно-методический комплект по алгебре и началам математического анализа для 10 и 11 классов входят:

- **Учебники для 10 и 11 классов** *(авторы Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин)*
- Дидактические материалы для 10 и 11 классов *(авторы М. И. Шабунин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, О. Н. Доброва)*
- Тематические тесты для 10 и 11 классов *(авторы М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова)*
- Методические рекомендации для 10 и 11 классов *(авторы Н. Е. Фёдорова, М. В. Ткачёва)*

ISBN 978-5-09-049531-8

9 785090 495318

e7fc82f4-9f8b-11df-9228-0019b9f502d2

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО